

ラプラス近似とその応用

広島大学理学研究科 若木 宏文

Hirofumi Wakaki

Graduate School of Science, Hiroshima University

1 はじめに

母集団分布が連続型であり、その分布関数が $F(x)$ であるとする。この母集団からの標本数 n の標本の第 k 順序統計量を $X_{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とする。このとき U を自由度 $k, n - k + 1$ のベータ分布に従う確率変数とすると

$$\begin{aligned} P(X_{(k)} \leq x) &= P(U \leq F(x)) = \frac{1}{B(k, n - k + 1)} \int_0^{F(x)} u^{k-1} (1 - u)^{n-k} du \\ &= \frac{1}{B(k, n - k + 1)} \int_0^{F(x)} e^{Mb(u)} du \end{aligned} \quad (1.1)$$

と表される。ここで、 $B(x, y)$ はベータ関数、 $M = n - 1$ 、 $b(u) = r \log u + (1 - r) \log(1 - u)$ 、 $r = (k - 1)/M$ である。

$0 < \alpha < 1$ に対して、 $k = [n\alpha]$ 、すなわち $k \leq n\alpha < k + 1$ となる整数とすると、 $X_{([n\alpha])}$ を標本分位点と呼ぶ。 $X_{([n\alpha])}$ は母集団分布の $100\alpha\%$ 点、 $F^{-1}(\alpha)$ の推定量として用いられるが、(1.1) の積分にラプラス近似を適用することにより、標本分位点の一致性や漸近正規性を示すことができる。RIMS 研究集会では、複数の順序統計量の同時分布の極限分布を導出し、それを用いた $F^{-1}(\alpha)$ の信頼区間などを紹介したが、本稿ではその基となる、(1.1) のラプラス近似について詳しく説明する。

2 ラプラス近似

2.1 ラプラス近似とは

ラプラス近似は、積分

$$I = \int_a^b e^{Mf(x)} g(x) dx$$

の M が大きいときの近似方法である。 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ の内点 c で最大になるならば c の近傍で

$$f(x) \approx f(c) + \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2$$

であるから

$$I \approx e^{Mf(c)} \int_a^b \exp\left\{\frac{1}{2} M f''(c)(x - c)^2\right\} g(x) dx$$

と近似できる. $f''(c) \leq 0$ であるが, $f''(c) < 0$ ならば $y = \sqrt{-Mf''(c)}(x - c)$ と変数変換することにより

$$\begin{aligned} & \int_a^b \exp\left\{\frac{1}{2}Mf''(c)(x - c)^2\right\}g(x)dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}} \int_{c-\sqrt{-Mf''(c)}(b-a)}^{c+\sqrt{-Mf''(c)}(b-a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} g\left(c + \frac{y}{\sqrt{-Mf''(c)}}\right) dy \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} g\left(c + \frac{y}{\sqrt{-Mf''(c)}}\right) dy \end{aligned}$$

と近似できる. 従って, Y を標準正規分布に従う確率変数とすると

$$I \approx \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}} \mathbb{E}\left[g\left(c + \frac{Y}{\sqrt{-Mf''(c)}}\right)\right]$$

と近似できる. g が点 c の近傍で C^1 -級なら, さらに

$$I \approx \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-Mf''(c)}} g(c)$$

が得られる.

2.2 近似誤差の評価

区間 $[a, b]$ の定義関数

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [a, b]) \\ 0 & (x \notin [a, b]) \end{cases}$$

を用いると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Mf(x)} g(x) 1_{[a,b]}(x) dx$$

であるから, 以下では, 一般性を失うことなく

$$I_M(g; f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Mf(x)} g(x) dx$$

の近似を扱う.

関数 f, g について以下を仮定する.

$$\text{A1. } \exists m, M \geq m \Rightarrow I_M(|g|; f) < \infty$$

$$\text{A2. } f(x) \text{ は } x = c \text{ で最大値をとり, 任意の } d > 0 \text{ に対して}$$

$$f_d := \sup\{f(x); |c - x| \geq d\} < f(c)$$

A3. f は c のある近傍 U_c で C^s -級である. ただし, $s \geq 3$.

C^s -級関数 h の $\ell - 1$ ($1 \leq \ell \leq s$) 次までのテーラー展開を

$$h(x+c) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{h^{(k)}(c)}{k!} x^k + x^\ell r_\ell(x; h, c)$$

と表し,

$$R_\ell(d, h, c) = \max\{r_\ell(x; h, c); -d \leq x \leq d\}$$

とすると

$$\lim_{x \rightarrow 0} r_\ell(x; h, c) = \frac{h^{(\ell)}(c)}{\ell!}, \quad \lim_{d \rightarrow 0} R_\ell(d, g, c) = \frac{|h^{(\ell)}(c)|}{\ell!}$$

である.

