

正則的拡張に関する H. Lewy の一論文についての若干の注意

京大理 成木勇夫

§1. 序

いわゆる正則的拡張の問題は次のように定式化される。問題、或る複素多様体 Ω の実部分多様体 M 上の函数 u (十分滑らかであると仮定する。) が M の全ての tangential Cauchy-Riemann Operator によって零化されるとき、 u は M を閉包のうちに含むような Ω の或る領域での正則函数の M 上への境界値となり得るか？

この問題については M が Ω の超曲面であるときに詳しい研究がなされている。例えば [1], [2], [3], [4], [7] を見よ。しかしもっと低次元の部分多様体に対しては今までのところ殆んど何も知られていないと言ってよいであろう。しかし 1960 年 H. Lewy は $\mathbb{C}^3$ の 4 次元の実部分多様体で上述の問題の答が肯定的であるような興味ある例を作ることに成功した。

ここでは Lewy の方法を分析し、かなり一般的な十分条件を

得ることが主な目的である。

本論にはいる前によく使う記号、用語を例挙しておく。

$C A$, $\bar{A}$ は各々 A の (何かもっと大きな集合での) 補集合、閉包を示すものとする。又 $A \cap B$ の代りに $A \setminus B$ とかく。

M が C^∞ 多様体であるとき、 M の tangent bundle を $T(M)$ とかく。

Ω を複素多様体とするとき、 $T(\Omega) \otimes \mathbb{C}$ の holomorphic part を $T^{(1,0)}(\Omega)$ 、anti-holomorphic part を $T^{(0,1)}(\Omega)$ とする。

S を底空間 M を持つ C^∞ vector bundle とする。 M の領域 U 上の C^∞ cross-section 全体を $C^\infty(U, S)$ とかく。又 S の $p (p \in M)$ 上の fiber を S_p とかく。

S を上述のものとし、 U を M の領域とする。 $C^\infty(U, S)$ の元の組で U の各点 p において S_p の一つの base を与えるものを S の U 上の local frame と呼ぼう。

§ 2.

M を $n+n'$ 次元の複素多様体 Ω の実 $2n+2n'$ 次元の部分多様体とし、 p を M の点とするとき

$$S_p = T_p(M) \otimes \mathbb{C} \cap T_p^{(0,1)}(\Omega)$$

とおく。以後 $\dim_{\mathbb{C}} S_p = n$ となる場合のみを考えることにする ($n'=1$ のときは常にそうになっている)。そうすれば S_p を p 上の fiber とするような complex vector bundle S が定まる。

この S を M の tangential Cauchy-Riemann bundle と呼び、短く T. C-R. B と記すことにしよう。又 S の任意の cross-section を T. C-R. Operator と呼ぶ。

さて函数空間 $R(M)$ を [7] に従って次のように定義する。

$$R(M) = \{u \in C^\infty(M); Xu = 0 \text{ for any } X \in C^\infty(M, S)\}.$$

明らかに、 M の近傍で正則な函数の M 上への制限は $R(M)$ に属する。さらに $R^b(M)$ を $R(M)$ の元で M 上有界なもの全体の作る函数空間とする。

後に使う定理を引用するには、^(さらに) 二三の記号を作らねばならない。上述で $n=1$ 即ち M を Ω の超曲面としよう。その T. C-R. B を S とする。 η を S 上で 0 となる M の real 1-form とし、 S_p の元 s, t に対して $L_p^\eta(s, t) = i \langle (d\eta)_p | s \wedge \bar{t} \rangle$ とおけば、 L_p^η は S_p 上の Hermite 形式となる。さらに $\eta_p \neq 0$ のとき L_p^η の正の(負の)固有値の数を m_p^+ (m_p^-) で表し、 $\underline{m}_p = \min(m_p^+, m_p^-)$ $\bar{m}_p = \max(m_p^+, m_p^-)$ とおく。 $L_p^\eta = f(p) L_p^\eta$ (f は M 上の函数)であることから、 $\bar{m}_p, \underline{m}_p$ は η のとり方に無関係に定まること分かる。もし $\underline{m}_p, \bar{m}_p$ の M に対する依存関係を言い表したい場合がおれば、 $\underline{m}_p(M), \bar{m}_p(M)$ と記することにする。なおここに現れた L_p^η は定数倍を除いて (M によって分かれる Ω の一方の側を指定したときの) 古典的な Levi-form と一致することを注意しておく。

さて後に使う定理を挙げよう。

定理1 (H. Lewy [4], L. Hörmander [2], R. O. Wells [7])

M を複素多様体 Ω の超曲面とする。 M の各点 p で $m_p(M) \geq 1$

ならば、 Ω の領域 V で次の性質を持つものが存在する、

(i) $\bar{V} \supseteq M$

(ii) $R(M)$ の各元 u に対して、 V 上で正則、且つ M 上で u と一致する $\hat{u} \in C^0(V \cup M)$ が存在する。

もし、もっと強く $m_p(M) \geq 1$ ならば $\bar{V} \supseteq M$ とするようにより上述の V をとることができる。

定理2 (J. J. Kohn [9], L. Hörmander [8])

