

積分指数関数の高精度計算

日大 理工 竹 沢 照

§1. 序

理論物理学からの要求により，負の積分指数関数

$$(1) \quad -\text{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (x>0)$$

及び正の積分指数関数

$$(2) \quad \text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad (x>0)$$

を高精度で計算する必要が生じた。一方応用上最も必要とする $3 \leq x \leq 80$ の範囲でこれらの関数の計算はその形の単純さに比して非常に困難である。いくつかの方法の中で比較的有力であった James Miller & R.P. Hurst の方法を紹介する。

§2. James Miller & R. P. Hurst の方法

この方法は $e^x[-\text{Ei}(-x)]$, $e^{-x}\text{Ei}(x)$

を x_0 のまわりに Taylor 展開することによって, x での値を補間しようとするものである。

さて補間公式を導びこう。

i) 負の積分指数関数

$$(3) \quad f(x) = e^x [-\text{Ei}(-x)] \quad \text{とおくと}$$

$$f'(x) = f(x) - x^{-1}$$

$$f''(x) = f'(x) + x^{-2}$$

$$f'''(x) = f''(x) - 2!x^{-3}$$

.

.

.

.

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) + (-1)^n (n-1)! x^{-n}$$

となるから (3) を x_0 のまわりに Taylor 展開すると

$$(4) \quad e^x [-\text{Ei}(-x)] = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}$$

となる。

$$\text{但し } R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{である。}$$

この第 n 項を T_n で表わすと、

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \\ &= \frac{(x-x_0)}{n} \left[\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + (-1)^n \frac{(x-x_0)^{n-1}}{x_0^n} \right] \\ &= \frac{x-x_0}{n} \left[T_{n-1} - \frac{1}{x_0} \left(\frac{x_0-x}{x_0} \right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

更に $y=-x$ とおくと、

$$(5) \quad T_n = \frac{-y-x_0}{n} \left[T_{n-1} - \frac{1}{x_0} \left(\frac{x_0+y}{x_0} \right)^{n-1} \right], \quad n=1, 2, 3, \dots$$

なる漸化式を得る。

$$\text{但し } T_0 = e^{x_0} [-\text{Ei}(-x_0)] \quad \text{である。}$$

ii) 正の積分指数関数

$$(6) \quad g(x) = e^{-x} \text{Ei}(x) \quad \text{とおくと}$$

$$g'(x) = -g(x) + x^{-1}$$

$$g''(x) = -g'(x) - x^{-2}$$

$$g'''(x) = -g''(x) + 2!x^{-3}$$

⋮

$$g^{(n)}(x) = -(g^{(n-1)}(x) + (-1)^n(n-1)!x^{-n}).$$

となるから

$$(7) \quad e^{-x} \text{Ei}(x) = g(x) + g'(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + S_{n+1}$$

となる。

$$\text{但し } S_{n+1} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{である。}$$

この第 n 項を U_n で表わすと、

$$(8) \quad U_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= -\frac{x-x_0}{n} \left[\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(x) + (-1)^n \frac{(x-x_0)^{n-1}}{x_0^n} \right]$$

$$= \frac{-x+x_0}{n} \left[U_{n-1} - \frac{1}{x_0} \left(\frac{x_0-x}{x_0} \right)^{n-1} \right], \quad n=1, 2, 3, \dots$$

なる漸化式を得る。

$$\text{但し } U_0 = e^{-x_0} \text{Ei}(x_0) \quad \text{である。}$$

§3. 柱の計算

先ず $T_0 = e^{x_0} [-\text{Ei}(-x_0)]$ 及 $U_0 = e^{-x_0} \text{Ei}(x_0)$

を正確に計算する必要がある。この為に漸近展開

$$-e^x \text{Ei}(-x) = \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right\}$$

$$y = -x \quad \text{とおくと}$$

$$(9) \quad -e^{-y} \text{Ei}(y) = -\frac{1}{y} \left\{ 1 + \frac{1!}{y} + \frac{2!}{y^2} + \frac{3!}{y^3} + \dots \right\}$$

$$(10) \quad e^x \text{Ei}(x) = \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \dots \right\}$$

を用い、或る大きい x_0 での値を算出し、次に式 (4) - (8) を用いて x_0 より小さい x での値を計算する。我々は $x=250$ から出飛し 0.1 おきに $x=1$ まで 80 桁演算で計算した。

§4. 数値例

§3 で得た表値の中から次の 18 点を柱の値として 36 桁採用する (Table I)。すると $\left| \frac{x-x_0}{x_0} \right| \leq \frac{1}{10}$ で式 (4)-(8) を用いることになる。実際には $3 \leq x \leq 90$ で 36 桁計算するには、多くて 34 項で収束する。又、その時の精度を Table II

の下線で示しておいた。ちなみに $-Ei(-2.5)$ を式(11)で $-Ei(-90.0)$ を式(9)で36桁計算すると夫々の42項, 61項を必要とする。

Table I.

