

General hyperplane section of log canonical threefolds in positive characteristic

佐藤 謙太

概要

X が標数 5 以上の代数閉体上定められた 3 次元射影多様体である時、もし X が lc 特異点 (resp. klt 特異点) しか持たないならば一般の超平面切断も同様であるという、[6] の結果の概略を紹介する。

1 Bertini 型の定理

まず本稿で扱う特異点のクラスである klt 特異点および lc 特異点の定義を復習する。 k を体とし、 X を k 上の正規多様体とする。更に、 X は $\mathbb{Q}$ -Gorenstein、つまり、標準因子 K_X が $\mathbb{Q}$ -Cartier であると仮定する。 $f : Y \rightarrow X$ を正規多様体 Y からの固有双有理射とした時、 Y 上の $\mathbb{Q}$ -Weil 因子 $K_{Y/X}$ が

$$K_{Y/X} := K_Y - f^* K_X$$

により定まる。ただし、 Y 上の標準因子 K_Y は、 f が同型な部分では K_X と一致するように選んでおく。

定義 1.1. 体 k 上の $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規多様体 X について、任意の正規多様体 Y からの固有双有理射 $f : Y \rightarrow X$ に対し、 $K_{Y/X}$ の係数が全て -1 より大きい (resp. -1 以上) の時、 X は高々 **klt 特異点** (resp. **lc 特異点**) しか持たないと言う。

Remark 1.2. X を体 k 上の $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規多様体とし、 $f : Y \rightarrow X$ を対数的特異点解消とする。すなわち、 Y は正則で、固有双有理射 f の例外集合は正規交差因子であるとする。この時、 $K_{Y/X}$ のすべての係数が -1 より大きい (resp. -1 以上) であることと、 X が klt (resp. lc) であることは同値である。 ([3, Corollary 2.31]). 特に、 X が 2 次元の時や、 X が 3 次元で k が代数閉体の場合にはいつでも対数的特異点解消が存在するので、 klt や lc か否かは 1 つの Y で確認できる。

上の注意の特別な場合として、 X 自身が非特異ならば klt であり、また定義から klt ならば lc である。これらの特異点のクラスは、極小モデル理論において自然に現れるクラスであり、また標数 0 においては多くの良い性質を満たすことが知られている。そのような良い性質の一つが、Bertini 型の定理である：

定理 1.3 ([5]). $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ を $\mathbb{C}$ 上の射影多様体とする。もし X が klt (resp. lc) であるならば、一般の超平面 $H \subseteq \mathbb{P}_k^N$ による超平面切断 $X \cap H$ も再び klt (resp. lc) である。

証明は、対数的特異点解消 $f: Y \rightarrow X$ をとってから、 $f^*\mathcal{O}_X(1)$ に関する (基底点自由な線形系に関する) Bertini の定理を使えばすぐにわかる。本稿の一つ目の主結果は、この結果の 3 次元における正標数化である。

定理 A ([6]). k を標数 5 以上の代数閉体とし、 $X \subseteq \mathbb{P}_k^N$ を k 上の 3 次元射影多様体とする。もし X が *klt* (*resp.* *lc*) 特異点しか持たないのならば、一般の超平面 $H \subseteq \mathbb{P}_k^N$ による超平面切断 $X \cap H$ もそうである。

標数 7 以上で *klt* の場合には先行研究 [7] で既に示していたが、*lc* の場合には [7] の手法は使えなかった。また正標数においては、基底点自由な線形系に関する Bertini は使えないので、Reid の手法は使えない。そこで注目するのは、以下の平坦族 $\pi: \mathcal{H} \rightarrow T$ である。

補題 1.4. $X \subseteq \mathbb{P}_k^N$ を代数閉体 k 上の正規射影多様体とする。

(1) $T := \mathbb{P}_k^N$ と X の直積 $X \times_k T$ の有効 Cartier 因子 $\mathcal{H}$ であって、写像

$$T(k) \rightarrow |\mathcal{O}_X(1)|; t \mapsto \mathcal{H}_t$$

が *well-defined* かつ全単射となるようなものがある。

(2) X が *klt* (*resp.* *lc*) ならば、 $\mathcal{H}$ の生成ファイバー $\mathcal{H}_\eta$ もそうである。

