

確率セルオートマトンモデルによる蟻の交通流解析

龍谷大学 理工学部 西成 活裕¹

蟻の1次元流を表すセルオートマトンモデルの提案と、その詳細な数値計算と理論解析について報告する。モデルは、ASEPといわれる厳密に解ける確率モデルの拡張で、フェロモンの効果を取り入れるための新たな変数を導入した2変数確率モデルである。その交通の特性を表す流量密度関係図は車の場合と大きく異なり、フェロモンの効果のため渋滞相転移直前で流量が急激に増加することがシミュレーションにより明らかになった。また、平均場近似の方法とゼロレンジ過程といわれる確率モデルによる解析を組み合わせることにより、シミュレーションに極めて近い理論曲線を得ることが出来た。

1 はじめに

セルオートマトン (Cellular automaton、以降略して CA) [1] は近年様々な分野で複雑現象をシミュレーションするためのモデル化の手段になっている。例えば、反応拡散を含む化学過程や流体の複雑な流れ、都市の電波などの反射、車の高速交通や都市交通などのモデルに使われている [2]。特に車の CA モデルについてはレビュー論文 [3] が詳しい。本論文ではその発展研究として、車のモデルの基本となる確率モデルである ASEP (1次元非対称単純排除過程) [4] を応用し、蟻の交通モデルを考察する。そして車には無い特徴としてフェロモンの効果を取り入れるための新たな変数を導入した2変数確率モデルを提案したい [5]。蟻はこのフェロモンによりある意味でのお互いの遠距離相互作用を可能にしている [6]。車はあくまでも局所的相互作用のみであり、その意味様々などで新しい現象が期待できる。本論文では、蟻の CA モデルの流量密度関係図 (基本図という) を詳細に調べ、その基本図の新たな特徴をシミュレーションと理論により考察する。

2 蟻の CA モデルについて

蟻は1次元上を動くとする。蟻同士はフェロモンを用いてお互いのコミュニケーションをしているので、フェロモンのダイナミクスを蟻のダイナミクスと結合した2変数の確率 CA を考えよう。蟻は常にフェロモンを通路に残していくが、フェロモンはある時間が経過すれば自然に蒸発する。蟻はフェロモンの方向に惹きつけられるので、フェロモンがある場合と無い場合では前に進む場合の「進みやすさ」が変わると考えられる。

¹E-mail: knishi@rins.ryukoku.ac.jp

以上を加味して以下のようなモデルを考えるが、簡単のため蟻は1次元の道を1方向のみに進むとする。まず、空間をセルに分け、周期系とする。セルはラベル i ($i = 1, 2, \dots, L$) で番号付けされているとし、 L が最大セル数である。そして、蟻とフェロモン用の変数として、 S_i 、及び σ_i を用意する。 S_i は蟻がいるかないかに応じて0か1の値をとる。同様に σ_i もフェロモンがあるときは1、無いときは0という2値をとる。したがって2種類の力学的変数

$$\{S(t)\} \equiv (S_1(t), S_2(t), \dots, S_i(t), \dots, S_L(t))$$

及び

$$\{\sigma(t)\} \equiv (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_i(t), \dots, \sigma_L(t))$$

を考える。そして蟻の運動とフェロモンの状態更新を分けて以下のように2つのステージに分けてモデル化する。

ステージ1

蟻がある時刻 t にセル i にいたとする ($S_i(t) = 1$)。もしも前に蟻がいるならば ($S_{i+1}(t) = 1$)、セル i の蟻は動かない (排他原理)。そして、前に蟻がいないときは、前に進もうとするが、フェロモンの有る無しに応じて進むホップ確率 p が以下のように変わる。

$$p = \begin{cases} Q & \text{if } \sigma_{i+1}(t) = 1, \\ q & \text{if } \sigma_{i+1}(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

このように2種類の確率 q, Q を導入し、フェロモンがある方が動きやすいので一般に

$$q < Q$$

とおける。この確率で蟻を前に動かすのがステージ1である。

ステージ2

次にステージ1で蟻がいるセルはすべてフェロモンを生成する。つまり

$$\sigma_i(t+1) = 1 \quad \text{if} \quad S_i(t+1) = 1. \quad (2)$$

また、蟻がいないセルのフェロモンは確率 f で蒸発するとする。すなわち、もし $S_i(t+1) = 0$ かつ $\sigma_i(t) = 1$ ならば

$$\sigma_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{with probability } f, \\ 1 & \text{with probability } 1 - f. \end{cases} \quad (3)$$

