

$\lambda +$ 項の値の上限について

東北大学工学研究科 竹内 泉 (Takeuti, Izumi)

1 $\lambda +$ 項

$\lambda +$ 項は、型付 λ 計算の部分体系であり、型付 λ 項の β 変換列の長さの上限を与える際に有用である。[参考文献 1]

$\lambda +$ 項は型付 λ 項に次のような制限を加えたものとして定義される。

- ・原子型は ω のみ。
- ・型の構成子は $\supset$ のみ。
- ・原子定項は $0 \in \omega$ 、 $s \in \omega \supset \omega$ 、 $+$ $\in \omega \supset \omega \supset \omega$ のみ。
- ・変数は各型に対し十分に多くある。
- ・計算規則は、 α 同値、 β 同値、 η 同値に加えて、次のものがある。

$$+0t = +t0 = t \quad +(st)u = +t(su) = s(+tu)$$

$$+tu = +ut \quad +(+tu)v = +t(+uv)$$

● シュビッテンベルクの上界

型付 λ 項の正規化可能性 [参考文献 3] により、型が ω で

ある $\lambda +$ 項はある数を表す。

項の構文上の複雑さから項の値に上界を与えることは重要である。シュビッテンベルクはこの問題に於いてある上界を与えた。

シュビッテンベルクの上界を説明する為に、クヌスの記号 $\uparrow\uparrow$ を紹介する。これは二項演算であって、次のように定義する。

$$x \uparrow\uparrow 0 := 1$$

$$x \uparrow\uparrow n+1 := x^{x \uparrow\uparrow n}$$

普通の記号に依れば

$$x \uparrow\uparrow n = x^{x^{\cdots x}} \quad \} \quad n \text{ ケ}$$

n を固定して $x \rightarrow x + 2 \uparrow\uparrow n$ という函数を考えると、これは初等函数であり、函数列 $\{x \rightarrow x + 2 \uparrow\uparrow n\}_{n=0,1,\dots}$ は初等函数の中で共終である。

シュビッテンベルクは型が ω である任意の閉 $\lambda +$ 項 t に対して、項の値を $\llbracket t \rrbracket$ 、項の長さを l 、現れる変数の階級の最高のものを q で表すと、 $\llbracket t \rrbracket$ は $l + 2 \uparrow\uparrow 2q$ 程度で圧さえられることを示した。[参考文献 2]

ここでは、 $3l \uparrow\uparrow q + 2$ で圧さえられることを示す。

2 項と型

●長さ、階級、位数

型と項に対して、長さ $length[]$ 、階級 $rank[]$ 、位数 $order[]$ を定義する。

$$length[\omega] := 1$$

$$length[T \supset U] := length[T] + length[U]$$

$$X \text{ が型 } T \text{ の原子項ならば } length[X] := length[T]$$

$$length[\lambda x.X] := length[X]$$

$$length[XY] := length[X] + length[Y]$$

$$rank[\omega] := 0$$

$$rank[T \supset U] := \max\{rank[T] + 1, rank[U]\}$$

$$X \in T \text{ ならば } rank[X] := rank[T]$$

$$order[\omega] := 0$$

$$order[T \supset U] := order[U] + 1$$

$$X \in T \text{ ならば } order[X] := order[T]$$

●意味論

型が ω である閉項は整数を表す。数 n を表す項

$$s(s(\cdots s(s0) \cdots)) \quad \text{—} \quad s \text{ が } n \text{ ケ}$$

を $\bar{n}$ と書く。そうすると、型 ω の閉項 t に対してある数 n があって、 $t = \bar{n}$ となる。この n を $\llbracket t \rrbracket$ と書く。すなわち

$$t = \bar{n} \quad \Leftrightarrow \quad n = \llbracket t \rrbracket$$

●整数の表す型

整数に依ってある一連の型を表す。

$$0 := \omega$$

$$n + 1 := n \supset n$$

これは単なる略記であって、数と型を同じと見做すものではない。

3 順序

同じ型をした閉項の間に部分順序関係を定義する。定義は、型の複雑さに関する帰納法で行なう。

$$\text{型 } \omega \text{ に対しては、} \quad X \leq Y \Leftrightarrow [X] \leq [Y]$$

$$X, Y \in T \supset U \text{ に対しては、}$$

$$X \leq Y \Leftrightarrow \text{型 } T \text{ の任意の閉項 } Z \text{ に対し、} XZ \leq YZ$$