(3) もしも幾何学的生成ファイバー

$$\mathcal{H}_\eta = \mathcal{H}_\eta \times_{K(T)} \text{Spec}(\overline{K(T)})$$

が *klt* (*resp.* *lc*) であるならば、一般の閉ファイバー $\mathcal{H}_t$ もそうである。

今、 $H := \mathcal{H}_\eta$ は体 $K(T)$ 上の射影的 2 次元多様体であることに注意すると、定理 A は上の補題 1.4 と次の定理 B から従う。

定理 B. H が体 K 上の 2 次元正規多様体とし、 $x \in H$ を閉点とする。更に、以下を仮定する。

- (1) K の標数は 5 以上。
- (2) $H \setminus \{x\}$ は K 上滑らか。
- (3) 剰余体 $\kappa(x)$ は K 上分離的。
- (4) H は *klt* (*resp.* *lc*) 特異点しか持たない。

この時、 $H \times_K \overline{K}$ は *klt* (*resp.* *lc*) 特異点しか持たない。

2 章において、定理 B の仮定のうち、標数に関する仮定が必要であることを見る。つまり、標数 3 において *klt* だが幾何学的 *klt* でない例を紹介する。その後 3 章で証明の概略を述べる。

2 標数3での反例

この章では、定理 B が標数 3 では不成立であることを観察する。まず双対グラフについて復習する。本稿において、**グラフ** は $\mathbb{Z}^3$ の元を重みとして持つ無向多重辺グラフのこととする。

($x \in X$) を 2 次元正規特異点とし、 $f: Y \rightarrow X$ を極小特異点解消とする。すなわち、 f は x の外で同型な固有双有理射で、 Y は正則で K_Y が X 上 nef であるようなものである。[2, Theorem 2.25] からこのような特異点解消は存在する。(一意性も代数閉体上の時と同様に考えたらわかる。) $\text{Exc}(f) = \sum_{i=1}^n E_i$ を例外集合とする。各 E_i は、 X の x での剰余体 $\kappa(x)$ 上の 1 次元射影多様体である。特に、3 つの整数

- $r_i := \dim_{\kappa(x)} H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i})$.
- $g_i := \frac{\dim_{\kappa(x)} H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i})}{\dim_{\kappa(x)} H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i})}$.
- $a_i := (E_i^2) = \deg_{E_i/\text{Spec}(\kappa(x))}(\mathcal{O}_Y(E_i)|_{E_i})$.

が定まる。(deg の定義は例えば [1, Definition 1.4] 参照)

定義 2.1. 上述の記号を用いる。($x \in X$) の**双対グラフ** とは、頂点集合を $\{E_1, \dots, E_n\}$ とし、各 E_i と E_j の間の辺の個数が $(E_i \cdot E_j) \in \mathbb{N}$ であるようなグラフであり、各頂点 E_i には、重み $(r_i, g_i, a_i) \in \mathbb{Z}^3$ が乗っているようなものである。

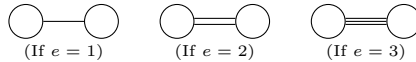
記法. 本稿において、2 次元正規特異点 ($x \in X$) の双対グラフは以下の方法で記述する:

- 各 i に対し、例外曲線 E_i に対応する頂点を円 $\bigcirc$ で書く。
- i 番目の円の中に $a_i = (E_i^2)$ を、円の下に g_i を、円の上に r_i を書く。

$$\begin{array}{c} r_i \\ \bigcirc \\ a_i \\ g_i \end{array}$$

ただし、 $g_i = 0$ (resp. $r_i = 1$, $a_i = -2r_i$) の時には、 g_i (resp. r_i, a_i) は書かずに省略する。

- 各 $i \neq j$ について、頂点 E_i と E_j の間に $e := (E_i \cdot E_j)$ 本の辺を引く。



e が 4 以上の時や、 e が具体的な数字でない時には $\bigcirc \overset{(e)}{\text{---}} \bigcirc$ のようにも略記する。

