

擬軌道追跡性と断面写像

東京理大 岡 正俊 (Masatoshi Oka)

擬軌道追跡性と拡大性は位相力学系では重要な概念である。
この二つの概念は双曲的力学系に密接に関係している。

H. B. Keynes と M. Sears ([2]) は *real flow* の拡大性を局所断面の族と断面写像を用いて特徴づけた。ここでは *real flow* の擬軌道追跡性と断面写像との関係について調べる。

(X, R) はコンパクト距離空間 X 上の *fixed points* をもたない *real flow* であるとする。 *real flow* を単に *flow* と呼ぶことにし、 d は X の距離関数とする。 $t \in R$ の点 $x \in X$ に対する *flow* の作用を xt と書く。正数 ε_0 は (X, R) の周期の集合の下限を表す。

δ, ε は正数とする。点列の組 $(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty})$ は $t_i \geq 1$ ($i \in \mathbb{Z}$) かつ $d(x_i t_i, x_{i+1}) < \delta$ ($i \in \mathbb{Z}$) であるとき (X, R) の δ -擬軌道と呼ばれる。 δ -擬軌道が点 $x \in X$ によって ε -追跡されるとは、 R の同相写像 h で狭義単調増加かつ $h(0) = 0$ となるものが存在して $d(xh(t), x_0 * t) < \varepsilon$ ($t \in R$) となることをいう。ただし、 $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$ である t に対して $x_0 * t = x_n(t - \tau_n)$ ($\tau_n = \sum_{i=0}^n t_i$, $\tau_n = \sum_{i=n}^{-1} t_i$ ($n < 0$) かつ $\tau_0 = 0$) であるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、正数

δ が存在して, 任意の δ -擬軌道が X のある点によって ε -追跡されるとき, (X, R) は擬軌道追跡性をもつという。

$\varepsilon > 0$ とする。 X の閉部分集合 S は, 任意の $x \in S$ について $S \cap x[-\varepsilon, \varepsilon] = \{x\}$ が成り立つとき, 時間 ε の局所断面と呼ばれる。局所断面 S に対して $S^+ = S \cap \text{int}(S[-\varepsilon, \varepsilon])$ を S の内部と呼ぶ。ただし $S \subset X$ と区間 I に対して $SI = \{xt; x \in S, t \in I\}$ とする。

命題 ([2]). 次の $\varepsilon > 0$ が存在する。即ち, $0 < \alpha < \frac{\varepsilon}{2}$ である任意の α に対して, 互いに素な, 時間 ε の局所断面の族 $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ で各 S_i の直径が α 以下であるものと, 局所断面の族 $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ で $T_i \subset S_i^+$ ($i=1, 2, \dots, k$) であるものが存在して,

$$X = T^+[0, \alpha] = T^+[-\alpha, 0] = S^+[0, \alpha] = S^+[-\alpha, 0]$$

となる。ただし $T^+ = \bigcup_{i=1}^k T_i$ かつ $S^+ = \bigcup_{i=1}^k S_i$ である。

上の命題における ε と α もとり固定する。

$$\beta = \sup \{ \delta > 0 : \text{任意の } x \in S^+ \text{ に対して } x(0, \delta) \cap S^+ = \emptyset \}$$

とし, $\rho > 0$ を $5\rho < \varepsilon$ かつ $2\rho < \beta$ であるものとする。

$x \in T^+(S^+)$ に対して, $t \in \mathbb{R}$ を $xt \in T^+$ となる最小の正の時間とする。明らかに $\beta \leq t \leq \alpha$ であり, この t によって断面写像 $\varphi: T^+ \rightarrow T^+$ と $\tilde{\varphi}: S^+ \rightarrow T^+$ を $\varphi(x) = xt$ かつ $\tilde{\varphi}(x) = xt$ と定義する。

φ は全単射であり, $\tilde{\varphi}$ は全射である。

$S_i \in \mathcal{S}$ に対して, $D_\rho^i = S_i[p, \rho]$ とし, 射影写像 $P_\rho^i: D_\rho^i \rightarrow S_i$ を $P_\rho^i(x) = xt$ と定義する。ただし $xt \in S_i$ かつ $|t| \leq \rho$ である。 P_ρ^i は全射かつ連続写像である。混同が生じない限り, $D_\rho^i = D_\rho$ かつ $P_\rho^i = P_\rho$ と書くことにする。

