

Mikyukov と Tkachev の論文: “Denjoy-Ahlfors theorem for harmonic functions on Riemannian manifolds and external structure of minimal surfaces” について

東北大学大学院理学研究科 (D1) 川内 新太郎 (Shintaro Kawauchi)

1

本稿では標題の Mikyukov と Tkachev の論文 [2] の紹介を行う.

ユークリッド空間に等長的にはめ込まれた極小曲面は, 任意の方向に関しその座標関数はユークリッド空間からの誘導計量で調和関数になる. 2 節ではリーマン多様体上の調和関数のある大域的性質に関する結果を紹介し, 3 節ではその結果を応用したユークリッド空間内の極小曲面に関する結果を紹介する. また, 論文 [2] の主結果の 1 つについて, その証明に誤りがあることがわかったので, その主張を紹介する.

以下, $\mathbf{R}^m$ は m 次元ユークリッド空間を表し, リーマン多様体 M は非コンパクトであると仮定する.

2

リーマン多様体 M 上の劣調和関数 f ($\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) \geq 0$) と開区間 (α, β) に対し,

1. 任意の $\tau \in (\alpha, \beta)$ に対し, 各 $\mathcal{D}(\tau)$ は $\{x \in M \mid f(x) > \tau\}$ の連結成分
2. $\tau_1, \tau_2 \in (\alpha, \beta)$ に対し, $\tau_1 < \tau_2$ ならば $\mathcal{D}(\tau_1) \supset \mathcal{D}(\tau_2)$
3. $\beta \neq \infty$ ならば, ある $\tau \in (\alpha, \beta)$ が存在して, $\mathcal{D}(\tau) \cap \{x \in M \mid f(x) > \beta\} \neq \emptyset$

を満たす開集合の族 $\{\mathcal{D}(\tau)\}_{\tau \in (\alpha, \beta)}$ を f の tract という. また f の 2 つの tract, $\{\mathcal{D}_1(\tau_1)\}_{\tau_1 \in (\alpha_1, \beta_1)}, \{\mathcal{D}_2(\tau_2)\}_{\tau_2 \in (\alpha_2, \beta_2)}$ が, 「ある τ_1, τ_2 が存在して, $\mathcal{D}_1(\tau_1) \cap \mathcal{D}_2(\tau_2)$ 」を満たすとき $\{\mathcal{D}_1(\tau_1)\}$ と $\{\mathcal{D}_2(\tau_2)\}$ は異なるという.

リーマン多様体 M 上の連続関数 h に対し,

$$B_h(t) := \{x \in M \mid h(x) < t\}$$

$$\Sigma_h(t) := \{x \in M \mid h(x) = t\}$$

とおく.

定義 1. リーマン多様体 M のほとんどすべての点で C^∞ 級な正の連続関数 $h: M \rightarrow [\rho, h_0)$, $0 \leq \rho$, $h_0 \leq +\infty$ が

1. 任意の $t \in [\rho, h_0)$ に対し $B_h(t)$ は全有界
2. $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ を $\overline{M}$ に集積点を持たない M の点列とすると $\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = h_0$
3. M のほとんどすべての点で $|\nabla h| \neq 0$

を満たすとき, h を M 上の exhausting function という.

例. (M, g) を完備リーマン多様体, $x_0 \in M$ とすると,

$$h(x) = \text{dist}(x_0, x), \quad x \in M$$

は M 上の exhausting function である.

例. $u: M \rightarrow \mathbf{R}^m$ を固有な等長極小はめ込み (proper isometric minimal immersion) とすると,

$$h(x) = |u(x)|, \quad x \in M$$

は M 上の exhausting function である.

以下, リーマン多様体 M は exhausting function h を持つもののみを考える. M の完備性は仮定しない.

M に対し余次元 1 の, 閉包がコンパクトな開集合 Ω に対し, 次の量を定義する.

$$\lambda_{2,h}(\Omega) := \inf_{\varphi} \left[\frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 |\nabla h|^{-1}}{\int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla h|} \right]^{1/2}$$

ここで, 下限は $\varphi \neq 0$, $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ なる Ω 上のリップシッツ関数全体をわたるものとする.

与えられた整数 $N \geq 1$ に対し,

$$\lambda(\Omega; N) := \inf \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_{2,h}(U_i)$$

ここで, 下限は $U_i \subset \Omega$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ ($i \neq j$) を満たす Ω の開集合の族 $\{U_i\}_{i=1}^N$ の選び方をわたるものとする.