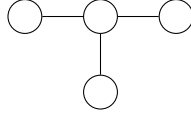
例 2.2. k を体とする。ただし、 k の標数が 3 でない時は、1 の原始 3 乗根 $\sqrt[3]{1}$ は k に含まれていると仮定しておく。また、(あまり本質的ではないが) 簡単の為標数は 2 でないとしておく。 k の非ゼロ元 $a \in k$ を固定し、代数多様体

$$X_{k,a} := \text{Spec}(k[x, y, z]/(z^2 + x^3 + ay^3 - y^7))$$

を考える．ヤコビアンを考えることで， $X_{k,a}$ は正規 2 次元多様体で，原点を除いて k 上滑らかであることがわかる．以下， $X_{k,a}$ の原点での特異点の様子 (klt かどうか)，双対グラフ及び極小特異点解消の構成方法を場合分けしながら観察する．

Case.1: k の標数が 3 でなく，かつ $\sqrt[3]{a} \in k$ の時．

Hensel の補題を用いると $k[[y]]$ 内に， $a - y^4$ の 3 乗根が存在する．したがって， $X_{k,a}$ の原点での局所環を完備化して適切に変数変換することで， $X_{k,a}$ の dual graph は $k[x, y, z]/(z^2 + x^3 + y^3)$ のそれと等しいことがわかる．よく知られたように，これは D_4 型の du Val 特異点 (特に klt) であり，その双対グラフは下記のようなになる．



実際に $X_{k,a}$ の極小特異点解消を具体的に計算すると以下のようなになる：まず $X_{k,a}$ を原点で blow-up したものを

$$f_{k,a} : Y_{k,a} \longrightarrow X_{k,a}$$

と書くと，例外集合は $\mathbb{P}_k^1$ に同型で， $Y_{k,a}$ は 3 つの k 有理点を特異点として持つ． $Y_{k,a}$ をその 3 点で blow-up したものを

$$g_{k,a} : Z_{k,a} \longrightarrow Y_{k,a}$$

と書くと， $Z_{k,a}$ が $X_{k,a}$ の特異点解消を与えており， $Z_{k,a} \longrightarrow X_{k,a}$ の例外集合は 4 本の $\mathbb{P}_k^1$ であり，これらが上述の双対グラフの頂点をなす．

Case.2: k の標数が 3 であり，かつ $\sqrt[3]{a} \in k$ の時．

$x^3 + ay^3 = (x + y\sqrt[3]{a})^3$ なので，適切に変数変換して

$$X_{k,a} \cong k[x, y, z]/(z^2 + x^3 + y^7)$$

である．これは，Case.1 と比較して悪い特異点になっているように見える．

具体的に $X_{k,a}$ の極小特異点解消を求めてみよう．まず $X_{k,a}$ を原点で blow-up したものを

$$f_{k,a} : Y_{k,a} \longrightarrow X_{k,a}$$

と書くと，例外集合 E は $\mathbb{P}_k^1$ に同型で， $Y_{k,a}$ は 1 つの k 有理点を特異点として持つ． $Y_{k,a}$ をその点で blow-up したものを

$$h_{k,a} : W_{k,a} \longrightarrow Y_{k,a}$$

と書くと， $W_{k,a}$ は正則である．しかし， $E \subseteq Y_{k,a}$ の厳密変換 $\tilde{E} \subseteq W_{k,a}$ は自己交点数 -1 で種数 0 の曲線である為， $W_{k,a}$ は極小特異点解消でない．(代数閉体上の場合と同じく) $\tilde{E}$ を収縮する射 $W_{k,a} \longrightarrow V_{k,a}$ が存在する ([2, Theorem 10.5]).

$$\begin{array}{ccccc} W_{k,a} & \xrightarrow{h_{k,a}} & Y_{k,a} & \xrightarrow{f_{k,a}} & X_{k,a} \\ & \searrow & & \nearrow p_{k,a} & \\ & & V_{k,a} & & \end{array}$$

こうして得られる $p_{k,a} : V_{k,a} \rightarrow X_{k,a}$ が極小特異点解消である. ($p_{k,a}$ は, $X_{k,a}$ を原点で重み $(1, 2, 3)$ の blow-up をしたものである). また, $p_{k,a}$ の例外集合は cusp 特異点を 1 つだけ持つ有理曲線 F であり, その双対グラフは

$$\begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ g=1 \end{array}$$

となる. 最後に, $K_{V/X} = -F$ であることがわかり, 係数が -1 なので $X_{k,a}$ は klt でないことがわかる. F が cusp 特異点を持つことから, より強く $X_{k,a}$ は lc でないこともわかる. ($V_{k,a}$ をあと 3 回 blow-up すると $X_{k,a}$ の対数的特異点解消が得られるが, 最後の blow-up で現れる例外因子での相対標準因子の係数が -2 である.)

