

*On the strong completeness theorems
for the first-order generalized intuitionistic predicate calculus*

静岡大学理学部 白井古希男 (Kokio Shirai)

§0. 序文

数理論理学の研究において、完全性定理は最も基本的な定理の一つである。完全性定理は、一般に次のように述べられる。

完全性定理 (Completeness Theorem) :

任意の sentence A について、 A がすべての model で真ならば A は証明可能である。

あるいは、

任意の sentence A について、 A が証明不可能ならば、 A を偽にする model (反例) がある。

完全性定理を次のように拡張した定理を強完全性定理である。

強完全性定理 (Strong Completeness Theorem, Generalized completeness theorem ともしう) :

K を sentence の任意の集合とする。

- (i) K が無矛盾ならば, K はモデルをもつ.
- (ii) 任意の sentence A について, K から A が証明不可能ならば, K の model で, A の model でないものがある.

あるいは,

任意の sentence A について, K の任意の model が A の model ならば, A は K から証明可能である.

論理体系 $\mathcal{L}$ の強完全性定理を $SCT_{\mathcal{L}}$ とかく. $\mathcal{L}$ の命題論理の体系の強完全性定理を, $SCT_{\mathcal{L}}^p$ とかく.

generalized first-order language における直観主義述語論理 (LJ) の強完全性定理には, 良く知られている形として, cHa (完備 Heyting 代数, 完備擬 Boolean 代数, 完備 Brouwer 束, 完備擬補束ともいう) による代数的 semantics による定理と, Kripke semantics による定理とかある.

これら 2つの定理は, 良く知られているようにともに ZFC の定理である. model の概念に一步ふみ込んだ以上, AC (選択公理) を使うことに何等不満があったわけではないが, それらの証明を詳細に眺めると, 2つの定理には強さに明白な相違がある. すなわち, cHa による定理は ZF の定理であり, Kripke semantics による定理は, ZF より強い仮定を必要とすることである. この小論の目標は, このことを明確に示し, Kripke semantics の強完全性定理の正確な条件を求めようとしたか.

不満足な結果に終った。

この問題を意識したのは、現九州大学大学院教理学研究科の高良弘志氏との G. Takuti: "Proof Theory" (2nd edition) [1] のセミナーがきっかけであり、彼には新しい文献や証明を教えてくださいました。高良氏には心から感謝する。また、高野道夫氏、塚田信高氏、小野寛斯氏はじめの諸先生には、色々御教示いただいた。心から感謝したい。

§ 1. 古典述語論理の完全性

まず、話を古典述語論理 (LK) の場合から始める。

1.1 可算言語のとき:

古典述語論理の完全性と強完全性は、1930年に K. Gödel [2] によって証明された。Gödel はその証明に König の Lemma を用いたが、L. Henkin [3], G. Hasenjaeger [4] によって別証明とその改良が与えられ、さらに、H. Rasieaux-R. Sikorski [5] によって代数的証明が、K. Schütte [6] により *reduction tree* の方法による証明が与えられた。その他 Beth [7] の *tableaux* による証明等もある。

G. Takuti [1] には、LK の完全性定理が Schütte 流の方法で示してある。

Gödel や Gödel-Henkin の証明は、逆数学においてより詳細に分析され、 RCA_0 において、Gödel-Henkin の強完全性定理は、

WKL。と同値であることがわかっている。(H. Friedman [8], S.G. Simpson [9], 田中-え [10] 参照)

1.2 非可算言語のとき.

Gödel-Henkin の強完全性定理 (自然な semantics, 2値 model による定理は. 通常 AC, Zorn の Lemma, Teichmüller-Tukey の Lemma 等を用いて証明されるが. 1954年, J. Löb [11] は, ZF のもとで, 強完全性定理は Boolean 代数の Maximal ideal Theorem と同値であることを示した. 1971年に, J.D. Halpern-A. Lévy [12] は, ZF において, Boolean prime ideal Theorem からは, AC は導けないことを示した. Boolean 代数においては, Maximal ideal と Prime ideal は同じ概念になるから, 強完全性定理 (SCT_{LK}) は Boolean prime ideal Theorem (PIT_{ba}) と ZF で同値になり, SCT_{LK} は, ZF において AC より真に弱い仮定のもとで証明できることがわかったわけである.