一般の項に対しても、同じ型の項の間に同様の部分順序を定義する。今度は、『 $\leq$ 』の両辺に含まれる自由変数の数の帰納法に依り行なう。

$$X, Y \text{ は同じ型の項で、} x \text{ はどちらかに自由変数として含まれる変数である時、} \quad X \leq Y \Leftrightarrow \lambda x.X \leq \lambda x.Y$$

この定義は次を意味する。ここで $\vec{u}$ は X, Y に含まれる自由変数を全て列べたものである。

$$X \leq Y \Leftrightarrow$$

$$\vec{u} \text{ と型が適合する任意の閉項の列 } \vec{Z} \text{ に対し、} X[\vec{Z}/\vec{u}] \leq Y[\vec{Z}/\vec{u}]$$

この時 $X[\vec{Z}/\vec{u}]$ と $Y[\vec{Z}/\vec{u}]$ は閉項になる。

次の命題が成り立つ。

項 $X \in T \supset U$ 、 $Y, Z \in T$ に対して $Y \leq Z \Rightarrow XY \leq XZ$

項 $X, Y \in T \supset U$ 、 $Z \in T$ に対して $X \leq Y \Rightarrow XZ \leq YZ$

変数 x と項 X, Y に対して $X \leq Y \Rightarrow \lambda x. X \leq \lambda x. Y$

4 定項

● 1、0、+

型 T に対して

$$I^{T \supset T} := \lambda x^T. x^T$$

型 T に対して O^T は

$$O^\omega := 0$$

$$O^{T \supset U} := \lambda x^T. O^U$$

型 T に対して $+_T \in T \supset T \supset T$ は

$$+_\omega := +$$

$$+_{T \supset U} := \lambda xyz. +_U(xz)(yz)$$

以降、 $+$ はある型 T に対する $+_T$ を表し、必ずしも $+_\omega$ を表さない。

● P、Q、R、M

整数 $n \geq 1$ に対して

$$P_n \in n-1 \supset n-2 \supset \cdots 1 \supset 0 \supset n-1$$

$$P_n := \lambda u x_{n-2} \cdots x_0 y_{n-2} \cdots y_0. u(+x_{n-2} y_{n-2}) \cdots (+x_0 y_0)$$

次が成り立つ。

$$P_1 = I$$

整数 $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} Q^n &:= \lambda u v x_{n-3} \cdots x_0. u (P_{n-1} v x_{n-3} \cdots x_0) \\ &\quad (P_{n-2} (v x_{n-3}) x_{n-4} \cdots x_0) \\ &\quad \cdots \\ &\quad (P_2 (v x_{n-3} \cdots x_1) x_0) \\ &\quad (v x_{n-3} \cdots x_0) \end{aligned}$$

次が成り立つ。

$$Q^2 = I$$

整数 $n \geq 2$ に対して

$$R^2 := I$$

$$R^n := \lambda u v w. Q^{n-1}(uv)(uvw) \quad - \quad \text{但し } n \geq 3$$

整数 $n \geq 1$ 及び $i \geq 0$ に対して

$$M_0^1 := s$$

$$n \geq 2 \text{ ならば } M_0^n := +I(\lambda u. M_0^{n-1})$$

$$i \geq 1 \text{ ならば } M_i^n := (+IR^{n+1})M_{i-1}^n$$

+、P の下付添字と I、O、Q、R、M の上付添字は型を表す。型の推定が容易な場合には、型を表す添字は省略して書かない。

● F、G

階級 n の型 T に対して、順序準同型写像 $F: (\text{型 } T \text{ の項}) \rightarrow (\text{型 } n \text{ の項})$ と $G: (\text{型 } n \text{ の項}) \rightarrow (\text{型 } T \text{ の項})$ を導入する。項 F_T と G_T は F と G の表現である。項によって表現される写像が準同型になることは明かである。

型 T 及び整数 $n \geq \text{rank}[T]$ に対して $F^{T \supset n}$ 及び $G^{n \supset T}$ を定義する。これは T の帰納法で行なう。

まず $T = \omega$ の場合、 $F^{\omega \supset n} := \lambda v x_{n-1} \cdots x_0. v$

$$G^{n \supset \omega} := \lambda u. u O^{n-1} \cdots O^0$$

$T \neq \omega$ の場合は、 T を

$$T = T_1 \supset T_2 \supset \cdots T_h \supset \omega$$

と表す。 $h = \text{order}[T]$ である。この $T_1 \cdots T_h$ を階級に依って分類する。

階級 0 — $T_{j_{0,1}} \cdots T_{j_{0,h_0}}$

階級 1 — $T_{j_{1,1}} \cdots T_{j_{1,h_1}}$

 : :