Case.3: $\sqrt[3]{a} \notin k$ の時.

$X_{k,a}$ の原点 blow-up を

$$f_{k,a} : Y_{k,a} \rightarrow X_{k,a}$$

と書くと, 例外集合は $\mathbb{P}_k^1$ に同型で, $Y_{k,a}$ は 1 つの ℓ -有理点を特異点として持つ. ここで, $\ell := k(\sqrt[3]{a})$ は k の 3 次拡大である. $Y_{k,a}$ をその点で blow-up したものを

$$q_{k,a} : Q_{k,a} \rightarrow Y_{k,a}$$

と書くと, $Q_{k,a}$ は正則で, $Q_{k,a} \rightarrow X_{k,a}$ の例外集合は 1 本の $\mathbb{P}_k^1$ と 1 本の $\mathbb{P}_\ell^1$ である. 更に, 交点数の情報も含めた dual graph は以下ようになる:

$$\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \textcircled{\quad} \text{---} \textcircled{*} \end{array}$$

k の標数が 3 でない時には, この双対グラフを「展開」したものが Case.1 の双対グラフに一致していることがわかる. これは, 次の図式が Cartesian であることに対応している:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{k,a} & \xrightarrow{q_{k,a}} & Y_{k,a} & \xrightarrow{f_{k,a}} & X_{k,a} & \longrightarrow & \text{Spec } k \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Z_{\ell,a} & \xrightarrow{g_{\ell,a}} & Y_{\ell,a} & \xrightarrow{f_{\ell,a}} & X_{\ell,a} & \longrightarrow & \text{Spec } \ell \end{array}$$

一方, 標数が 3 の場合には, Case.2 の双対グラフと Case.3 の双対グラフには何の関係もない. 実際, $q_{k,a}$ の $\text{Spec}(\ell)$ への base change

$$Q_{k,a} \times_k \text{Spec}(\ell) \rightarrow Y_{k,a} \times_k \text{Spec}(\ell) \cong Y_{\ell,a}$$

は, $Y_{\ell,a}$ の non-reduced ideal での blow-up となっており, Case.2 で現れた $W_{\ell,a}$ とは何の関係もないことがわかる. また, $K_{Q/X} = 0$ であることが計算によりわかるので, 注意 1.2 から $X_{k,a}$ が klt であることが従う. 以上をまとめると, 次のようになる.

	$\sqrt[3]{a} \notin k$	$\sqrt[3]{a} \in k$
$p \neq 3$	klt	klt
$p = 3$	klt	non-klt

特に、標数が3で $\sqrt[3]{a} \notin k$ の場合は、 $X_{k,a}$ が klt だが k 上幾何学的 klt でない。

3 定理 B の証明の概略

以下の補題は注意 1.2 からすぐ従う。

補題 3.1. X を体 K 上の多様体とし、 $f : Y \rightarrow X$ を対数的特異点解消とする。つまり、 f は固有双有理射で、 Y は正則でかつ、例外集合 $\text{Exc}(f)$ は正規交差因子である。更に強く、次を仮定する。

- (1) Y は K 上滑らか。
- (2) $\text{Exc}(f)$ は K 上相対的に正規交差、すなわち、 $\text{Exc}(f)$ の任意の *stratum* は K 上滑らか。

この時、もし X が klt (*resp.* lc) ならば、 X は K 上幾何学的 klt (*resp.* 幾何学的 lc)。

例 3.2. 例 2.2 において、標数が3で $\sqrt[3]{a} \notin k$ の時の極小特異点解消

$$Q_{k,a} \rightarrow X_{k,a}$$

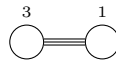
を考える。例外曲線のうち一つは $\mathbb{P}_\ell^1$ であるが、 $\ell = k(\sqrt[3]{a})$ は k 上非分離的なので、 $\mathbb{P}_\ell^1$ は k 上滑らかでない。従って、補題 3.1 の条件を満たさない。