PIT_{ba} は ZF において, Compactness theorem (Henkin (1954)), Stone の表現定理 (Stone (1936)), Hausdorff 空間に関する Tychonoff の定理, 任意の集合 I について the generalized cantor space $\{0,1\}^I$ が compact であること等とすべて同値であり (T.J. Jech [13]), また, PIT_{ba} からは, 空でない互いに素な有限集合を元とする任意の集合が選択関数をもつことか ZF で導けるから, 各自然数 n ($n \geq 2$) について, n 元集合を元とする任意の集合が選択関数をもつこと (AC_n) が導ける.

しかるに P.J. Cohen [14] によれば, ZF からは, 可算集合についての AC_2 さえ証明不可能であるから, PIT_{Ba} は, 従って 2値 semantics による 強完全性定理は, ZF の定理でないことがわかる.

定理. $ZF \vdash SCT_{Lk} \leftrightarrow PIT_{Ba}$

$ZF \vdash SCT_{Lk}.$

§2. 直観主義述語論理の代数的 semantics による完全性定理

ここでは, CHA による 強完全性定理 ($SCT_{Ba}(CHA)$) か, 言語がたとえ非可算であっても ZF の定理であることを示す.

2.1. 可算言語のとき.

強完全性定理は, Rasiowa-Sikorski [5] によって証明された.

2.2. 非可算言語のとき.

強完全性定理の証明を初めて明確に与えたのは, G. Takeuti [1] である. その証明は, 2.1 の Rasiowa-Sikorski の方針に従っている.

Ha を完備化するとき, *complete-ideal* (*C-ideal*) を用いる方法 (A.S. Troelstra-D. van Dalen [15]), Dedekind-MacNeille による方法, *topology* による方法等が知られている. *C-ideal* による完備化と切断による Dedekind-MacNeille による完備化とは同じものである. 以下に切断による方法で強完全性定理の証明をする. 方針は

やはり 2.1 の Rasiowa-Sikorski の方針に従う。

2.21 言語を L とする。自由対象変数と束縛対象変数とは、可算無限コずつあるものとする。変数が 0 の場合の述語記号は命題変数とみなす。対象定数、関数記号、述語記号はいくらあってもよい。述語記号は少なくとも 1 つはあるものとする。 L を $L = \langle \{c_i \mid i \in I\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_j^n \mid j \in J_n\}, \bigcup_{n=0}^{\infty} \{P_k^n \mid k \in K_n\} \rangle$ とかく。

K を L の sentence の任意の集合、 A を L の任意の sentence とする。 $K \vdash A$ とは、ある K に含まれる sentence の有限列 Γ があって、sequent $\Gamma \rightarrow A$ が LJ-provable のこととする。

$\mathcal{H} = \langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ で $\mathcal{H}_a$ を、 $\mathcal{H} = \langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1, \bigwedge, \bigvee \rangle$ で $\mathcal{C}\mathcal{H}_a$ を表わす。 $\bigwedge$ は無限の $\inf$ を、 $\bigvee$ は無限の $\sup$ を表わす。 $\mathcal{H}$ を $\mathcal{C}\mathcal{H}_a$ とする。 $\mathcal{M}$ が $\mathcal{H}$ -structure とは、

$\mathcal{M} = \langle D, \{c_i^m \mid i \in I\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_j^{n,m} \mid j \in J_n\}, \bigcup_{n=0}^{\infty} \{P_k^{n,m} \mid k \in K_n\} \rangle$ であって、