M を $n+1$ 次元複素多様体 Ω の超曲面とし、 $m_p(M) \geq 1$ と仮定する。

S (M の T.C.R.B.) の U (M の或る領域) 上の local frame $\{X_j\}_{j=1}^n$

に対して、微分作用素 $\mathcal{K} : C^\infty(U) \longrightarrow (C^\infty(U))^n$ を

$$\mathcal{K}u = (X_1 u, X_2 u, \dots, X_n u)$$

とおいて定義すると、 $\mathcal{K}$ は subelliptic である。(subelliptic differential operator の厳密な定義とその性質については L. Hörmander [] を参照されたい。)

定理2 から直ちに次の系が従う。

系 1

定理 2 の仮定のもとで、 $\bar{\partial}u=0$ の超函数解 u は必然的に C^∞ となる。

§ 3

これから考える $n+2$ 次元の複素多様体 Ω は、 $n+1$ 次元の複素多様体 $\widehat{\Omega}$ と $\mathbb{C}$ との直積とする。 $\Omega = \widehat{\Omega} \times \mathbb{C}$ 。 $\tilde{M}$ を $\widehat{\Omega}$ の超曲面とし、次の仮定を満しているものとする。

仮定 1. $\tilde{M}$ の各点 p に対して $m_p(\tilde{M}) \geq 1$

また $\tilde{M}_+$ は $\tilde{M}$ の領域であって、その ($\tilde{M}$ での) 境界 $\tilde{M}_0$ は空でない $\tilde{M}$ の超曲面と仮定とする。(したがって $\tilde{M} \setminus \tilde{M}_+$ は空でない。) f を $\tilde{M}_+ \times S^1$ (S^1 : 単位円周) 上で定義された複素数値 C^∞ 函数とし、 $\tilde{M}_+ \times S^1$ から Ω への C^∞ 写像 σ を次のように定義する。

$$\sigma(x, e^{i\varphi}) = (x, f(x, \varphi)) \quad x \in \tilde{M}_+$$

(こゝでは f は φ の周期函数と考えている。)

仮定 2. $M = \sigma(\tilde{M}_+ \times S^1)$ は Ω の codimension 2 の部分多様体を作り、 σ は $\tilde{M}_+ \times S^1$ から M への diffeomorphism である。

この F は M に対しては、勿論 T.C.R.B は well defined となる。これを S とかく。又以後、混乱のおそれぬ限りこの σ によって、 $\tilde{M}_+ \times S$ 上の函数と M 上の函数とを同一視する。即ち u を M 上の函数とするときそれは同時に $\tilde{M}_+ \times S'$ 上の函数 $u \circ \sigma$ をも指していると考える。またこの σ は、微分形式、vector field に対しても同様とする。

仮定 3. $f, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ は $\tilde{M}_0 \times S'$ まで連続的に拡張でき $\tilde{M}_0 \times S_1$ の上で 0 となる。

主定理を述べる前に次の補題を証明しておこう。

補題 1

$\tilde{M}, \tilde{\Omega}, M, \Omega, S$ を上述のものとし、 $\tilde{M}$ の $\tilde{\Omega}$ での T.C.R.B を $\tilde{S}$ とする。 $\tilde{U}$ を $\tilde{M}$ の領域とし $X \in C^\infty(\tilde{U}, \tilde{S})$ とするとき、

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf) \frac{\partial}{\partial \varphi} \in C^\infty(U, S) \quad (\text{但し、} U = \sigma((\tilde{M}_+ \cap \tilde{U}) \times S')$$

証明) S の定義より、 Ω の或る領域で正則な函数の U 上への制限 (必ずしも U 全体で定義されていると限らぬが) が全て $\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf) \frac{\partial}{\partial \varphi}$ によって零化されることを示せばよい。
 $\Omega = \tilde{\Omega} \times \mathbb{C}$ であつたから、 $\tilde{\Omega}$ の或る領域で正則であるような

全ての函数 α M 上への制限と、 Ω から α の $\mathbb{C}$ 成分への projection の M 上への制限 f に対して上述のことが言えるならば十分である。しかしこれは自明である。(終)

さて主定理を述べよう。

定理 3

M, Ω を上述の α のとし、仮定 1、— 仮定 3 が全て満たされているとする。このとき次の性質をえ、 Ω の開領域 V_0 と超曲面 V_1 とが存在する。

$$(i) V_0 \supseteq V_1, \quad \overline{V_1} \supseteq M$$

(ii) 任意の $u \in R^b(M)$ に対して、 V_0 で正則な函数 u_0 があって α の V_1 上への制限は M への連続な境界値として u を持つ。

証明) 先ず $\tilde{M}_+$ 上に函数族 $v^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots$) を作る。

$$v^{(j)}(x) = \int_0^{2\pi} u(x, \varphi) (f(x, \varphi))^j \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \quad x \in \tilde{M}_+$$