$(d-c, d+c) \subset U_c$ とすると

$$\begin{aligned} & \int_{c-d}^{c+d} e^{Mf(x)} g(x) dx \\ &= \int_{c-d}^{c+d} \exp \left[M \left\{ f(c) + \frac{f''(c)}{2} (c-x)^2 + (x-c)^3 r_3(x-c; f, c) \right\} \right] g(x) dx \\ &= \frac{e^{Mf(c)}}{M^{1/2}\sigma} \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} e^{-y^2/2} g \left(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma} \right) \left[1 + \frac{1}{M^{1/2}} \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right) \right. \\ & \quad \left. \times r_1 \left[\frac{1}{M^{1/2}} \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right); \exp, 0 \right] \right] dy \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$= \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} \phi(y) g \left(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma} \right) dy + \text{Rem}_1 \right\} \quad (2.2)$$

と表される. ここで, $\sigma = \{-f''(c)\}^{1/2}$ (A2 より $f''(c) < 0$), $\phi(y)$ は標準正規分布の確率密度関数,

$$\begin{aligned} \text{Rem}_1 &= \frac{1}{M^{1/2}} \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} \phi(y) g \left(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma} \right) \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right) \\ & \quad \times r_1 \left[\frac{1}{M^{1/2}} \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right); \exp, 0 \right] dy \end{aligned}$$

である.

$$|r_1(x; \exp, 0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} \leq e^{|x|}$$

より, $-M^{1/2}\sigma d \leq y \leq M^{1/2}\sigma d$ ならば

$$r_1 \left[\frac{1}{M^{1/2}} \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right); \exp, 0 \right] \leq \exp \left\{ y^2 \frac{d}{\sigma^2} R_3(d, f, c) \right\}$$

であるから, 必要なら d を小さくして

$$\rho_{d,f,c} := \frac{1}{2} - \frac{d}{\sigma^2} R_3(d, f, c) > 0$$

となるようにとれば

$$\begin{aligned} |\text{Rem}_1| &\leq \frac{1}{M^{1/2}} \frac{R_0(d, g, c) R_3(d, f, c)}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho_{d,f,c} y^2} |y|^3 dy \\ &= \frac{1}{M^{1/2}} \frac{R_0(d, g, c) R_3(d, f, c)}{\sqrt{2\pi} \sigma^3 \rho_{d,f,c}^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

が成り立つ. ただし,

$$R_0(d, g, c) = \sup\{g(x); c - d \leq x \leq c + d\}$$

である.

一方, A1 より

$$\begin{aligned} \left| \int_{[c-d, c+d]^c} e^{Mf(x)} g(x) dx \right| &= \left| \int_{[c-d, c+d]^c} e^{(M-m)f(x)} e^{mf(x)} g(x) dx \right| \\ &\leq e^{(M-m)f_d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mf(x)} |g(x)| dx \\ &= \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2} \sigma} \frac{M^{1/2} \sigma}{e^{M\{f(c)-f_d\}} e^{mf_d} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{mf(x)} |g(x)| dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

であるから, $Y \sim N(0, 1)$ とすると

$$I_M(g; f) = \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2} \sigma} \left\{ \mathbb{E} \left[g \left(c + \frac{Y}{M^{1/2} \sigma} \right) 1_{[-d, d]} \left(\frac{Y}{M^{1/2} \sigma} \right) \right] + O(M^{-1/2}) \right\} \quad (2.5)$$

が成り立つ.

以下, g は $(c - d, c + d)$ で C^1 -級と仮定する. $|y| \leq dM^{1/2}\sigma$ のとき

$$g \left(c + \frac{y}{M^{1/2} \sigma} \right) = g(c) + \frac{y}{M^{1/2} \sigma} r_1 \left(\frac{y}{M^{1/2} \sigma}; g, c \right)$$

より

$$\begin{aligned} &\left| g(c) - \mathbb{E} \left[g \left(c + \frac{Y}{M^{1/2} \sigma} \right) 1_{[-d, d]} \left(\frac{Y}{M^{1/2} \sigma} \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{R_1(d, g, c)}{M^{1/2} \sigma} \mathbb{E}[|Y|] + |g(c)| \mathbb{P}(|Y| > M^{1/2} \sigma d) \end{aligned} \quad (2.6)$$

であり, 従って (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) より

$$I_M(g; f) = \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2} \sigma} \left\{ g(c) + O(M^{-1/2}) \right\}$$

が成り立つ.