- 1) D は空でない集合、2) c_i は対象定数であるから、 c_i^m は D の元、
- 3) f_j^n は n 変数関数であるから、 $f_j^{n,m}: D^n \rightarrow D$ 4) P_k^n は n 変数述語記号であるから、 $n=0$ のときは $P_k^{0,m}$ は H の元、 $n \geq 1$ のときは、 $P_k^{n,m}: D^n \rightarrow H$ 5) $n^m=0$ の条件をみたすことをいう。

$\mathcal{M}$ が $\mathcal{H}$ -structure のとき、 L の拡張された言語 $L(D)$ を $L \cup \{\bar{d} \mid d \in D\}$ とする。 $\bar{d}$ は D の各元 d に対応する定数で、 D の異なる元には、異なる対象定数に対応しているとする。

$\bar{a}^m = a$ とすると, $\mathcal{M}$ は $L(D)$ における $\mathcal{A}$ -structure と考える.

$L(D)$ の各 sentence A に対して, $\mathcal{M}$ による真理値 $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} \in H$ を以下のように定義する.

1. $\llbracket \perp \rrbracket_{\mathcal{M}} = \perp^m = 0$, $\llbracket P_n^0 \rrbracket_{\mathcal{M}} = P_n^0{}^m$, $n \geq 1$ のとき,

$\llbracket P_n^m(t_1, \dots, t_m) \rrbracket_{\mathcal{M}} = P_n^0{}^m(t_1^m, \dots, t_m^m)$ ここに, t^m は term の $\mathcal{M}$ による解釈である.

2. $\llbracket \neg A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \neg \llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}}$, ここに, $\neg a \stackrel{\text{def}}{=} a \rightarrow 0$ である.

3. $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{\mathcal{M}} = \llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} \wedge \llbracket B \rrbracket_{\mathcal{M}}$, $\llbracket A \vee B \rrbracket_{\mathcal{M}} = \llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} \vee \llbracket B \rrbracket_{\mathcal{M}}$, $\llbracket A \supset B \rrbracket_{\mathcal{M}} = \llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} \supset \llbracket B \rrbracket_{\mathcal{M}}$

4. $\llbracket \forall x F(x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = \bigwedge \{ \llbracket F(d) \rrbracket_{\mathcal{M}} \mid d \in D \}$, $\llbracket \exists x F(x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = \bigvee \{ \llbracket F(d) \rrbracket_{\mathcal{M}} \mid d \in D \}$

5. 以上.

A が $\mathcal{M}$ で真である ($\mathcal{M} \models A$) とは, $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = 1$ のこととする.

K を $L(D)$ の sentence の集合, A を $L(D)$ の sentence とするとき,
 $K \models_{\mathcal{M}} A$ を, K のすべての sentence が $\mathcal{M}$ で真ならば, A が $\mathcal{M}$ で真であることとする.

$K \models_{\mathcal{A}} A$ とは, 任意の $\mathcal{A}$ -structure $\mathcal{M}$ について $K \models_{\mathcal{M}} A$ とする.

K を L の sentence の集合, A を L の sentence とするとき,
 $K \models A$ とは, 任意の $\text{cHa } \mathcal{A}$ について, $K \models_{\mathcal{A}} A$ とする.

このとき, cHa による強完全性定理は, 次のように表現できる:

任意の言語と任意の sentence の集合 K と任意の sentence A について,

$K \models A$ ならば, $K \models_{\mathcal{A}} A$

2.22 Lindenbaum-Tarski の Lemma と Rasiowa-Sikorski の embedding Lemma

2.221 Lindenbaum-Tarski の Lemma

T を L の term の全体の集合, $\mathcal{F}$ を L の formula の全体の集合とする.

$A, B \in \mathcal{F}$ に対し, $\mathcal{F}$ の 2 項関係 $A \sim B$ を.

$A \sim B \iff K \models A \rightarrow B$ か $K \models B \rightarrow A$ によって定義する

ると, $\sim$ は同値関係になる. A の $\sim$ による同値類を.

$[A] \triangleq \{B \in \mathcal{F} \mid A \sim B\}$ とし, $\mathcal{F}$ の $\sim$ による商集合を H とおく.