注意. 正数 a を十分小さくとると次を満たすようにできる。即ち, $x, y \in S_i$ がもし $d(x, y) \leq a$ かつある t に対して, $xt \in T_j$ ($|t| \leq 3a$) ならば, $yt \in D_\rho^j$ である。

注意により, もし $y \in S_i$ が $x \in T_i$ に十分近く, かつ $\varphi(x) = xt$ ($\tilde{\varphi}(x) = xt$) で $xt \in T_j$ ならば, y を通る (X, R) の軌道が t に近い時間で S_j にぶつかる。このぶつかる点を y_i とおく。 $y_i = P_\rho(yt)$ である。帰納的に, もし $d(\varphi^i(x), y_i) \leq a$ ($d(\tilde{\varphi}^i(x), y_i) \leq a$) ならば, $\varphi^{i+1}(x) = \varphi^i(x)t$ である t を用いて $y_{i+1} = P_\rho(y_i t)$ と定義できる。同様に $i < 0$ についても y_i を定義することができる。

T_i, S_i の代わりに, それぞれ T, S と書く。このとき, $x \in T$ に対して x の (φ に対する) η -安定集合と η -不安定集合をそれぞれ,

$$W_\eta^s(x) = \{y \in S; \text{任意の } i \geq 0 \text{ に対して } d(\varphi^i(x), y_i) < \eta\}$$

$$W_\eta^u(x) = \{y \in S; \text{任意の } i \leq 0 \text{ に対して } d(\varphi^i(x), y_i) < \eta\}$$

と定義する。任意の $\eta > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、 $d(x, y) < \delta$ ($x, y \in T^+$) ならば $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x) \neq \emptyset$ であるとき、断面写像 φ は標準座標系をもつという。 $\delta > 0$ とし、点列 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset T^+$ は各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $d(\varphi(x_i), x_{i+1}) < \delta$ であるとき、 φ の δ -擬軌道と呼ばれる。同様に $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \subset S^+$ が $d(\tilde{\varphi}(x_i), x_{i+1}) < \delta$ ($i \geq 0$) であるとき、 $\tilde{\varphi}$ の δ -擬軌道と呼ばれる。点列 $\{x_i\} \subset T^+(S^+)$ が $\varphi(\tilde{\varphi})$ の δ -擬軌道であるとき、 t_i を $\varphi(x_i) = x_i t_i$ ($\tilde{\varphi}(x_i) = x_i t_i$) とする。 φ の δ -擬軌道が $y \in S^+$ によって ε -追跡されるとは、次が成り立つことである。

$$(1) \quad d(y, x_0) < \varepsilon$$

$$(2) \quad y_i = p_p(y_{i-1}, t_{i-1}) \text{ かつ } y_{-i} = p_p(y_{i+1}, -t_{i+1}) \text{ が } i \geq 1 \text{ に対して帰納的に定義され、} d(y_i, x_i) < \varepsilon \text{ (} i \in \mathbb{Z} \text{) が成り立つ。ただし } y_0 = y \text{ である。}$$

$\tilde{\varphi}$ の δ -擬軌道が $y \in S^+$ によって ε -追跡されるとは、上の (1), (2) が $i \geq 0$ に対して成り立つことである。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、 $\varphi(\tilde{\varphi})$ の任意の δ -擬軌道が S^+ のある点によって ε -追跡されるとき、 $\varphi(\tilde{\varphi})$ は擬軌道追跡性をもつという。

定理 1. (X, R) が擬軌道追跡性をもてば、断面写像 φ は擬軌道追跡性をもつ。

系. (X, R) が擬軌道追跡性をもてば, 断面写像 φ は標準座標系をもつ。

定理 2. (X, R) が擬軌道追跡性をもつための必要十分条件は断面写像 $\tilde{\varphi}$ が擬軌道追跡性をもつことである。

参考文献

- [1] R. Bowen and P. Walters, *Expansive one-parameter flows*, J. Diff. Eq. 12 (1972), 180-193.
- [2] H. B. Keynes and M. Sears, *Real-expansive flows and topological dimension*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1 (1981), 179-195.
- [3] M. Komuro, *One-parameter flows with the pseudo orbit tracing property*, Mh. Math. 98 (1984), 219-253.
- [4] R. F. Thomas, *Stability properties of one-parameter flows*, Proc. London Math. Soc. 45 (1982), 479-505.