x	$-e^x Ei(-x)$	
3.3	0.44853772475673745966	68375036887038551
4.0	0.35955200786362069617	74216758266074454
4.8	0.28555485679592444356	02018829684387496
5.8	0.22283041300693192140	55758317220859704
7.1	0.17150837621207652885	13817099845361594
8.6	0.13526504113917555468	18039298738750528
10.4	0.10812829735387458447	07760943306620204
12.5	.087819020211785444084	67802706076844290
15.2	.070847191235288843521	09843463707044037
18.4	.057691153020385872666	56523985125431581
22.2	.047287467102376748383	73097922586544038
26.9	.038673006094414383778	38283615350216748
32.5	.031780403547728408193	81996075400477274
39.4	.026060371294938505175	31230628342576175
47.6	.021469579435134789629	97488185970772100
57.6	.017673571462692972412	81459899275021245
69.7	.014559220991807543601	50726387052129899
83.0	.012196982441764204367	11592944168664092

x	$e^{-x} Ei(x)$	
3.3	0.24236103273851717984	28029033001384600
4.0	0.20634564990105583310	20457588768578086
4.8	0.17655389992227549084	42258772581252656
5.8	0.14967897250602407607	25753200659265699
7.1	0.12504018238713862459	42100325504482075
8.6	0.10513653832498261252	64424367906947081
10.4	0.08830924437781962276	738399528409403675
12.5	0.07443527518977505125	637762755644184446
15.2	0.06194083826443568234	713263306800391135
18.4	0.05167187241655523698	012159097355721610
22.2	0.04317774043309917447	654746435742521112
26.9	0.03588549395492134178	108601205002846699
32.5	0.02987594411636581884	896510496082236008
39.4	0.02476696474779806275	434329427614726459
47.6	0.02058451487317134640	810685445674280919
57.6	0.01706965828524471152	442682804735724450
69.7	0.01414702600059552160	369373810071045016
83.0	0.01190641095161812873	394591372268502718

§5. プログラム

このプログラムは東京大学大型計算機センターのライブラリー開発の一つである「分子積分(KAS)」のグループで作ったものである。使用言語は HARP 5020 で、この中にはある Quadruple Precision を用いている。

プログラムは、次の三部分に分かれている。

i) $0 < x < 3$

$$e^x[-\text{Ei}(-x)] = -\{\gamma + \log x - \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} \dots\}e^x$$

$$y = -x \quad \text{とおくと}$$

$$(11) \quad e^{-y}[-\text{Ei}(-y)] = -\{\gamma + \log|y| + \frac{y}{1 \cdot 1!} + \frac{y^2}{2 \cdot 2!} + \dots\}e^{-y}$$

$$(12) \quad e^{-x}\text{Ei}(x) = \{\gamma + \log x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots\}e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & 0.57721 \ 56649 \ 01532 \ 86060 \ 65120 \ 90082 \\ & 40243 \ 10421 \ 59335 \ 93992 \ 35988 \ 05767 \\ & 23488 \ 48677 \ 26777 \ 66467 \ 09369 \ 47063 \\ & 29174 \ 67497 \end{aligned}$$

ii) $3 \leq x < 90$

式 (4) - (8)

iii) $90 \leq x$

式 (9), (10)

使用法は、必要とする算術式のところに $QEIE(X)$ と書く。

引数 x の値が正のときは $e^{-x} Ei(x)$ を、

引数 x の値が負のときは $y = -x$ として $e^y [-Ei(-y)]$ を計算して戻す。

§6. Chebyshev approximations

$$-Ei(-x) = \frac{e^{-x}}{x} \left[\{a_0 + a_1\left(\frac{10}{x}\right) + a_2\left(\frac{10}{x}\right)^2 + a_3\left(\frac{10}{x}\right)^3 + \dots\} \right]^{-1}$$

$$Ei(x) = \frac{e^x}{x} \{b_0 + b_1\left(\frac{10}{x}\right) + b_2\left(\frac{10}{x}\right)^2 + b_3\left(\frac{10}{x}\right)^3 + \dots\}$$

1) $3 \leq x \leq 4.5$ ($1.2E-27$)

a_0	=	0.1000000092	8030303384	0533524971Q+01
a_1	=	-0.9999904657	5185087375	7546818440Q-01
a_2	=	0.9995226174	5136556221	1762635800Q-02
a_3	=	-0.2984423596	8636074156	2037138752Q-02
a_4	=	0.1262574526	7786895532	5606695470Q-02
a_5	=	-0.6388857359	5230835086	1631448172Q-03
a_6	=	0.3485335880	5310592961	9283720736Q-03
a_7	=	-0.1901310475	3577941797	2429736838Q-03
a_8	=	0.9848999885	3852481068	2738170884Q-04
a_9	=	-0.4686603492	8259631952	2530270766Q-04
a_{10}	=	0.2006625868	7764700268	2442819898Q-04
a_{11}	=	-0.7629056032	6937125226	0122008178Q-05
a_{12}	=	0.2552001180	6178232498	8683183706Q-05
a_{13}	=	-0.7456266619	5624438145	8004899391Q-06
a_{14}	=	0.1889859563	2824326746	6206832086Q-06
a_{15}	=	-0.4125061637	3785917339	3644225145Q-07
a_{16}	=	0.7687469525	1139066363	2580018349Q-08
a_{17}	=	-0.1210075516	5334291278	5756130868Q-08
a_{18}	=	0.1586478527	5363484237	4915132549Q-09
a_{19}	=	-0.1700015424	1135566364	4775511898Q-10
a_{20}	=	0.1450029956	4535192569	4632626796Q-11
a_{21}	=	-0.9466598177	4163806977	4342796921Q-13
a_{22}	=	0.4441800092	2635103057	1489806735Q-14
a_{23}	=	-0.1333426672	9067314291	1084508388Q-15
a_{24}	=	0.1923535614	8902171144	9911460762Q-17