一方、 k の標数が3でない場合には、2つの例外曲線 $\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_\ell^1$ はいずれも k 上滑らかであり、そのスキーム論的交点 $\text{Spec}(\ell)$ も k 上滑らかなので、 $Q_{k,a} \rightarrow X_{k,a}$ は補題 3.1 の条件を満たす。

定理 C. X が定理 B の仮定を満たすとする。この時、補題 3.1 の条件を満たす対数的特異点解消が存在する。

定理 B は定理 C と補題 3.1 から従う。最後に、定理 C の証明の概略を記述する。

Sketch. **Case.1:** $(x \in X)$ が有理特異点の時。[2, Subsection 3.3] より、 $(x \in X)$ の双対グラフは、次ページ以降の図 1,2,3 のいずれかになる。例えば、双対グラフが



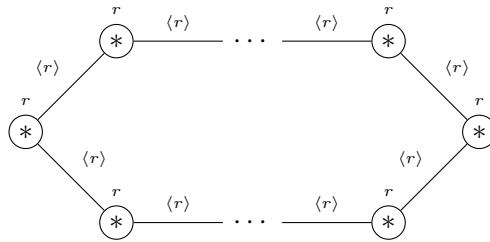
であるときには、例外曲線は E_1, E_2 の2本であり、いずれも種数は0、更に $H^0(\mathcal{O}_{E_1}) = \kappa(x)$ であり、 $L := H^0(\mathcal{O}_{E_2})$ は $\kappa(x)$ 上3次拡大である。今、 E_1 は degree が奇数の因子 $E_2|_{E_1}$ を持つ種数0の Gorenstein curve であるので、 $E_1 \cong \mathbb{P}_{\kappa(x)}^1$ であり ([2, Lemma10.6]), 特に K 上滑らか。同様に、 $E_2 \cong \mathbb{P}_L^1$ も L 上滑らかであるが、 $\kappa(x)$ の標数は3でない為、 L は $\kappa(x)$ 上分離的である。従って、 E_2 も K 上滑らかである。

最後に, 再び双対グラフから $E_1 \cap E_2$ は $\text{Spec}(K)$ と同型であり, 特に K 上滑らかである.

他の双対グラフの場合もほぼ同様の方針で証明できる. (グラフの分類より, 出てくる例外因子が全て種数 0 であることと, 出てくる体の拡大も高々 4 次拡大までであることがポイントである.)

Case.2: $(x \in X)$ が simple elliptic の時. つまり, 極小特異点解消 $f: Y \rightarrow X$ における例外集合 E は既約, $H^0(E) = \kappa(x)$ で種数が 1 の時を考える. E が正則の時には, [8, Proposition 9.11 (2)] より, E が K 上滑らかであることがわかる. E が特異点を持つときには, E の特異点は 1 つの k 有理点のみからなり, 更にその点において E は高々 node であることがわかる ([6, Corollary 3.8, Proposition 3.2]). 特に, その点で更に Y を blow-up することで, 補題 3.1 の条件を満たす対数的特異点解消を得る.

Case.3: 残りの場合. 3 ページ後の図 4 に描かれた 4 種類のうち, simple elliptic を除いた 3 種類が残りの場合である. このうち, 双対グラフが



の場合のみをここでは考える. $L := H^0(\mathcal{O}_{E_1})$ とおくと, Case.1 と同様にすると, 全ての例外曲線は $\mathbb{P}_L^1$ と同型で, 更に隣り合う例外曲線同士の交わりは $\text{Spec } L$ と同型である. 従って, L が $\kappa(x)$ 上分離であることを示せばよい. Case.1 と違って拡大次数 $[L : \kappa(x)]$ が標数と互いに素かどうかわからないので, もう少し精密に調べる必要がある.