上の定義の下で、リーマン多様体上の劣調和関数の tract の個数に関する、次の定理が成り立つ。

定理 1. (Miklyukov-Tkachev [2]) (M, g, h) を exhausting function h を持つリーマン多様体, f を M 上の劣調和関数とする。このとき, ある t_0 とある整数 $N \geq 1$ が存在して

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \exp \left(-2 \int_{t_0}^t \lambda(\Sigma_h(r); N) dr \right) \int_{B_h(t)} |\nabla f|^2 = 0$$

ならば f は高々 $N - 1$ 個の tract を持つ。

3

$u: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^m$ を有限位相型を持つ 2 次元多様体 M から m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ への固有な等長極小はめ込み (proper isometric minimal immersion) とする。このとき, u の極小性から任意の方向 $e \in \mathbf{R}^m$ に対し, その座標関数 $u_e := \langle u(x), e \rangle$, $x \in M$ は M 上の調和関数である。

$\mathbf{R}^m$ の方向 $e \in \mathbf{R}^m$ に垂直な $\mathbf{R}^m$ の超平面を $\Pi_e(a) := \{v \in \mathbf{R}^m \mid \langle v, e \rangle = a\}$, $a \in \mathbf{R}$ で表し, $a < b$ なる $a, b \in \mathbf{R}$ に対し $\Pi_e(a)$ と $\Pi_e(b)$ ではさまれていない $u(M)$ の連結成分の個数を $N(\Pi_e(a), \Pi_e(b))$ で表す。また, 以下 M は次の条件を満たす方向 $e \in \mathbf{R}^m$ を持つと仮定する。

1. 任意の $a \in \mathbf{R}$ に対し $u^{-1}(\Pi_e(a) \cap u(M))$ はコンパクト集合を含まない
 2. u_e は定数関数でない
- (1)

例えば M がカテナイドの場合, $e \in \mathbf{R}^3$ として回転軸の方向を選べばよい。

M 上の exhausting function h を $h(x) = |u(x)|$ とする。 M が 2 次元であることから $\Sigma_h(t)$ は 1 次元であるので, 定理 1 における $\lambda(\Sigma_h(t); N)$ の評価ができて, 次が成り立つ。

定理 2. (Miklyukov-Tkachev [2]) $a < b$ なる任意の $a, b \in \mathbf{R}$ に対し

$$N(\Pi_e(a), \Pi_e(b)) \leq 2V_2(M)$$

が成り立つ。ここで,

$$V_2(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi \log t} \int_{1 < |u(x)| < t} \frac{1}{|u(x)|^2}.$$

M が平面やカテナイド場合 $V_2(M)$ が計算できて、それぞれ等号を与える例になっている。

properly embedded な極小曲面に対しては、その全曲率が有限の場合、平面かカテナイドに漸近する end しか持たないことが知られている ([1])。この場合、 $V_2(M)$ は end の数と等しい ([3])。 M の位相型が有限であることから $V_2(M)$ は有限である。従って、全曲率が有限ならば $V_2(M)$ は有限である。しかし、逆が成り立つかどうかはわかっていない。

最後に、論文 [2] の主定理の 1 つである次の主張の証明に誤りがあることがわかったことを報告する。しかし、その証明はまだ訂正されていない。

命題 ([2] p581, Theorem 5.5) . M^2 を有限位相型を持つ多様体, $u: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^m$ を固有な等長的極小はめ込み, e を (1) を満たす $\mathbf{R}^m$ の定ベクトルとする。このとき、

$$V_2(M^2) < \infty$$

ならば、 u の e に関する座標関数 $u_e(x)$ ($= \langle u(x), e \rangle$), $x \in M^2$ の臨界点の個数は有限で、さらに

$$-\sum_j \text{ind}_{a_j} \nabla u_e \leq V_2(M^2) - \chi(M^2)$$

が成り立つ。ここで、 a_j は u_e の臨界点、 $\text{ind}_p X$ はベクトル場 X の零点 p での指数、 $\chi(M^2)$ は M^2 のオイラー数とする。

参考文献

- [1] D. Hoffman and W. H. Meeks, *Minimal surfaces based on the catenoid*, Amer. Math. Month. **97**, (1990), 702-730.
- [2] V. M. Miklyukov and V. G. Tkachev, *Denjoy-Ahlfors theorem for harmonic functions on Riemannian manifolds and external structure of minimal surfaces*, Comm. Anal. & Geom. Vol. **4**, No. **4**, (1996), 547-587.
- [3] V. G. Tkachev, *Finiteness of the number of ends of minimal submanifolds in Euclidean space*, Manuscr. Math. **82**, (1994), 313-330.