2) $4.5 < x < 8.5$ ($2.5E-26$)

$a_0 = 0.1000000000$ 8957274977 7221872624 Q+01
 $a_1 = -0.9999998447$ 6126851998 3518419797 Q-01
 $a_2 = 0.9999869846$ 9245980644 5263118055 Q-02
 $a_3 = -0.2999295724$ 9087993526 2996722429 Q-02
 $a_4 = 0.1297229501$ 1464097346 6645537136 Q-02
 $a_5 = -0.7015299993$ 3925247306 2978814420 Q-03
 $a_6 = 0.4399616695$ 1575487133 5011650767 Q-03
 $a_7 = -0.3007825435$ 8349608401 3919626775 Q-03
 $a_8 = 0.2115943785$ 8759305705 4139054621 Q-03
 $a_9 = -0.1457381126$ 0953719124 2592828118 Q-03
 $a_{10} = 0.9458322888$ 7974425225 9609757619 Q-04
 $a_{11} = -0.5627204667$ 6994553636 5038216329 Q-04
 $a_{12} = 0.3010140982$ 6141092715 3566204168 Q-04
 $a_{13} = -0.1427262973$ 7861994011 0826218070 Q-04
 $a_{14} = 0.5930018872$ 8916304639 0557803322 Q-05
 $a_{15} = -0.2136501093$ 4573967061 5942331820 Q-05
 $a_{16} = 0.6603457497$ 0328444951 1198471890 Q-06
 $a_{17} = -0.1729560697$ 9016729243 4139379246 Q-06
 $a_{18} = 0.3781399287$ 3261511588 0785327390 Q-07
 $a_{19} = -0.6766950310$ 3600742572 2706463181 Q-08
 $a_{20} = 0.9647628120$ 0126588216 6342588731 Q-09
 $a_{21} = -0.1053268388$ 1198047059 2855855428 Q-09
 $a_{22} = 0.8265402837$ 5719458273 8133809386 Q-11
 $a_{23} = -0.4149393724$ 9850265221 8372596864 Q-12
 $a_{24} = 0.1000673853$ 0089930158 7527399886 Q-13

3) $8.5 \leq x \leq 20$ ($2.3E-25$)

$a_0 = 0.1000000000$ 0001728012 6905706196 Q+01
 $a_1 = -0.9999999999$ 3605569307 4736774310 Q-01
 $a_2 = 0.9999999886$ 2506942843 9815558929 Q-02
 $a_3 = -0.2999998704$ 0836711256 9525631551 Q-02
 $a_4 = 0.1299989369$ 8631192659 7135714772 Q-02
 $a_5 = -0.7099330664$ 1383372788 3659010078 Q-03
 $a_6 = 0.4606630764$ 1203123956 5985565044 Q-03
 $a_7 = -0.3433050894$ 1077369869 9453011200 Q-03
 $a_8 = 0.2860763957$ 8373937175 4604291026 Q-03
 $a_9 = -0.2588946983$ 2761214717 8811955636 Q-03
 $a_{10} = 0.2455386608$ 0633308456 5668179337 Q-03
 $a_{11} = -0.2344773746$ 8374438385 9346292043 Q-03
 $a_{12} = 0.2168611654$ 0055180456 0052728461 Q-03
 $a_{13} = -0.1878336409$ 4535095813 8143321946 Q-03
 $a_{14} = 0.1482612635$ 0081413155 6848503896 Q-03
 $a_{15} = -0.1043092312$ 6067039727 6128645515 Q-03
 $a_{16} = 0.6417864842$ 6122856912 7539251199 Q-04
 $a_{17} = -0.3391616718$ 0771659222 8471763663 Q-04
 $a_{18} = 0.1510392229$ 8322617013 4209761090 Q-04
 $a_{19} = -0.5542320973$ 2913107902 0361925669 Q-05
 $a_{20} = 0.1627828894$ 2889964223 3781569482 Q-05
 $a_{21} = -0.3672977349$ 2696349628 1733971748 Q-06
 $a_{22} = 0.5970019198$ 6030350035 7805517081 Q-07
 $a_{23} = -0.6216233804$ 3953996921 6391603120 Q-08
 $a_{24} = 0.3111753511$ 3278919116 3511444255 Q-09