$H \triangleq \mathcal{F}/\sim = \{[A] \mid A \in \mathcal{F}\}$

H の元の間, $[A] \wedge [B] \triangleq [A \wedge B]$, $[A] \vee [B] \triangleq [A \vee B]$, $[A] \rightarrow [B] \triangleq [A \rightarrow B]$
 $0 \triangleq [1]$, $1 \triangleq [A \supset A]$ と定義すると,

1) $\mathcal{H} = \langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ は $\mathcal{H}_a$ である.

2) 任意の $F(x) \in \mathcal{F}$ に対して, $[\forall x F(x)] = \bigwedge \{ [F(t)] \mid t \in T \}$
 $[\exists x F(x)] = \bigvee \{ [F(t)] \mid t \in T \}$

3) K の任意の sentence C について $[C] = 1$

となる.

2.222 Rasiowa-Sikorski の embedding Lemma

任意の $\mathcal{H}_a$ $\mathcal{H} = \langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ に対して, $\subset \mathcal{H}_a$ $\mathcal{H}^* =$

$\langle H^*, \wedge^*, \vee^*, \rightarrow^*, 0^*, 1^*, \wedge^*, \vee^* \rangle$ と monomorphism $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ が存在して,
 (H) $\begin{cases} \bigvee \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \in H \text{ ならば } \varphi(\bigvee \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}) = \bigvee^* \{ \varphi(a_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \} \\ \bigwedge \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \in H \text{ ならば } \varphi(\bigwedge \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}) = \bigwedge^* \{ \varphi(a_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \} \end{cases}$
 が成り立つ.

証明は、高良氏の方針に従う (P.T. Johnstone [16] 参照; 記号は G. Birkhoff [17], 岩村 [18] に従う)

$X \subset H$ に対して, $X^* = \{a \in H \mid \forall x \in X (x \leq a)\}$, $X_* = \{a \in H \mid \forall x \in X (a \leq x)\}$,

$a \in H$ に対して, $\downarrow(a) = \{x \in H \mid x \leq a\}$ を表わすものとする.

$H^* \triangleq \{X \in \mathcal{P}(H) \mid (X^*)_* = X\}$ とおく. すなわち, 切断の下組の全体である. $A, B \in H^*$ に対して, $A \wedge^* B \triangleq A \cap B$, $A \vee^* B \triangleq (A^* \cap B^*)_*$,

$A \rightarrow B \triangleq \{x \in H \mid \forall a \in A (a \wedge x \in B)\}$, $0^* \triangleq \downarrow(0)$, $1^* \triangleq H$,

$G \subset H^*$ に対し, $\bigwedge^* G \triangleq \bigcap G$, $\bigvee^* G \triangleq (\bigcap \{X^* \mid X \in G\})_*$ と定義すると, $\mathcal{H}^* = \langle H^*, \wedge^*, \vee^*, \rightarrow, 0^*, 1^*, \bigwedge^*, \bigvee^* \rangle$ は $\mathcal{CHa}$ になる.

$H \ni a$ に対して, $\varphi(a) \triangleq \downarrow(a)$ と定義すると, $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ は monomorphism で性質 (#) をみたす.

注1. Rasiowa-Sikorski のもとの Lemma は当然可算の $\inf, \sup$ であり, 一般の場合を初めて本¹たのは G. Takeuti [1] である. しかし, その証明は複雑である.

注2. $\mathcal{C}$ -ideal は R.P. Dilworth と McLaughlin によって束の場合に定義された. $\mathcal{H}_a$ において, $\mathcal{C}$ -ideal が切断の下組になっていることは, 小野賢晰教授の指摘によって知った.