$(c-d, c+d) \subset [a, b]$ ならば, $g(x)1_{[a,b]}(x)$ も $(c-d, c+d)$ で C^1 -級であるから

$$\int_a^b e^{Mf(x)} g(x) dx = I_M(g(x)1_{[a,b]}(x); f) = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ g(c) + O(M^{-1/2}) \right\}$$

である.

$b = c + M^{-1/2}z$ のとき, $a < c-d$ ならば (2.6) より

$$\begin{aligned} \int_a^{c+M^{-1/2}z} e^{Mf(x)} g(x) dx &= I_M(g(x)1_{[a, c+M^{-1/2}z]}(x); f) \\ &= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ \mathbb{E} \left[g \left(c + \frac{Y}{M^{1/2}\sigma} \right) 1_{(-M^{1/2}\sigma d, \sigma z]}(Y) \right] + O(M^{-1/2}) \right\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\int_a^{c+M^{-1/2}z} e^{Mf(x)} g(x) dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ g(c)\Phi(\sigma z) + O(M^{-1/2}) \right\}$$

が成り立つ. ここで, Φ は標準正規分布の分布関数である. 特に $z=0$ とすると,

$$\int_a^c e^{Mf(x)} g(x) dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ \frac{1}{2}g(c) + O(M^{-1/2}) \right\}$$

となるが, $z < 0$, すなわち $f(x)$ の最大化点 c が積分区間の外側にある場合でも, ラプラス近似が利用できることがわかる. 同様に積分区間の下端が $M^{-1/2}$ のオーダーで c に近づくとき, $c < b$ ならば

$$\int_{c+M^{-1/2}z}^b e^{Mf(x)} g(x) dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ g(c)\Phi(-\sigma z) + O(M^{-1/2}) \right\}$$

が成り立つ.

2.3 漸近展開

前述の仮定 A3 において, $s \geq 4$ とし, さらに次を仮定する.

A4. g は近傍 U_c で C^{s-1} -級である.

一般に,

$$r_k(x; h, c) = \frac{h^{(k)}(c)}{k!} + x r_{k+1}(x; h, c)$$

であるから, (2.1) を展開することにより

$$\int_{c-d}^{c+d} e^{Mf(x)} g(x) dx$$

$$= \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left\{ \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} \phi(y) \left[g(c) + \frac{1}{M^{1/2}} \left\{ g'(c) \frac{y}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!} \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 \right\} \right] dy + \text{Rem}_2 \right\}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Rem}_2 = & \frac{1}{M} \int_{-M^{1/2}\sigma d}^{M^{1/2}\sigma d} \phi(y) \left[\left(\frac{y}{\sigma} \right)^2 r_2 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; g, c \right) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma} \right)^4 r_1 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; g, c \right) \right. \\ & + g \left(c + \frac{y}{M^{1/2}\sigma} \right) \left\{ \left(\frac{y}{\sigma} \right)^4 r_4 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{y}{\sigma} \right)^6 \left\{ r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right) \right\}^2 r_2 \left(\left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma} \right)^3 r_3 \left(\frac{y}{M^{1/2}\sigma}; f, c \right); \exp, 0 \right) \right\} \right] dy \end{aligned}$$

と表される. $|r_2(x; \exp, 0)| = |(e^x - 1 - x^2)/x^2| \leq e^{|x|}/2$ であるから 2.2 節と同様に上から評価すると

$$\begin{aligned} |\text{Rem}_2| & \leq \frac{1}{M} \left[\frac{R_2(d, g, c)}{\sigma^2} \mathbb{E}[Y^2] + \left\{ \frac{|f^{(3)}(c)|R_1(d, g, c)}{3!\sigma^4} + \frac{R_0(d, g, c)}{\sigma^4} \right\} \mathbb{E}[Y^4] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\{R_3(d, f, c)\}^2}{2\sigma^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho_{d,f,c}y^2} |y|^6 dy \right] \\ & = \frac{1}{M} \left[\frac{R_2(d, g, c)}{\sigma^2} + \frac{|f^{(3)}(c)|R_1(d, g, c) + 6R_0(d, g, c)}{2\sigma^4} + \frac{15\{R_3(d, f, c)\}^2}{16\sigma^6 \rho_{d,f,c}^{7/2}} \right] \quad (2.8) \end{aligned}$$