4) $20 \leq x \leq 83$ ($3.4E-23$)

```

a0 = 0.1000000000 0000000000 2594570Q+01
a1 = -0.9999999999 9999996981 3603851Q-01
a2 = 0.9999999999 9998331961 4428295Q-02
a3 = -0.2999999999 9941741383 3954863Q-02
a4 = 0.1299999999 8556070597 3224480Q-02
a5 = -0.7099999972 9692338845 7560444Q-03
a6 = 0.4609999602 7738764637 8911530Q-03
a7 = -0.3446995298 0512485225 4587331Q-03
a8 = 0.2909254349 3734174289 7173807Q-03
a9 = -0.2733061645 3025419174 6384635Q-03
a10 = 0.2826830334 5712426601 2471199Q-03
a11 = -0.3185601901 9733694887 6959617Q-03
a12 = 0.3857798208 6141460534 3445037Q-03
a13 = -0.4910597536 8978539688 7064910Q-03
a14 = 0.6351428159 3549586036 9515719Q-03
a15 = -0.7987575263 6096261355 6103357Q-03
a16 = 0.9299930859 1144490740 4358469Q-03
a17 = -0.9537774266 8810441981 9324750Q-03
a18 = 0.8190298021 9623012992 8296530Q-03
a19 = -0.5563334883 9344630214 3481832Q-03
a20 = 0.2771960195 8015024216 9732922Q-03
a21 = -0.8940823873 9657561220 7989157Q-04
a22 = 0.1393648597 7751935705 4710070Q-04

```

5) $3 \leq x \leq 4.5$ ($6.1E-24$)

```

b0 = 0.2347766975 4636307906 3387740403Q-00
b1 = 0.7365774176 0841804993 7623967554Q+01
b2 = -0.3229870334 0360299414 4211542392Q+02
b3 = 0.8942754748 0342162966 1840457333Q+02
b4 = -0.1726547022 7544019875 7285257614Q+03
b5 = 0.2479441732 4907852136 7458159812Q+03
b6 = -0.2761875960 5103284868 6530339340Q+03
b7 = 0.2460406569 7849542725 3745336585Q+03
b8 = -0.1792870369 4173778490 1110887082Q+03
b9 = 0.1086174310 3328233575 7267809723Q+03
b10 = -0.5533709996 2215529195 1603760149Q+02
b11 = 0.2388928579 8776116581 2593756719Q+02
b12 = -0.8778627972 7086348525 9985913964Q+01
b13 = 0.2751151587 3201858091 7798317545Q+01
b14 = -0.7349430365 9964650028 4313464440Q+00
b15 = 0.1668781414 3279896512 1048320720Q-00
b16 = -0.3203265665 9372662073 4023415200Q-01
b17 = 0.5154250264 3143353098 7526253688Q-02
b18 = -0.6867199997 4907353184 8323359367Q-03
b19 = 0.7443896554 7593027789 6086695313Q-04
b20 = -0.6399740656 1707441273 8731154127Q-05
b21 = 0.4199343269 0891552666 6248951111Q-06
b22 = -0.1975911971 9726767025 1955767838Q-07
b23 = 0.5937695874 4307978370 3413239984Q-09
b24 = -0.8561825729 5563993008 7217099165Q-11

```

6) $4.5 \leq x \leq 8.5$ ($4.7E-18$)

$b_0 = 0.8411792789 \quad 2066631026 \quad 10Q+00$
 $b_1 = 0.2799709847 \quad 0255220467 \quad 76Q+01$
 $b_2 = -0.2163283528 \quad 1845804661 \quad 54Q+02$
 $b_3 = 0.1089130630 \quad 6625472067 \quad 27Q+03$
 $b_4 = -0.3852630269 \quad 5206603481 \quad 18Q+03$
 $b_5 = 0.1019655113 \quad 9279443394 \quad 66Q+04$
 $b_6 = -0.2098278815 \quad 7168485076 \quad 88Q+04$
 $b_7 = 0.3447138001 \quad 1768282828 \quad 83Q+04$
 $b_8 = -0.4609006805 \quad 1574866341 \quad 15Q+04$
 $b_9 = 0.5088662352 \quad 4847830968 \quad 97Q+04$
 $b_{10} = -0.4689740097 \quad 9674495224 \quad 14Q+04$
 $b_{11} = 0.3635824966 \quad 9836551722 \quad 64Q+04$
 $b_{12} = -0.2383108011 \quad 5368665271 \quad 07Q+04$
 $b_{13} = 0.1323935317 \quad 0090689283 \quad 76Q+04$
 $b_{14} = -0.6234943329 \quad 9185002812 \quad 41Q+03$
 $b_{15} = 0.2483423499 \quad 3552307586 \quad 81Q+03$
 $b_{16} = -0.8325083691 \quad 7200019628 \quad 53Q+02$
 $b_{17} = 0.2330089970 \quad 1961593839 \quad 98Q+02$
 $b_{18} = -0.5380619298 \quad 5227604944 \quad 07Q+01$
 $b_{19} = 0.1007565099 \quad 8723850741 \quad 82Q+01$
 $b_{20} = -0.1491932318 \quad 9813995317 \quad 69Q-00$
 $b_{21} = 0.1681419335 \quad 0737414182 \quad 83Q-01$
 $b_{22} = -0.1355341307 \quad 5362976343 \quad 58Q-02$
 $b_{23} = 0.6960420673 \quad 9591278559 \quad 19Q-04$
 $b_{24} = -0.1711319620 \quad 6051018473 \quad 53Q-05$

7) $8.5 \leq x \leq 20.0$ ($6.6E-15$)