階級 $n-1$ — $T_{j_{n-1,1}} \cdots T_{j_{n-1,h_{n-1}}}$

$h_0 + h_1 + \cdots h_{n-1} = h$ であり、 $j_{k,l}$ は 1 から h までを動く。

$h_0, h_1 \cdots h_{n-1}$ の中には 0 があるかも知れない。以降は $T_{j_{k,l}}$ を

$T_{k,l}$ と書く。 $T_{k,1} \cdots T_{k,h_k}$ の中には重複して現れるものがある

かも知れない。特に、 $T_{0,1} \cdots T_{0,h_0}$ は全て等しく ω である。

さて、変数 $x_1^{T_1} \cdots x_h^{T_h}$ を考える。 T_j と $T_{k,l}$ のように、 $x_{j,k,l}$ を $x_{k,l}$ と書く。この時、 $G^{n \supset T}$ を

$$G^{n \supset T} := \lambda u x_1 \cdots x_h. u V_{n-1} \cdots V_0$$

と定める。ここで $V_{n-1} \cdots V_0$ は

$$V_k := + (F^{T_{k,1} \supset k} x_{k,1})$$

$$(+ (F^{T_{k,2} \supset k} x_{k,2})$$

$$(\cdots + (F^{T_{k,h_k-1} \supset k} x_{k,h_k-1})$$

$$(F^{T_{k,h_k} \supset k} x_{k,h_k}) \cdots)) \quad - \quad h_k \geq 2 \text{ の時}$$

$$V_k := F^{T_{k,1} \supset k} x_{k,1} \quad - \quad h_k = 1 \text{ の時}$$

$$V_k := 0^k \quad - \quad h_k = 0 \text{ の時}$$

を表す。

$F^{T \supset n}$ は

$$F^{T \supset n} := \lambda v x_{n-1} \cdots x_0. v (G^{rank[T_1] \supset T_1} x_{rank[T_1]}) \cdots (G^{rank[T_h] \supset T_h} x_{rank[T_h]})$$

と定める。

単に型 T のみを指定した時には、

$$F_T := F^{T \supset rank[T]} \quad , \quad G_T := G^{rank[T] \supset T}$$

を表す。

次が成り立つ。

$$G_T(F_T x) \geq x$$

$n \geq rank[T]$ ならば、 n に依らず

$$\lambda x. G^{n \supset T}(F^{T \supset n} x) = \lambda x. G_T(F_T x)$$

5 補題

$$\text{補題 1} \quad \lambda u.F_T(G_T u) \leq M_{\text{length}[T]-1}$$

$$\text{補題 2} \quad \lambda v.QM_i^n(M_j^n v) \leq M_{i+j+2}^n$$

$$\text{補題 3} \quad M_i^{n+1}O^n \leq M_{2^{i+3}-3}^n \quad \text{但し} \quad n \geq 1$$

6 定理

閉項 X の長さ $l = \text{length}[X]$ 、階級 $r = \text{rank}[X]$ 、 X の中にある変数と原子定項の中で階級が一番高いものの階級が q である時、

$$FX \leq M_{3^l-3}^{q+1} O^q \cdots O^r$$

7 系

閉項 $X \in \omega$ に対し、 $\text{length}[X] = l$ 、 X の中にある原子項の中で階級が一番高いものの階級を q と書く時、

$$[X] \leq 2_{q+1}^{3l} - 3$$

$$\text{但しここで} \quad 2_0^n = n, \quad 2_{i+1}^n = 2^{2_i^n}$$

8 結論

定理により、項の列 $\{M_i^n\}_{i=0,1,\dots}$ は型 n の閉項の中で共終である。また $F(Gx) \geq x$ であることから、列 $\{G_T M_i\}_{i=0,1,\dots}$ もまた型 T の閉項の中で共終であることが示される。

特に、型 ω に対しては、系の示すように $[X] \leq 2_{q+1}^{3l} - 3 \leq 3l$

$\uparrow \uparrow q + 2$ という評価が得られる。この不等式に於いて、 $\uparrow \uparrow$ の第二引数に於ける q の一次の係数が 1 より小さくならないことは既に知られている。[参考文献 2] その意味で、この不等式は最良の評価である。

9 参考文献

- [1] Gandy, R. O. : Proof of strong normalization. *To H.B.Curry Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism.* 1980
- [2] Shwichtenberg, H. : Complexity of normalization in the pure typed lambda - calculus. *The L.E.J.Brouwer Centenary Symposium.* 1982
- [3] Girard, J.-Y. et al. : Proofs and Types. 1989
- [4] 竹内泉 : 修士論文 , 東北大学工学研究科 (1993 年提出予定)