である。

以上が蟻の確率 CA モデルである (図1)。時間発展は同期更新するものとする。ここで、蟻の総数は常に保存されるが、フェロモンの総数は保存されないことを指摘しておく。また、このモデル全体を式で表すことも可能で、それは

$$S_j(t+1) = S_j(t) + \min(\eta_{j-1}(t), S_{j-1}(t), 1 - S_j(t)) - \min(\eta_j(t), S_j(t), 1 - S_{j+1}(t)), \quad (4)$$

$$\sigma_j(t+1) = \max(S_j(t+1), \min(\sigma_j(t), \xi_j(t))), \quad (5)$$

となる。ただし、 ξ と η は確率変数であり、 ξ は確率 f で $\xi_j(t) = 0$ 、確率 $1 - f$ で $\xi_j(t) = 1$ となる。また η は確率 $p = q + (Q - q)\sigma_{j+1}(t)$ で $\eta_j(t) = 1$ になり、確率 $1 - p$ で $\eta_j(t) = 0$ になるとする。ここで、確率 p を定数にすれば、(4) は ASEP の式に一致し、さらに $p = 1$ とすればバーガースセルオートマトン [7] になることを指摘しておく。

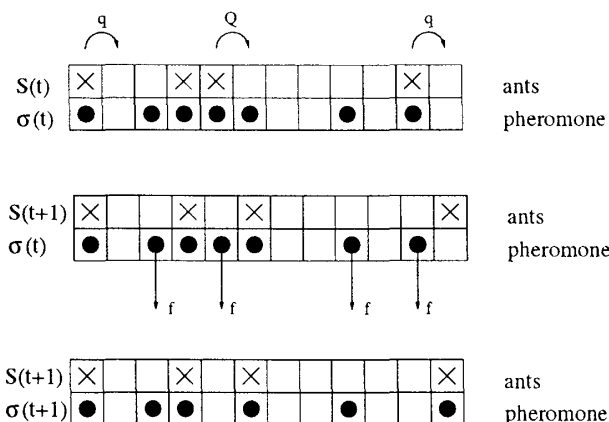


図 1: 蟻の CA モデルの 1 時間ステップ。上：時刻 t でのステージ 1 を行う前の状態。フェロモンがある場合は Q 、無い場合は q で前に進む。真ん中：ステージ 1 の直後の状態。いくつかの蟻は前に進んでいる。そして、蟻のいないセルは確率 f で次のステージでフェロモンが蒸発する。下：ステージ 2 の直後の状態。いくつかの蟻のいないセルのフェロモンが蒸発しており、かつ蟻のいるセルは全てフェロモンが生成されている。

3 シミュレーション

以上のモデルでの蟻の交通流としての特性をシミュレーションによって調べよう。そのために、流量と密度の関係を調べる。流量は、平均速度と密度の積で定義される。図 2 は流量密度図と速度密度図を描いたものである。これによると、フェロモンの効果により新しい振る舞いが見られることが分かる。それは、平均速度が密度の増加に伴ってある領域で増加している、ということである。通常は密度の増加は速度の低下をもたらすが、このモデルの場合、渋滞相転移直前でこれが逆になり密度が増加すると速度が上がるのである。それに伴って流量も急激な増加が見られる。そして、ASEP の場合は粒子ホール対称性より流量密度図は左右対称（密度 $1/2$ に関して）になっているが、フェロモンの導入によりこの対称性が崩れていることが分かる。

4 理論解析

4.1 2 クラスター近似の限界

さて、通常良く用いられるクラスター近似の方法をこのモデルに適用してみよう。蟻に関しては連続する 2 セルの相関を考慮し、さらに蟻の運動はその先のセルにフェロモンがあるかないか

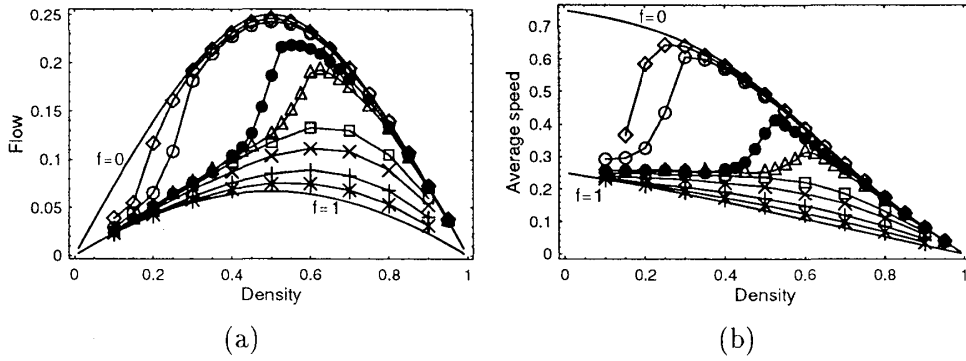


図 2: (a) 平均流量密度図、(b) 平均速度密度図のシミュレーション結果。パラメータは $Q = 0.75, q = 0.25$ に固定しており、フェロモンの蒸発確率を $f = 0.0005(\diamond)$, $0.001(o)$, $0.005(\bullet)$, $0.01(\triangle)$, $0.05(\square)$, $0.10(\times)$, $0.25(+)$, $0.50(*)$ と変えた結果をまとめて示している。また、 $f = 0$ と $f = 1$ の場合を実線で表しており、これは ASEP の場合に対応した極限になっている。