$b_0 = 0.1001857639 \quad 02508581010+01$
 $b_1 = 0.4177604794 \quad 9112833855Q-01$
 $b_2 = 0.8711991856 \quad 3486115704Q+00$
 $b_3 = -0.7660563506 \quad 4468773462Q+01$
 $b_4 = 0.4719841041 \quad 3726934267Q+02$
 $b_5 = -0.2069594076 \quad 1931271816Q+03$
 $b_6 = 0.6429667163 \quad 1210303269Q+03$
 $b_7 = -0.1282970177 \quad 3292230738Q+04$
 $b_8 = 0.7214664879 \quad 4404603278Q+03$
 $b_9 = 0.5704085627 \quad 9329709133Q+04$
 $b_{10} = -0.2675690350 \quad 7680003903Q+05$
 $b_{11} = 0.7144419442 \quad 6973440110Q+05$
 $b_{12} = -0.1395620397 \quad 6510333278Q+06$
 $b_{13} = 0.2136649151 \quad 9178958626Q+06$
 $b_{14} = -0.2636349979 \quad 9060307507Q+06$
 $b_{15} = 0.2653863462 \quad 4865606527Q+06$
 $b_{16} = -0.2187671384 \quad 7170155054Q+06$
 $b_{17} = 0.1473333971 \quad 6324954577Q+06$
 $b_{18} = -0.8042454648 \quad 6939729970Q+05$
 $b_{19} = 0.3507652339 \quad 0740472777Q+05$
 $b_{20} = -0.1194545734 \quad 0635903045Q+05$
 $b_{21} = 0.3062783853 \quad 0153689081Q+04$
 $b_{22} = -0.5563558147 \quad 5865464337Q+03$
 $b_{23} = 0.6385083191 \quad 7500024728Q+02$
 $b_{24} = -0.3482185735 \quad 4680642588Q+01$

8) $20 \leq x \leq 83$ (2.8E-14)

b ₀	=	0.10000000000	0529390912Q+01
b ₁	=	0.9999999329	3501945743Q-01
b ₂	=	0.2000040386	2774344008Q-01
b ₃	=	0.5984619133	7393781030Q-02
b ₄	=	0.2815772305	6340275513Q-02
b ₅	=	-0.7287033020	6377528412Q-02
b ₆	=	0.1366038865	5627290898Q-00
b ₇	=	-0.1749159848	3534954080Q+01
b ₈	=	0.1843141048	0942682759Q+02
b ₉	=	-0.1607282700	3931108709Q+03
b ₁₀	=	0.1169706604	1504366177Q+04
b ₁₁	=	-0.7140208729	6919139066Q+04
b ₁₂	=	0.3665610231	0530410814Q+05
b ₁₃	=	-0.1583392451	7651302427Q+06
b ₁₄	=	0.5745623472	5005162090Q+06
b ₁₅	=	-0.1744834556	9664239355Q+07
b ₁₆	=	0.4407151394	0861573869Q+07
b ₁₇	=	-0.9175180519	6185247211Q+07
b ₁₈	=	0.1554430105	2966015881Q+08
b ₁₉	=	-0.2105025406	6989138368Q+08
b ₂₀	=	0.2220769040	3492847681Q+08
b ₂₁	=	-0.1756352591	8009429501Q+08
b ₂₂	=	0.9784614521	9467371313Q+07
b ₂₃	=	-0.3420684134	8199388208Q+07
b ₂₄	=	0.5640611190	9565595774Q+06

文献

- (1) M. Kotani, A. Amemiya, E. Ishiguro & T. Kimura: Tables of Molecular Integrals, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1955.
- (2) F. E. Harris: Tables of the Exponential Integral $Ei(x)$, MTAC 11 (1957), 9-16.
- (3) J. Miller & R. P. Hurst: Simplified Calculation of the Exponential Integral, MTAC, 12 (1958), 187-193.
- (4) W. J. Cody & H. C. Thacher, Jr., Chebyshev Approximations for the Exponential Integral $Ei(x)$, Math. Comp., 23 (1969), 289-303.
- (5) K. A. Paciorek: Exponential Integral $Ei(x)$, Comm. ACM, 13 (1970), 446-447.