今, 例外曲線を順に $E_1, E_2, \dots, E_n$ とおき, $E_i \cap E_{i+1} = \{P_i\}$ とおく. (ただし, E_{n+1} は E_1 のこととする. すなわち, $E_n \cap E_1 = \{P_n\}$.) この時, 次のような体の同型写像の列が得られる:

$$H^0(\mathcal{O}_{E_1}) \xrightarrow{\sim} \kappa(P_1) \xleftarrow{\sim} H^0(\mathcal{O}_{E_2}) \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} H^0(\mathcal{O}_{E_n}) \xrightarrow{\sim} \kappa(P_n) \xleftarrow{\sim} H^0(\mathcal{O}_{E_1}).$$

これにより, 体同型写像

$$\sigma: L = H^0(\mathcal{O}_{E_1}) \xrightarrow{\sim} L$$

を得るが, 実は $\kappa(x)$ は L の σ による不変部分体になることがわかる. 従って, L は K 上分離的である.

□

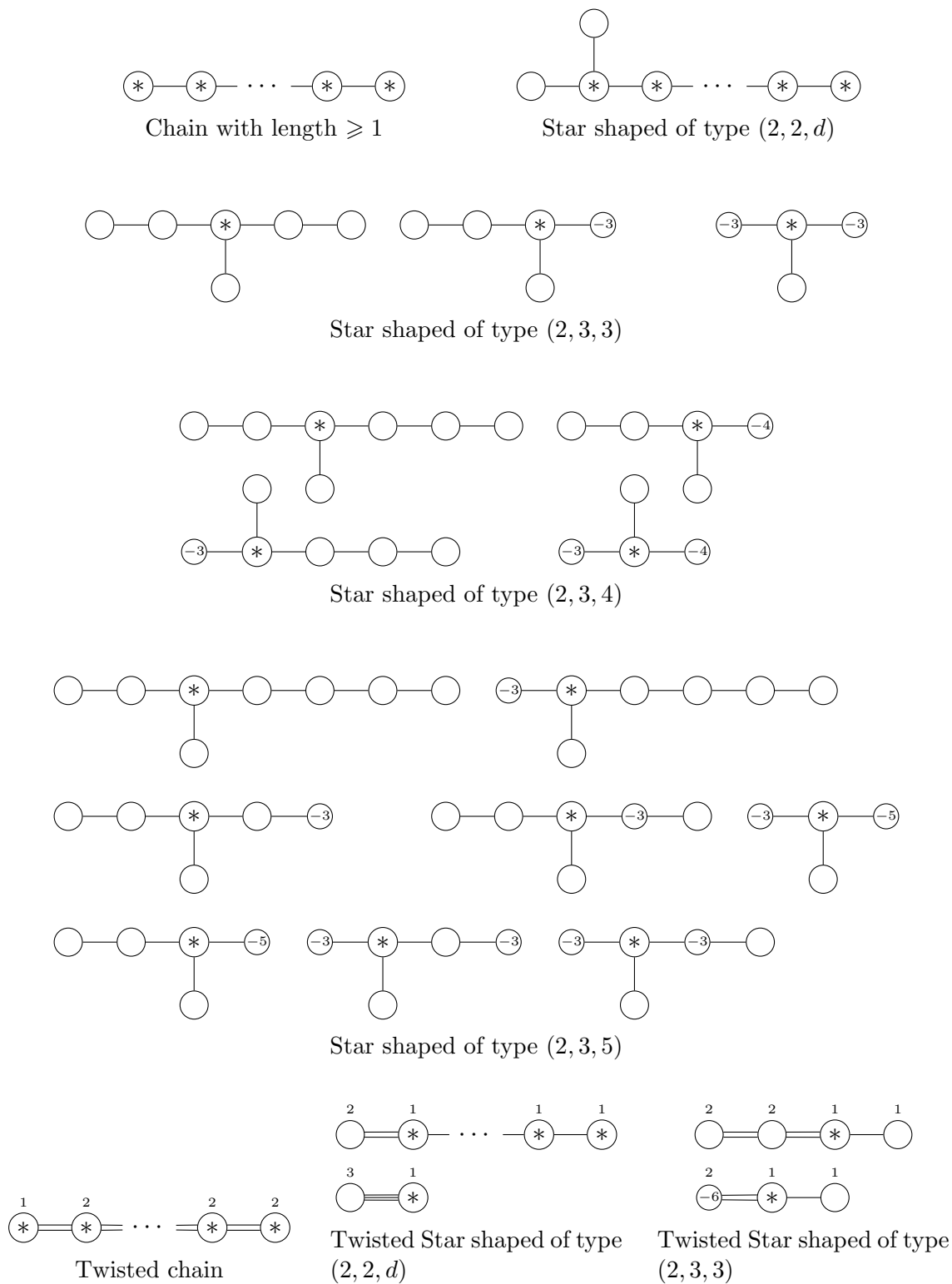
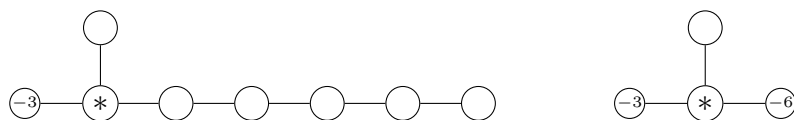
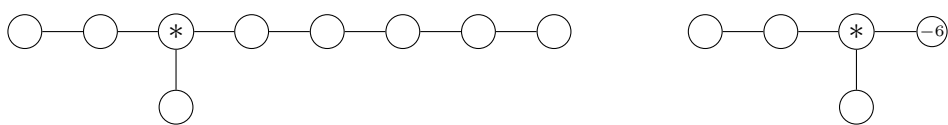
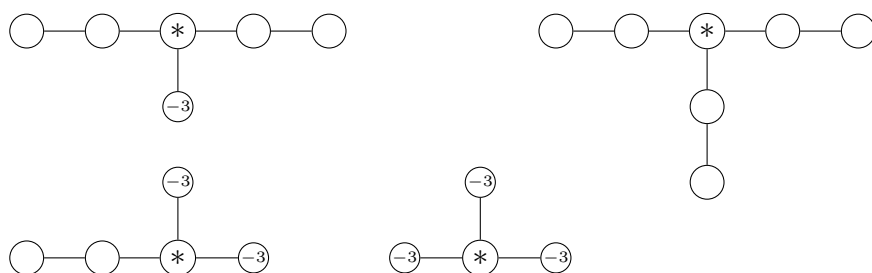