MockNille は, 束の完備化の方法として, R. Dedekind の方法を用いた. 現在は Dedekind-MockNille の完備化とよばれ, 他の論理体系の完全性定理の証明にも応用されている (H. Ono [19] 参照)

2.223 強完全性定理 ($SCT_{\square}(CHA)$) の証明

$K \models A$ とする. $\mathcal{A}$ を K による Lindenbaum-Tarski algebra とする
と. 2.221 より H_A になり 1), 2), 3) をみたし,

4) $[A] \neq 1$ をみたす. そこで, 2.222 の Lemma によって
 $\mathcal{A}^*$, φ を作れば. $(\#)$ をみたす.

$\mathcal{M} = \langle T, \{c_i^{\mathcal{M}} \mid i \in I\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_j^n^{\mathcal{M}} \mid j \in J_n\}, \bigcup_{n=0}^{\infty} \{P_k^n^{\mathcal{M}} \mid k \in K_n\} \rangle$ を.

$c_i^{\mathcal{M}} = c_i$, $f_j^n^{\mathcal{M}} = f_j^n$, $P_k^0^{\mathcal{M}} = \varphi([P_k^0])$, $P_k^n^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = \varphi([P_k^n(t_1, \dots, t_n)])$

と定めると, $\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}^*$ -structure となり.

(1) $L(T)$ の各 closed term t について $t^{\mathcal{M}} \in T$

L の各 term $t(a_1, \dots, a_n)$ と任意の term $t_1, \dots, t_n$ について.

$$t(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)^{\mathcal{M}} = t(t_1, \dots, t_n)$$

(2) $L(T)$ の各 sentence C について $\llbracket C \rrbracket_{\mathcal{M}} \in H^*$

L の各 formula $F(a_1, \dots, a_n)$ と任意の term $t_1, \dots, t_n$ について.

$$\llbracket F(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \rrbracket_{\mathcal{M}} = \varphi([F(t_1, \dots, t_n)])$$

(3) $K \ni C$ なら $[C] = 1 \quad \therefore \llbracket C \rrbracket_{\mathcal{M}} = \varphi([C]) = \varphi(1) = 1^*$

$$\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \varphi([A]) \neq \varphi(1) = 1^*$$

が成り立つ. よって,

$$\mathcal{M} \models K \text{ かつ } \mathcal{M} \not\models A \quad \therefore K \not\models_{\mathcal{M}} A \quad \therefore K \not\models_{\mathcal{A}^*} A \quad (\text{証明終})$$

この証明は, すべて ZF でできるから

定理. $ZF \vdash SCT_{\square}(CHA)$

§3. 直観主義述語論理の Kripke semantics による完全性定理

ここでは, Kripke semantics による強完全性定理 ($SCT_{\text{LK}}(\text{Kripke})$) が, 言語が可算なら ZF の定理であるか, 言語が非可算なら, ZF の定理でないことを示す. 命題論理の場合ですら, 完全な条件を示すことができなかったのも, 不本意ではあるか. いくつかの予想を述べるにとどめる.

3.1 可算言語のとき

完全性定理は, S. Kripke の "possible world semantics" の考えをもとに 1965 年に S. Kripke [20] によって初めて証明された. K. Schütte [21] には簡潔な証明がある.

強完全性定理は, R. H. Thomason [22], P. H. G. Aczel [23], M. Fitting [24] によってそれぞれ独立に 1968, 1969 年に証明された.

R. H. Thomason の証明は, Gödel-Henkin による LK の強完全性定理の証明のアナロジーである. *saturated set* という概念を定義し,

K : sentence の集合, A : sentence で $K \Vdash A$ ならば, 新しい可算 ω の対象定数を追加して, 拡大された言語での sentence の集合 ρ で,

1) $K \subset \rho$ 2) $\rho \Vdash A$ 3) ρ は拡大された言語での *saturated set* をみたす ρ が ZF の中で構成できることを示す.

このことを用いて, Kripke semantics $\mathcal{K} = \langle \mathcal{P}, \subset, \models, D \rangle$ を
 $\mathcal{P}$ を saturated set の集合, $\subset$ を包含関係, prime formula R
 について, $p \in \mathcal{P}$ のとき, $p \models R \leftrightarrow R \in p$ で定めると,

$(\mathcal{P}, \subset)$ は poset となり, Kripke semantics になる. D は domain
 function である.