にも大きく左右されるので、先のセルのフェロモンセルとの相関も考慮する。つまり、 $(2 + 1)$ クラスタ近似を考えよう。変数は

$$P(S_{j-1}(t)S_j(t)), \quad P\left(\begin{array}{c} S_j(t) \\ \sigma_j(t) \end{array}\right), \quad (6)$$

とし、ある時刻で $S \in \{0, 1\}$ と $\sigma \in \{0, 1\}$ の配置を見出す確率を表す。すると流量 F は

$$F = P(10) \frac{qP\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) + QP\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)}. \quad (7)$$

で定義でき、確率変数に対するマスター方程式により、流量 F を求める関係式は次の 3 次方程式

$$F^2 - F + \rho(1 - \rho) \left\{ q + \frac{(Q - q)(1 - f)F}{(1 - \rho)f + (1 - f)F} \right\} = 0 \quad (8)$$

を解けばよいことが分かる [8]。結果を図示したのが図 3 である。これより、クラスタ近似は今回の蟻のモデルをうまく捉えていないことが分かる。

4.2 低密度でのクラスタ形成

前節での平均場近似が破綻した原因は、低密度領域でのクラスタ形成が考えられる。図 4 はある蟻の前にどのようなセルを見出す確率が高いかをシミュレーションより調べたものである。これによれば、蟻の前は再び蟻を見出す確率が高い、という結果が出ている。低密度でもこのような結果が出たと言うことは、低密度でもクラスタを形成していることを意味している。つまり、車の場合とは異なり、低密度でも自由流にならずクラスタを形成してダンゴ状で前に進んでいるのである。

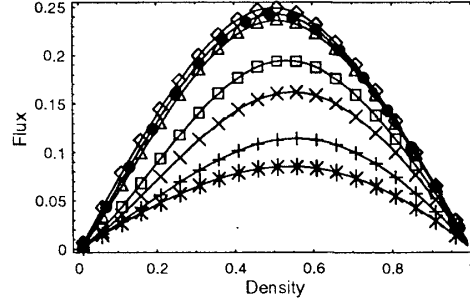


図 3: $(2+1)$ クラスター近似による理論曲線。パラメータ等は図 2 の通り。ほぼ左右対称な流量密度図になっており、図 2 の (a) とは大幅に異なりシミュレーションの特徴を表現できていないことが分かる。

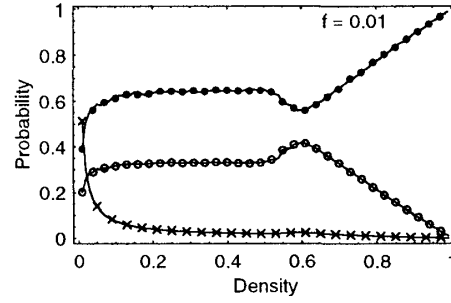


図 4: 蟻の前のセルがどのようなセルかを表す確率。蟻の前のセルが蟻である確率 (●), フェロモンのみである確率 (○) および何も無い確率 (×) を色々な密度で表す。この 3 つの和は 1 になっている。パラメータは図 2 と同じで、蒸発確率は $f = 0.01$ としている。

4.3 ゼロレンジ過程

以上の研究により、蟻のモデルではあらゆる密度でクラスター形成が本質的であり空間的に一様な平均場近似は破綻することが明らかになった。これを克服するために次にゼロレンジ過程と言われる確率過程を用いて解析を進めよう [9]。これは、前にホップする確率がギャップサイズに関係して決まる、というモデルである。フェロモンの蒸発現象により、ギャップサイズでホップの確率が決まるのはこのモデルに大変合っていると考えられる。まず、ギャップサイズが x となる確率を $p(x)$ 、このときのホップ確率を $u(x)$ とおくと、平均速度は

$$v = \sum_{x=1}^{L-M} u(x)p(x) \quad (9)$$

となる。ただし、 L はシステムサイズ、 M は蟻の総数で、系の密度は M/L となる。そして、今回のモデルの場合、

$$u(x) = q + (Q - q)g(x), \quad (10)$$

$$p(x) = h(x) \frac{Z(L-x-1, M-1)}{Z(L, M)}. \quad (11)$$

と書くことが出来る。ただし、簡単のため $g(x) = (1 - f)^{x/q}$ とする。また、

$$h(x) = \begin{cases} 1 - u(1) & \text{for } x = 0 \\ \frac{1 - u(1)}{1 - u(x)} \prod_{y=1}^x \frac{1 - u(y)}{u(y)} & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