50E1E HARP 128,18M

```

QUADRUPLE PRECISION FUNCTION QEJE(X)
C***EXPONENTIAL INTEGRAL EX(X)*EXP(-X), -EI(-X)*EXP(X)*****QEIE 10 1
C* QUADRUPLE PRECISION (36 DIGITS) *QEIE 20
C*****BY T. IAKEZAWA*****QEIE 30
C*****QEIE 40
DIMENSION X0(18),TABLEP(18),TABLEM(18),EIPT1(9),EIPT2(9),QEIE 50
1EIMT2(9) QEIE 60
EQUIVALENCE(TABLEP(1),EIPT1(1)),(TABLEP(10),EIPT2(1)),(TABLEM(1),QEIE 70
1IIMT1(1)),(TABLEM(10),EIIMT2(1)) QEIE 80
C *** ZERO POINTS *** QEIE 90
DATA X0/3.3,4.6,4.8,5.8,7.1,8.6,10.4,12.5,15.2,18.4,22.2,26.9,32.5,QEIE 100
1,39.4,47.6,57.6,69.7,83.0/,C100/100.0/ QEIE 110
C *** MASTER VALUES OF EI(X)*EXP(-X) *** QEIE 120
DATA EIPT1/44.8537724756737459664837503688703855,35.95520078636206QEIE 130
196177421675826607445,28.555485679592444356020188296843875,22.28304QEIE 140
21300693192140557583172208597,17.1508376212076528851381709984536159QEIE 150
3,13.5265041139175554681803929873875053,10.812829735387458447077609QEIE 160
4433066202,8.78190202117854440846780270607684429,7.0847191235288843QEIE 170
55210984346370704404/ QEIE 180
DATA EIPT2/5.76911530203858726665652398512543158,4.728746710237674QEIE 190
183837309792258654404,3.86730060944143837783828361535021675,3.17804QEIE 200
2035477284081938199607540047727,2.606037129493850517531230628342576QEIE 210
317,2.1469579435134789629974881859707721,1.767357146269297241281459QEIE 220
489927502125,1.4559220991807543601507263070521299,1.219698244176420QEIE 230
543671159294416866409/ QEIE 240
C *** MASTER VALUES OF -EI(-X)*EXP(X) *** QEIE 250
DATA EIIMT1/24.236103273851717984280290330013846,20.634564990105583QEIE 260
13102045758876857809,17.6553899922275490844225877258125266,14.96789QEIE 270
2725060240760725732006592657,12.5040182387138624594210032550448208QEIE 280
3,10.5136538324982612526442436790494708,8.8309244377819622767383995QEIE 290
42840940368,7.44352751897750512563776275564418445,6.194083826443568QEIE 300
523471326330680039114/ QEIE 310
DATA EIIMT2/5.16718724165552396801215909735572161,4.317774043309917QEIE 320
144765474643574252111,3.5885493954921341781086012050028467,2.987594QEIE 330
241163658188489651049608223601,2.4766964747798062754343294276147264QEIE 340
36,2.05845148731713464081068544567428092,1.706965828524471152442682QEIE 350
480473572445,1.41470260005955216036937381007104502,1.19064109516181QEIE 360
5287339459137226850272/ QEIE 370
C *** EULER CONSTANT *** QEIE 380
DATA EULER/.577215664901532860606512090082402431/ QEIE 390
ABSX=ABS(X) QEIE 400
IF( ABSX .GE. 90. ) GO TO 11 QEIE 410
IF( ABSX .GE. 3. ) GO TO 3 QEIE 420

```

Algorithm

C ***** POWER SERIES EXPANSION ***

18=1	QEIE 430	7
QEIE=X	QEIE 440	
TERM1=X	QEIE 450	8
TERM2=X	QEIE 460	9
H=2.	QEIE 470	10
	QEIE 480	11
1 TERM2=TERM2*X/H	QEIE 490	12
TERM1=TERM2/H	QEIE 500	13
GO TO 16	QEIE 510	14
2 QEIE=QEXP(-X)*(QEIE+EULER+QLOG(ABSX))	QEIE 520	15
GO TO 14	QEIE 530	16
C ***** INTERPOLATION (EXP(-X)*EI(X),EXP(X)*(-EI(-X))) ***	QEIE 540	
3 18=2	QEIE 550	17
DO 4 I=1,18	QEIE 560	18
IF(.5*(X0(I+1)+X0(I))-ABSX) 4,4,5	QEIE 570	20
4 CONTINUE	QEIE 580	21
I=18	QEIE 590	22
5 IF(X)6,6,7	QEIE 600	23
6 XX=X0(I)-X	QEIE 610	24
XXI=1. +X/X0(I)	QEIE 620	25
TERM1=TABLEM(I)/C100	QEIE 630	26
GO TO 8	QEIE 640	27
7 XX=X0(I)-X	QEIE 650	28
XXI=XX/X0(I)	QEIE 660	29
TERM1=TABLEP(I)/C100	QEIE 670	30
8 QEIE=TERM1	QEIE 680	31
XI=1. /X0(I)	QEIE 690	32
H=1.	QEIE 700	33
TERM2=H	QEIE 710	34
9 TERM1=XX*(TERM1-TERM2*XI)/H	QEIE 720	35
GO TO 16	QEIE 730	36
10 TERM2=TERM2*XXI	QEIE 740	37
GO TO 9	QEIE 750	38
C ***** ASYMPTOTIC EXPANSION ***	QEIE 760	
11 XI=1./X	QEIE 770	39
18=3	QEIE 780	40
QEIE=1.	QEIE 790	41
H=1.	QEIE 800	42
TERM1=1.	QEIE 810	43
12 TERM1=TERM1+H*XI	QEIE 820	44
GO TO 16	QEIE 830	45
13 QEIE=QEIE/X	QEIE 840	46
14 IF(X.LT.0.) QEIE=-QEIE	QEIE 850	47
15 RETURN	QEIE 860	49
16 QEIN=QEIE+TERM1	QEIE 870	50
IF(QEIE.EQ. QEIN) GO TO(2,15,13) , 18	QEIE 880	51
QEIE=QEIN	QEIE 890	53
H=H+1.	QEIE 900	54
GO TO(1,10,12) , 18	QEIE 910	55
END	QEIE 920	56