任意の $X \in C^\infty(\tilde{M}_+, \tilde{S})$ に対して $X v^{(j)} = 0$ を示そう。

$$X v^{(j)} = \int_0^{2\pi} (X(u f^j)) \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \int_0^{2\pi} u f^j \frac{\partial (X f)}{\partial \varphi} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (uf^v) d\varphi + \int_0^{2\pi} \left(Xf \frac{\partial}{\partial \varphi} (uf^v) + uf^v \frac{\partial (Xf)}{\partial \varphi} \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (uf^v) d\varphi + \left[(Xf) uf^v \right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

第二項は明らかに 0。最初の項は $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u = 0$ (補題と $u \in R^b(M)$ から) と $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - Xf \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f^v = 0$ とから 0 となる。

$Xv^u = 0$ が言えた。

一方、仮定から v^u は $\tilde{M}_0$ 上で境界値 0 を持つ。そこで v^u を $\tilde{M}_+$ 外で 0 として拡張すれば $\tilde{M}$ の任意の T. C-R. Operator X に対して $Xu = 0$ の超函数解となっている。系 1 により v^u は $\tilde{M}$ 上で滑らかに延べられなければならない。したがって v^u は $\tilde{M}$ の ($\tilde{\Omega}$ での) 近傍に正則に拡張できることにはなるが $\tilde{M} \setminus \tilde{M}_+$ の上で 0 である。 v^u は恒等的に 0 でなくてはならない。

今 Γ_x は $z = f(x, \varphi)$ で定義される複素平面上の Jordan 曲線とすれば、証明できることは

$$\int_{\Gamma_x} u(z, \xi) \xi^v d\xi = 0 \quad z \in \tilde{M}_+.$$

よく知られているように、このときは

$$u_1(z, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} \frac{u(z, \xi)}{\xi - z} d\xi \quad z \in B_x \left(\begin{array}{l} \Gamma_x \text{ で囲まれる有界} \\ \text{領域} \end{array} \right)$$

とおくと、 u_1 は Γ_x 上で境界値 u をとる。

そこで V_1 を $\bigcup_{x \in M_+} \{x\} \times B_x$ とすれば、 u_1 は $R(V_1)$ の元である。

何故なら、変数 x についての正則性は明らかであるし、

$X \in C^\infty(\tilde{M}_+, \tilde{S})$ を V_1 の vector field と見るとき、これは V_1 の T.C.R. Operator であって、しかも $Xv^{(0)} = 0$ を示したと全く同様に $Xu_1 = 0$ が証明されるからである。

そこで $m_p(V_1) = m_x(\tilde{M})$ (但し $p = (x, *)$) であることに注意すると、仮定1より再び定理1が使えて、求める V_0 と u_0 とが得られることになる。(終)

注意. 仮定1は少々強すぎる。実際仮定1の代りに $m_p(\tilde{M}) \geq 1$ と M の parametrization に関する他の仮定をつけ加えることにより同様の議論を進めることができる。しかし、この後者の仮定は極めて複雑で人工的であるので、そのように取り扱いはここでは述べなかった。詳細はどこかに発表されるであろう筆者の論文[6]を見よ。この論文では codimension が3以上の場合も統一的に取り扱っている。ほぼこのような精密化により次の命題が証明される。

命題; $n \geq 4$ とし、 $\mathbb{C}^n$ の codimension 2 の compact な部分多様体 M を次のように定義する。

$$M = \left[z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = a, \sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = b \right]$$

但し $a, b > 0$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$, $\lambda_2 a > b > \lambda_{n-1} a$, $\lambda_j a \neq b$ ($j=3, \dots, n-2$) とする。

又 $\mathbb{C}^n$ の pseudo-convex 近領域 V を次のように定義する。

$$V = \left[z \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) |z_j|^2 < b - \lambda_n a, \sum_{j=2}^n (\lambda_1 - \lambda_j) |z_j|^2 < \lambda_1 a - b \right]$$

このとき $R(M)$ の元 u に対して $\overline{V}$ で連続で V で正則,かつ M 上で u と一致する u_0 が存在する。

証明は全く初等的である。詳細は [6] を見よ。

文 献

- [1] Bochner, S., Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. of Math. Vol. 44, (1953) pp. 652-673..
- [2] Hörmander, L., Several Complex variables, Mimeographed Notes, Stanford University, 1963.
- [3] Kohn, J.J. and Rossi, H., On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. Ann. of Math. Vol. 81 (1965) pp. 451-472.
- [4] Lewy, H., On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in 3 variables and a

related theorem for regular functions of 2 complex variables. Ann. of Math. Vol. 64 (1956), pp. 514-522.

[5] Lewy, H., On Hulls of holomorphy. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 13 (1960) pp. 587-591

[6] Naruki, I., Remarks on a paper of H. Lewy .
to appear.

[7] Wells, R. O., On the Local holomorphic Hull of a Real Submanifold in Several Complex Variables. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 19 (1966) pp. 145-165.

[8] Hörmander, L., Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math vol. 83.
pp. 129-209, 1966.

[9] Kohn, J. J., Boundaries of complex manifolds, Proc. Minnesota Conference on Complex Analysis pp. 81-94,
Springer Verlag, Berlin, 1965.