と書くことが出来る [9]。そして、分配関数 Z は次の漸化式より決定することができる。

$$Z(L, M) = \sum_{x=0}^{L-M} Z(L - x - 1, M - 1) h(x), \quad (13)$$

ただし、境界条件は $Z(x, 1) = h(x - 1)$ と $Z(x, x) = h(0)$ で与えられる。以上の結果を用いれば流量密度図を描くことが出来る。図 5 が理論曲線とシミュレーション結果の比較である。理論曲線は非対称の流量密度図をきちんと再現し、システムサイズを大きくとればシミュレーション結果に一致することを示唆している。

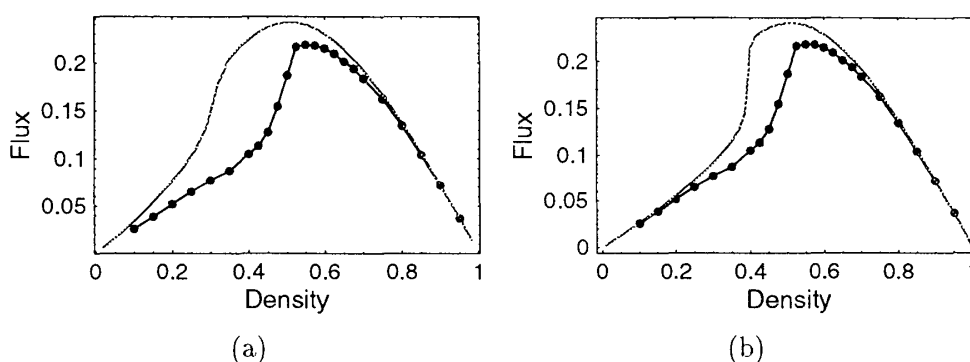


図 5: ゼロレンジ過程による理論曲線。パラメータは図 2 と同じで、蒸発確率は $f = 0.005$ 。システムサイズは (a) $L = 100$ 、(b) $L = 200$ 。サイズが大きくなるとシミュレーションに漸近していくことが分かる。

5 流量増加のメカニズム

周期系で考えると、流量の増加はモデルからの自然な帰結であることが分かる。まず、低密度にもかかわらず蟻はクラスター化してダンゴ状態で動いてゆく。この際、クラスター内部の蟻はホップ確率 Q で動くが、先頭の蟻は、前にあるセルは空である確率が高いので q で動く。それは、クラスターはシステムサイズに比べて小さいので、クラスターの外のフェロモンは蒸発していると考えられるからである。次に密度の増加はクラスターサイズの増加をもたらす。これにより新しい特徴が現れる。それは、クラスターの最後の蟻が落としたフェロモンをクラスターの先頭の蟻が蒸発する前に見つけることが出来るようになる、ということである。したがって、先頭の蟻がクラスターの速度を決めていたわけであるが、その速度が q から Q に急激に上がってゆく。これが密度上昇による平均速度上昇の原因である。そしてクラスターがシステム全体を覆うと再び蟻同士の排除効果により通常的車と同じ渋滞が発生する。以上のように低密度側でフェロモンの効果により車とは異なる渋滞が見られるのがこの蟻のモデルの特徴である。

謝辞

本研究はケルン理論物理学研究所（ドイツ）の A. Schadschneider 教授とインド工科大学（インド）の D. Chowdhury 教授との共同研究の成果の一部です。また、科学研究費補助金（若手研究 B）と龍谷大学国外研究員制度による奨学金に感謝します。

参考文献

- [1] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, 1986); *Cellular Automata and Complexity* (Addison-Wesley, 1994).
- [2] B. Chopard and M. Droz, *Cellular Automata Modelling of Physical Systems* (Cambridge University Press, 1998).
- [3] D. Chowdhury, L. Santen and A. Schadschneider, Phys. Rep. **329**, 199 (2000); A. Schadschneider, Physica A **313**, 153 (2002).
- [4] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, J. Phys. A:Math. Gen. **26**, p.1493 (1993).
- [5] D. Chowdhury, V. Guttal, K. Nishinari and A. Schadschneider, J. Phys. A:Math. Gen. **35**, L573 (2002).
- [6] E.O. Wilson, *The insect societies* (Belknap, Cambridge, USA, 1971); B. Hölldobler and E.O. Wilson, *The ants* (Belknap, Cambridge, USA, 1990).
- [7] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A:Math. Gen., **31**, p.5439 (1998).
- [8] Nishinari, K., D. Chowdhury and A. Schadschneider, Phys. Rev. E **67**, p.036120 (2003).
- [9] M. R. Evans, J. Phys. A:Math. Gen. **30**, p.5669 (1997).