しかも, 任意の $p \in \mathcal{P}$ で $p \not\models K$

.. ある $p_0 \in \mathcal{P}$ で $p_0 \not\models A$ かいえるから,

ZF で Kripke semantics による 強完全性定理 かいえる.

Thomason による saturated set による Kripke model の構成方法
 は. C.A. Smorynski [25], A.S. Troelstra - D. van Dalen [26] にみられ
 るが. Smorynski は. saturated set は. 分配束の prime filter に
 相当するものであると書いている.

3.2 非可算言語のとき.

3.2.1. Heyting 代数についてのいくつかの定義と結果

命題論理の LJ の強完全性は. M. Fitting [24] による方法を用
 いる. それは, Lindenbaum algebra から, Kripke model を作る方法で
 ある. そのため, Heyting 代数についてのいくつかの定義の復
 習と結果を述べる.

$\mathcal{H} = \langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ を H_a とする.

1°. $F \subseteq H$ が $\mathcal{H}$ の (proper) filter とは,

1) $0 \notin F$

$$2) x \in F, x \leq y \sim y \in F$$

$$3) x \in F, y \in F \sim x \wedge y \in F$$

をみたすことである。以下, *proper filter* を単に *filter* とよぶ。

2°. F が *prime filter* とは, F は *filter* であって,

$$4) x \vee y \in F \sim x \in F \text{ or } y \in F$$

3°. F が *ultra filter* とは, F は *filter* であって,

$$5) \forall x \in H (x \in F \text{ or } \neg x \in F) \quad \text{ここに, } \neg x \stackrel{\text{def}}{=} x \rightarrow 0$$

4°. F が *maximal filter* とは, F は *filter* であって,

$$6) \forall G (F \subset G \subset H \wedge G: \text{filter} \sim G = F)$$

Fact 1. Boole 代数では, *prime filter*, *ultra filter*, *maximal filter* は同じ概念である。

Fact 2. Heyting 代数では, *maximal filter* と *ultra filter* は同じ概念であるが, *prime filter* はそれより真に弱い概念である。

5° $\emptyset \neq X \subset H$ のとき,

$[X] \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in H \mid \text{ある有限 } \square \text{ の } x_1, \dots, x_n \in X \text{ があり, } x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a\}$ とする。

Fact 3. $\emptyset \neq X \subset H$ で, X の任意有限 $\square$ の元の *inf* が 0 でなければ,

$[X]$ は X を包含する最小の *filter* になる。

Fact 4. $F: \text{filter}$, $a \rightarrow b \notin F$ とすれば, $b \notin [F \cup \{a\}]$ 。

Fact 5. I が prime ideal なら, $F = \{x \in H \mid x \notin I\}$ は prime filter であり, F が prime filter なら $I = \{x \in H \mid x \notin F\}$ は prime ideal である.

6°. PFT_{Ba} , PFT_{Ha}

PFT_{Ba} とは, '任意の Boolean 代数には, prime filter が存在する' という命題である.

同様に, PFT_{Ha} , PIT_{Ba} , PIT_{Ha} が定義される.

7°. $P'FT_{Ba}$, $P'FT_{Ha}$

$P'FT_{Ba}$ とは '任意の Boolean 代数について, 任意の filter は prime filter に拡張できる' という命題である.

8°. $SPFT_{Ba}$, $SPFT_{Ha}$

$SPFT_{Ba}$ とは '任意の Boolean 代数において, 任意の filter F と任意の元 $a \notin F$ に対して, a を含まぬ, F の拡大となる prime filter が存在する' という命題である.

$SPFT_{Ha}$ も同様に定義される.