Algorithm (continued)

-EI(-X)

EI(X)

3.0	0.9933832570	6254165580	0833601921	6764980+01	0.1304838109	4197037412	5007458286	4502220-01
4.0	0.1963087447	0056220022	6457202797	2383880+02	0.3779352409	8489064788	7486013246	6414830-02
5.0	0.4018527535	5803177455	0914217937	9586590+02	0.1148295591	2753257923	3056196981	9722030-02
6.0	0.8598976214	2439204803	5834003079	9068770+02	0.3600824521	6265865929	5394115771	7971750-03
7.0	0.1915047433	3550139595	3063148272	4569420+03	0.1154817316	1033821643	1011456043	7894940-03
8.0	0.4403798895	3483826899	7424596659	3933740+03	0.3766562284	3924901772	5579959507	5271920-04
9.0	0.1037878290	7170895876	5757322679	3622180+04	0.1244735417	8006272121	1485652381	0080200-04
10.0	0.2492228976	2418777591	3844014399	8524800+04	0.4156968929	6853242774	0285991027	8180230-05
11.0	0.6071406374	0986115079	6488728485	8515220+04	0.1400300304	2474417754	4656423790	4285730-05
12.0	0.1495953266	6397528852	2924618760	5753250+05	0.4751081824	6724939325	9461269666	1441590-06
13.0	0.3719768849	0689035604	3916452887	6347810+05	0.1621866218	8014328706	6907436707	4382950-06
14.0	0.9319251363	3965371298	8245283639	2441300+05	0.5565631111	1451821149	8992085065	1295250-07
15.0	0.2349558524	9076830357	8245745895	1611710+06	0.1918627892	1478669771	0430969674	1338710-07
16.0	0.5955609986	7083700185	0161006848	4625960+06	0.6640487249	4410427856	9612935964	2739220-08
17.0	0.1516637894	0425168844	3279743287	6246200+07	0.2306433198	8216544942	4500440704	1613040-08
18.0	0.3877904330	5974435029	9646607995	0798010+07	0.8036090344	8286776572	0721301247	1781210-09
19.0	0.9950907251	0468447600	2600253825	3063560+07	0.2807829097	0607952673	2415256457	4527850-09
20.0	0.2561565266	4056888820	4811208040	9807160+08	0.9835525290	6498816903	9698710889	4775310-10
21.0	0.6612718635	5484921362	5029198796	2721070+08	0.3453201267	1467562666	6788378457	7524310-10
22.0	0.1711446713	0036368849	7537063536	6578520+09	0.1214937895	6204372658	4077544711	9305940-10
23.0	0.4439663698	3027122086	9848523456	9711050+09	0.4282684795	6656726189	0677032627	0850400-11
24.0	0.1154115391	8491829482	8675909997	4094890+10	0.1512305893	9997057664	7430846872	4763490-11
25.0	0.3005950906	5255486898	4137760416	7345740+10	0.5348899755	3402166403	2547111808	5923790-12
26.0	0.7842940991	8981863704	5302561258	8634540+10	0.1894685885	6749782425	4964130513	5035050-12
27.0	0.2049649711	9880812364	8416529436	9597200+11	0.6720637435	2620403770	9488381845	3724870-13
28.0	0.5364511859	2314694156	0508310206	6723560+11	0.2386941511	9337331629	0937393542	6501280-13
29.0	0.1405991957	5840690473	3954836600	2198030+12	0.8487759778	3535628409	7276297941	5674040-14
30.0	0.3689732094	0727419706	4006328910	8457420+12	0.3021552010	6888125448	1582504515	3697630-14
31.0	0.9694555759	6839396616	6169107134	6617770+12	0.1076767038	6162382617	2610515766	8358110-14
32.0	0.2550043566	3577869261	4674230767	9350310+13	0.3840961801	2250668314	6123463002	5749960-15
33.0	0.6714640184	0764975587	0744052191	2031590+13	0.1371384348	4487465722	3965580585	9484500-15
34.0	0.1769803724	4116268543	1034194407	5653920+14	0.4900676118	3927877153	7062419402	7080780-16
35.0	0.4669055014	4661395445	0014629099	0063900+14	0.1752705938	9947372000	5483266909	2913520-16
36.0	0.1232852079	9120976854	3089190764	0127010+15	0.6273339009	7622415881	5263703338	4755980-17
37.0	0.3257988998	6722639967	9000168369	8134870+15	0.2247020697	5885712220	8335330790	4064050-17
38.0	0.8616388199	9657865449	4801661335	6301610+15	0.8054106914	2907498689	4442158785	5628990-18
39.0	0.2280446200	3019025953	4081671443	8768330+16	0.2886779301	5227009987	2509523839	9533870-18
40.0	0.6039718263	6112415783	5923141851	0691510+16	0.1036773261	4516569721	5064188914	5259680-18
41.0	0.1600664914	3245041110	6997054801	3283260+17	0.3723166776	4599777162	3551601652	3522140-19
42.0	0.4244796092	1368507593	6770558657	3591200+17	0.1337790881	0011775143	1439286830	6569110-19