が得られる.

$$\int_z^\infty \phi(y) y dy = [-\phi(y)]_z^\infty = \phi(z), \quad (2.9)$$

$$\int_z^\infty \phi(y) y^3 dy = [-\phi(y) y^2]_z^\infty + 2 \int_z^\infty \phi(y) y dy = \phi(z) \{z^2 + 2\} \quad (2.10)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|y| > M^{1/2}\sigma d} \phi(y) \left[g(c) + \frac{1}{M^{1/2}} \left\{ g'(c) \frac{y}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!} \left(\frac{y}{\sigma} \right)^3 \right\} \right] dy \right| \\ & \leq 2|g(c)|\Phi(-M^{1/2}\sigma d) + \frac{\phi(M^{1/2}\sigma d)}{M^{1/2}} \left\{ \frac{|g'(c)|}{\sigma} + \frac{|g(c)f^{(3)}(c)|}{3!\sigma^3} (2M\sigma^2 d^2 + 2) \right\} \quad (2.11) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, (2.7), (2.4), (2.8), (2.11) より $-\infty \leq a < c < b \leq \infty$ ならば 2.2 節と同様に

$$\int_a^b e^{Mf(x)} g(x) dx = \frac{e^{Mf(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \{g(c) + O(M^{-1})\}$$

であることがわかる.

また, (2.7) 式において, $g(x)$ を $g(x)1_{[a, c+M^{-1/2}z]}(x)$, $g(x)1_{[a+M^{-1/2}z, b]}(x)$ で置き換えれば, (2.9), (2.10) を用いて

$$\begin{aligned}
& \int_a^{c+M^{-1/2}z} e^{Mf(x)} g(x) dx \\
&= \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left[g(c) \Phi(\sigma z) - \frac{\phi(\sigma z)}{M^{1/2}} \left\{ \frac{g'(c)}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!\sigma^3} (z^2\sigma^2 + 2) \right\} + O(M^{-1}) \right],
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{c+M^{-1/2}z}^b e^{Mf(x)} g(x) dx \\
&= \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left[g(c) \Phi(-\sigma z) + \frac{\phi(\sigma z)}{M^{1/2}} \left\{ \frac{g'(c)}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!\sigma^3} (z^2\sigma^2 + 2) \right\} + O(M^{-1}) \right]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

のように展開できることがわかる. なお, $O(M^{-1})$ と表した剰余項は, (2.4), (2.8), (2.11) の合計であり, $g(x)$ を $g(x)1_{[a, c+M^{-1/2}z]}(x)$, $g(x)1_{[a+M^{-1/2}z, b]}(x)$ で置き換えても増加することはない. したがって, $O(M^{-1})$ は a, z について一様なオーダー評価であり, z は M に依存していても (2.12), (2.13) は成立する. 特に $z_M = M^{1/2}(b-c)$ を (2.12) に代入すると

$$\begin{aligned}
& \int_a^b e^{Mf(x)} g(x) dx \\
&= \frac{e^{Mf(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma} \left[g(c) \Phi(\sigma z_M) - \frac{\phi(\sigma z_M)}{M^{1/2}} \left\{ \frac{g'(c)}{\sigma} + \frac{g(c)f^{(3)}(c)}{3!\sigma^3} (z_M^2\sigma^2 + 2) \right\} + O(M^{-1}) \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

と書くこともできる.

3 標本分位点の漸近性質

3.1 一様性

(1.1) において, $b(u)$ は $u = r = (k-1)/M$ で最大となる.

$$\begin{aligned}
z_M(x) &= \sigma_b M^{1/2} \{F(x) - r\}, \\
\sigma_b &= \sqrt{-b''(r)} = \{r(1-r)\}^{-1/2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

とおくと (2.14) より

$$\int_0^{F(x)} e^{Mb(u)} du = \frac{e^{Mb(c)} \sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma_b} \left[\Phi(z_M(x)) - \frac{\phi(z_M(x))}{M^{1/2}} \left\{ \frac{b^{(3)}(c)}{3!\sigma_b^3} ((z_M(x))^2 + 2) \right\} + O(M^{-1}) \right]$$

が成り立つ. また,

$$B(k, n-k+1) = \int_0^1 e^{Mb(u)} du$$

であるから,

$$B(k, n - k + 1) = \frac{e^{Mb(c)}\sqrt{2\pi}}{M^{1/2}\sigma_b} \{1 + O(M^{-1})\}$$

である. したがって,

$$P(X_{([n\alpha])} \leq x) = \Phi(z_M(x)) - \frac{\phi(z_M(x))}{M^{1/2}} \left\{ \frac{b^{(3)}(c)}{3!\sigma_b^3} ((z_M(x))^2 + 2) \right\} + O(M^{-1}) \quad (3.2)$$

が成り立つ.