Fact 6. $ZF \vdash PFT_{Ba} \leftrightarrow PIT_{Ba}$

$ZF \vdash PFT_{Ha} \leftrightarrow PIT_{Ha}$

Fact 7. $ZF \vdash PFT_{Ba} \leftrightarrow P'FT_{Ba} \leftrightarrow SPFT_{Ba}$

$ZF \vdash PFT_{Ha} \leftrightarrow P'FT_{Ha}$

予想としては, $ZF \vdash PFT_{Ha} \leftrightarrow SPFT_{Ha}$

Fact 8. $ZF \vdash PFT_{Ha} \rightarrow PFT_{Ba}$

$ZF \vdash SPFT_{Ha} \rightarrow SPFT_{Ba}$

$ZF \vdash SPFT_{Ha} \rightarrow PFT_{Ha}$

Fact 9. $ZF \vdash AC \rightarrow SPFT_{Ha}$

Fact 10. $ZF \not\vdash PFT_{Ba} \rightarrow AC$

3.22 命題論理のとき.

ここで示すことは次のことである.

定理. $ZF + SPFT_{Ha} \vdash SCT_{LT}^p(Kripke)$

証明. *Fitting* の方法による.

$K \vdash A$ とする. K による Lindenbaum 代数を作ると. 2.221

より, 1) $\mathcal{A} = \langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1 \rangle : Ha$

3) K の任意の formula C について. $[C] = 1$

4) $[A] \neq 1$

がいえる.

$SPFT_{Ha}$, Fact 8 より PFT_{Ha} $\therefore \mathcal{A}$ には prime filter が存在する. $\mathcal{P}$ を $\mathcal{A}$ の prime filter の全体, $\subset$ を 包含関係とすると. $(\mathcal{P}, \subset)$ は poset になる. $\mathcal{F}$ を formula の全体とする.

$F \in \mathcal{P}$, p : 命題変数のとき. 2項関係 $\models$ を.

$F \models p \iff [p] \in F$ で定めると.

任意の formula B について, $F \models B \iff [B] \in F$

がいえる. B の一箇外の論理記号かつのとき, $SPFT_{Ha}$ が用

いられる. これによつて, $\mathcal{K} = \langle \emptyset, \subset, \vdash \rangle$ とすると, これは命題論理 LJ の Kripke structure で,

任意の $F \in \emptyset$ について, $F \vdash K$

一方, $G = \{A\}$ は filter で, $[A] \not\subseteq G$. よつて, 再び $SPFT_{Ha}$

によつて, $[A] \not\subseteq F_0$, $G \subset F_0$, F_0 : prime filter となるものがある. $\therefore F_0 \vdash K$ か $F_0 \nvdash A$

$\therefore K \nvdash A$

(証明終)

注1. $ZF \vdash SPFT_{Ha} \rightarrow MIT_{Ba}$

' $\hookrightarrow$ ' Fact 8 より $ZF \vdash SPFT_{Ha} \rightarrow PFT_{Ba}$

$ZF \vdash PFT_{Ba} \leftrightarrow MIT_{Ba}$

注2. Fact 7 の後の予想が正しければ

$ZF + PFT_{Ha} \vdash SCT_{LJ}^p(Kripke)$ が成立つ.

注3. $ZF \not\vdash SPFT_{Ha} \rightarrow AC$ と予想しているか. また

証明はない.

3.23 述語論理の場合.

まず, 次のことは明らかである.

$ZF \vdash SCT_{LJ}(Kripke)$

' $\hookrightarrow$ ' $ZF \vdash GCT_{LJ}(Kripke) \rightarrow SCT_{Lk}$

$ZF \vdash SCT_{Lk} \leftrightarrow MIT_{Ba}$

しかるに 1.2 で注意したように $ZF \vdash MIT_{Ba}$

よつて 成立.