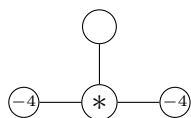
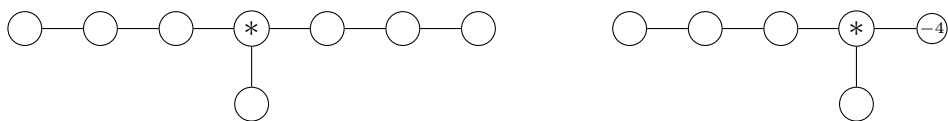
Figure 1: List of dual graphs of numerical klt singularities



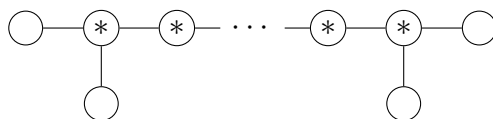
Star shaped of type $(2, 3, 6)$



Star shaped of type $(3, 3, 3)$

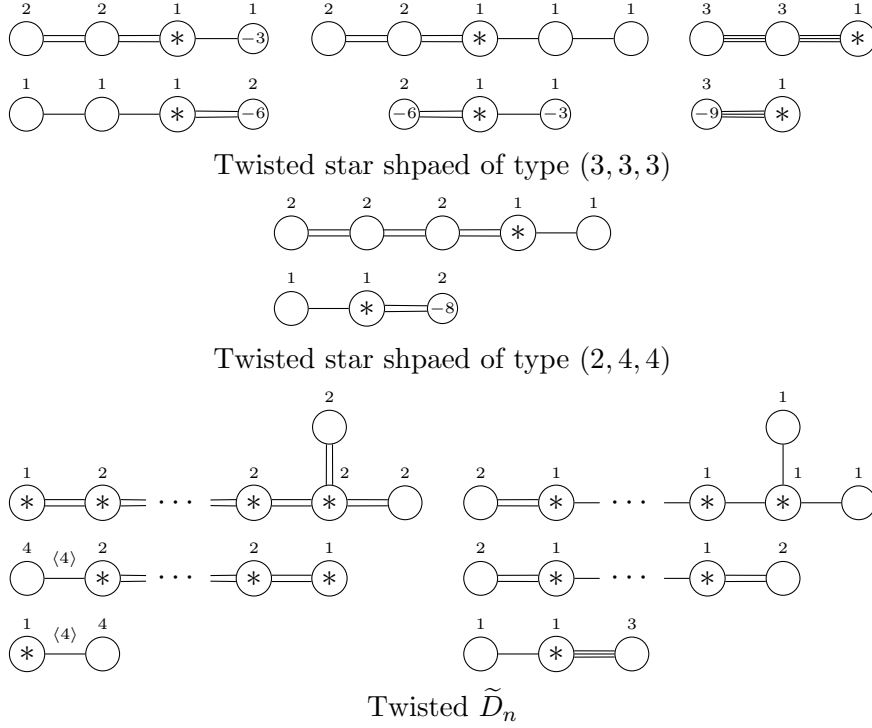


Star shaped of type $(2, 4, 4)$

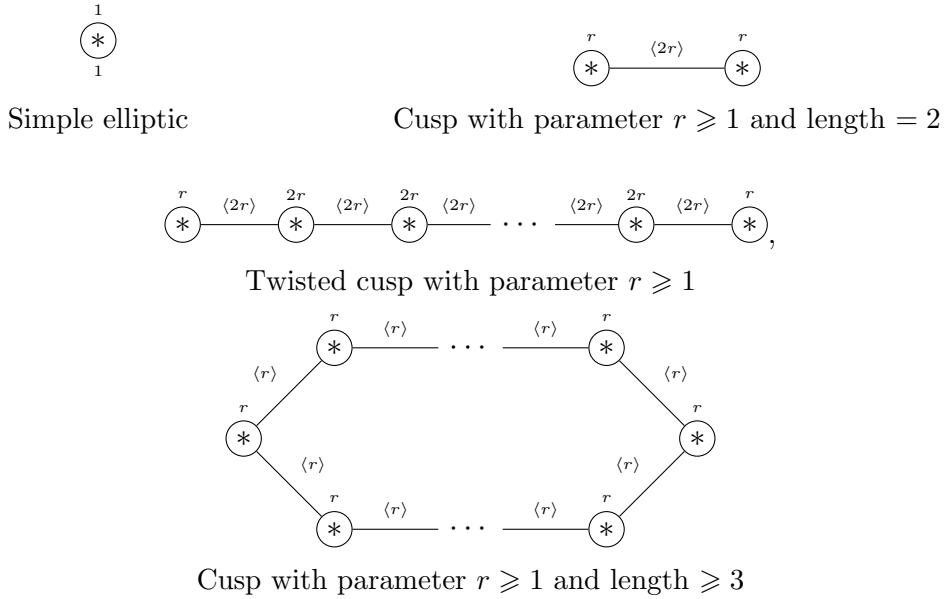


$\tilde{D}_n$ with $n \geq 4$

图 2: List of non-twisted dual graphs of rational numerical log canonical singularities



☒ 3: List of twisted dual graphs of rational numerical log canonical singularities



☒ 4: List of dual graphs of non-rational numerical log canonical singularities

参考文献

- [1] W. Fulton, *Intersection theory*, Vol. 2. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] J. Kollár, *Singularities of the minimal model program* **200**, Cambridge University Press, 2013.
- [3] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [4] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry II*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [5] M. Reid, Canonical 3-folds, in: A. Beauville (Ed.), *Journées de géométrie algébrique d'Angers 1979*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen, 1980, pp. 273–310.
- [6] K. Sato, General hyperplane sections of log canonical threefolds in positive characteristic, *arXiv:2303.14599*, preprint (2023).
- [7] K. Sato, and S. Takagi. General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic, *J. Inst. Math. Jussieu* **19** (2020), no. 2, 647–661.
- [8] H. Tanaka, Invariants of algebraic varieties over imperfect fields, *Tohoku Math. J. (2)* **73** (2021), no. 4, 471–538.