$M \rightarrow \infty$ のとき, $r \rightarrow \alpha$, $\sigma_b \rightarrow \{\alpha(1 - \alpha)\}^{-1/2}$ であるから

$$\lim_{M \rightarrow \infty} z_M(x) = \begin{cases} \infty & (F(x) > \alpha) \\ -\infty & (F(x) < \alpha) \end{cases}$$

となる. したがって, 母集団分布のサポートにおいて $F(x)$ が狭義の単調増加関数ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{([n\alpha])} \leq x) = \begin{cases} 1 & (x > F^{-1}(\alpha)) \\ 0 & (x < F^{-1}(\alpha)) \end{cases}$$

であるから, $X_{([n\alpha])}$ は $F^{-1}(\alpha)$ の一致推定量である.

3.2 漸近正規性

母集団分布関数 $F(x)$ は C^1 -級と仮定し, 確率密度関数を $f(x)$ とする.

$$Z_n = M^{1/2}\sigma_b(X_{([n\alpha])} - F^{-1}(\alpha))$$

とおくと

$$P(Z_n \leq z) = P\left(X_{([n\alpha])} \leq F^{-1}(\alpha) + \frac{z}{M^{1/2}\sigma_b}\right)$$

である. (3.1) において, $x = F^{-1}(\alpha) + M^{-1/2}\sigma_b^{-1}z$ を代入すると

$$z_M\left(F^{-1}(\alpha) + \frac{z}{M^{1/2}\sigma_b}\right) = f(F^{-1}(\alpha))z + O(M^{-1/2})$$

であるから, (3.2) より $P(Z_n \leq z) = \Phi(f(F^{-1}(\alpha))z) + O(M^{-1/2})$ となり,

$$Z_n \xrightarrow{d} N\left[0, \frac{1}{\{f(F^{-1}(\alpha))\}^2}\right] \quad (n \rightarrow \infty)$$

である.

4 おわりに

確率分布の近似方法として、ラプラス近似は有力な手法のひとつである。標本分位点以外にも様々な統計量の分布の近似に応用できるが、最も有名な応用は標本平均の密度関数の鞍点近似であろう。\$X\$ を連続型確率変数とし、積率母関数

$$M(t) = e^{K(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

が \$t\$ の適当な区間 \$J\$ 内で存在するとする。ここで、\$f\$ は \$X\$ の確率密度関数である。\$X_1, \dots, X_n\$ を互いに独立に \$X\$ と同じ分布に従う確率変数とすると、標本平均 \$\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j\$ の確率密度関数は \$\tau \in J\$ を用いて

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{ne^{n\{K(\tau) - \tau x\}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{n\{K(\tau + is) - K(\tau) - isx\}\} dx$$

と表すことができる。ここで \$i\$ は虚数単位である。\$K'(\tau_0) = x\$ を満たす \$\tau_0 \in J\$ が存在するとき、\$K(\tau_0 + is) - K(\tau_0) - isx\$ は \$s = 0\$ で最大となりラプラス近似を適用することによって

$$f_{\bar{X}}(x) = \frac{ne^{n\{K(\tau_0) - \tau_0 x\}}}{2\pi} \{1 + O(n^{-1})\}$$

が得られる。標本平均の分布の近似として中心極限定理を用いた場合、\$x\$ が平均値から離れると近似精度は悪くなるが、鞍点近似では \$x\$ が平均値から離れていても近似精度が良いことが知られている。詳しくは Lugannani and Rice (1980) を参照されたい。

標本平均でなくても、積率母関数が陽に書ける場合には適切な漸近枠組みの下で、鞍点近似を適用することができる。例えば、MANOVA における尤度比検定統計量の帰無分布は Wilks のラムダ分布として知られているが、その積率母関数はガンマ関数の積と商として表される。Srivastava and Yau (1989) は Wilks のラムダ分布に対する鞍点近似公式を導出している。

参考文献

- [1] Srivastava, M. S. and Wai Kwok Yau (1989), “Saddlepoint Method for Obtaining Tail Probability of Wilks’ Likelihood Ratio Test, JMA 31, 117-126.
- [2] Lugannani, R., and Rice, S. (1980), Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables. Adv. in Appl. Probab. 12, 475-490.