$ZF + AC \vdash \Theta CT_{\omega}$ (Kripke)

であるが、例えば $SPFTha$ のような、 AC より真に弱い公理から ΘCT_{ω} (Kripke) が証明できるかは、今のところわからない。

最後に、日本語での完全性定理、強完全性定理についての文献として、前原[27]、倉田[28]、[29] がある。

参考文献

- [1] G. Takeuti: *Proof Theory*, North-Holland (2nd edition) (1987)
- [2] K. Gödel: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionalkalküls, *Monatsh. f. Math. Phys.*, 37, (1930), 349-360
- [3] L. Henkin: The completeness of the first-order functional calculus, *J.S.L.*, 14, 159-166 (1949)
- [4] G. Hasenjaeger: Eine Bemerkung zur Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikaten Kalküls der ersten Stufe, *J.S.L.*, 18, 42-48, (1953)
- [5] H. Rasiowa-R. Sikorski: A proof of the completeness theorem of Gödel, *Fund. Math.*, 37, 193-200 (1951)
- H. Rasiowa-R. Sikorski: *The Mathematics of Metamathematics*, PWN (3rd edition) (1970)

- [6] K. Schütte : Ein System des verknüpfenden Schliessens, Archiv. Math. Logik Grundlagenf., 2, 55-67, (1956)
- [7] E.W. Beth : Semantical entailment and formal derivability, Indag. Math., 19, 357-388, (1956)
- [8] H. Friedman; Systems of second order arithmetic with restricted induction I, II (abstracts), J.S.L., 41, 557-559 (1976)
- [9] S. G. Simpson : Subsystems of Z_2 and reverse mathematics, in G. Takeuti' Proof Theory, North-Holland (2nd edition), 432-446, (1987)
- [10] 田中-之 : 逆数学と2階算術, 河合文化教育研究所, (1997)
- [11] J. Łoś : Sur la théorie de Gödel pour les théories in dénombrables, Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., III, vol 2, 319-320, (1954)
- [12] J.D. Halpern and A. Lévy : The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice, in Axiomatic set theory, Proceedings of Symposia in pure Mathematics. vol XIII, Part 1, AMS, 83-134, (1967)
- [13] T. J. Jeck : The Axiom of choice, North-Holland, (1973)
- [14] P.J. Cohen : The independence of the continuum hypothesis, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 50, 1143-1148 ; 51, 105-110, (1963)
- [15] A.S. Troelstra and D. van Dalen : Constructivism in Mathematics, II, North-Holland, (1988)
- [16] P.T. Johnstone : Stone spaces, Cambridge U.P., (1982)
- [17] G. Birkhoff : Lattice theory, AMS Colloquium publications vol 25,

(3rd edition), (1973)

[18] 岩村 聡 : 束論, 共立全書 161, (1967)

[19] H. Ono: Algebraic semantics for predicate logics and their completeness, to appear in *Logic at Work* (E. Orłowska ed.)

[20] S. Kripke: Semantical analysis of intuitionistic logic, I, in: J. N. Crossley and M. A. E. Dummett (ed.), *Formal systems and recursive functions*, North-Holland, 92-130 (1965)

[21] K. Schütte: *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*, Springer, (1968)

[22] R. H. Thomason: On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate calculus, *J.S.L.*, 33, 1-7 (1968)

[23] P. H. G. Aczel: Saturated intuitionistic theories, in: H. A. Schmidt, K. Schütte, H. J. Thiele (ed.), *Contributions to mathematical logic*, North-Holland, 1-11, (1969)

[24] M. Fitting: *Intuitionistic logic, model theory and forcing*, North-Holland, (1969)

[25] C. A. Smoryński: Applications of Kripke models in: A. S. Troelstra (ed.) *Mathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis*, *Lecture Notes in Math.*, 344, Springer, (1973)

[26] A. S. Troelstra and D. van Dalen: *Constructivism in Mathematics Vol I*, North-Holland, (1988)

[27] 前原昭二：数理論理学，培風館，(1973)

[28] 倉田令二郎：完全性定理とカット消去定理，数学セミナー
1983. 1月号

[29] 倉田令二郎：数学基礎論の発生と展開 1879-1931 (下)
2つの流れと完全性定理 Löwenheim-Skolem-Herbrand-Gödel，
数学セミナー 1981. 10月号