Table II

Table II (continued)

43.0	0.1126348290	1669567602	7534238023	9567410+18	0.4809496556	9500178507	1233588463	2312020-20
44.0	0.2990444718	6323366750	5813267282	7319910+18	0.1729959874	2816477572	2785151053	1351040-20
45.0	0.7943916035	7044537715	1016830321	8331550+18	0.6225690809	4623836430	9530845334	8153710-21
46.0	0.2111342388	6478241950	0028696284	6296910+19	0.2241531759	7442997459	8394474697	1850190-21
47.0	0.5614329680	8103431115	3510971706	7692690+19	0.8074197842	7258139519	3747794056	2408060-22
48.0	0.1493630213	1129931422	5538087411	8811350+20	0.2909664190	4058423391	6576529091	6506280-22
49.0	0.3975442747	9037448360	0671699514	0844250+21	0.1048981164	2368023698	4968868087	4776600-22
50.0	0.1058563689	7131690963	0615414332	2998760+21	0.3783264029	5504590186	9896785402	1285350-23
51.0	0.2819875254	8955196082	8906373943	9818990+21	0.1365001019	1078984679	2233001366	2627820-23
52.0	0.7514792768	1543917406	9517292176	5274630+21	0.4926747149	7293445733	2924171388	0123710-24
53.0	0.2003417881	8551697959	3302179163	3673840+22	0.1778863059	7629387451	1094405874	2776850-24
54.0	0.5343023851	4407431328	0845074191	6029360+22	0.6425012932	9711422094	1162520754	0641240-25
55.0	0.1425468664	9887505153	9454605762	0959280+23	0.2321396656	2668925448	4178248513	6315270-25
56.0	0.3804324292	2262181793	1710283205	4684460+23	0.8390028962	5726101200	9098674069	1677650-26
57.0	0.1015643484	4740645166	9383650831	4798190+24	0.3033272919	5457139626	3040421072	5509880-26
58.0	0.2712338189	3154046209	8300508060	5881290+24	0.1096955100	0924024579	8691531623	3031570-26
59.0	0.7245699996	6966149239	7671131580	8756580+24	0.3968178474	5122696647	6716955380	9134850-27
60.0	0.1936182213	9292765388	2072596687	5237420+25	0.1435867565	6812578884	4298422595	0164660-27
61.0	0.5175318892	6871752520	2505408804	6998550+25	0.5197021115	8003243703	4582898449	7838920-28
62.0	0.1383722092	0267827403	5462544279	1384350+26	0.1881515229	7607283267	0354798763	0779230-28
63.0	0.3700646202	5380740141	9067990018	2411140+26	0.6813505112	4881220658	1090995898	4578640-29
64.0	0.9899640925	9744353852	9637346760	9232790+26	0.2467968559	4526945426	7185491085	4248800-29
65.0	0.2648932738	6345477605	2966979638	9259990+27	0.8941525120	6978566966	5535684528	9194850-30
66.0	0.7089712555	4362604006	9090009071	4564290+27	0.3240286570	8463997478	8940637425	7686260-30
67.0	0.1897969740	2955164575	0111245648	5470110+28	0.1174497563	8677159356	9114089968	8404160-30
68.0	0.5082177148	6941853071	1297571747	7365200+28	0.4258090299	5746394970	3148473894	7727040-31
69.0	0.1361153829	2912260485	2579826711	0038170+29	0.1544076991	7535648071	1690775428	2272140-31
70.0	0.3646352759	5797356367	1345154856	7717110+29	0.5600306285	8134384455	4126705865	4461430-32
71.0	0.9770156145	5476127150	5885500359	9829570+29	0.2031612451	6336655041	9903360006	0981930-32
72.0	0.2618382465	2240970089	5982360833	2170400+30	0.7371465348	3867867537	9736383306	5398420-33
73.0	0.7018607129	7477958487	1046180969	2759680+30	0.2675151499	4358871050	2479320326	9835120-33
74.0	0.1881709898	7662974971	4856879493	4519520+31	0.9710069409	6566590671	9817399155	1566950-34
75.0	0.5045869418	5127745585	5285199806	7859640+31	0.3529117355	5523490748	8658652798	1271120-34
76.0	0.1353314556	1555867960	6206865744	5877940+32	0.1279970898	3412536393	9270924742	4472260-34
77.0	0.3630268948	2208285666	1906863983	2818130+32	0.4848361947	9028591330	3677329704	1060480-35
78.0	0.9739891688	7717440181	2294227421	3842510+32	0.1888384028	1331406214	6883669636	0915870-35
79.0	0.2613622063	25043557515	0640392249	0372460+33	0.6133553950	2560606638	7756118853	5262720-36
80.0	0.7014600004	9047999696	2996948047	9792130+33	0.2228543258	6884729112	1814475873	5855070-36
81.0	0.1882923597	8835182313	2207389814	5348910+34	0.8098343686	4310898266	1827543295	2609940-37
82.0	0.5055107741	8401687433	7480924657	6798780+34	0.2943309876	0374938724	8911245962	9388460-37
83.0	0.1357357967	7270874502	1393873746	1804130+35	0.1069889364	2956389650	4366476060	3308220-37