

Heun's differential equation and quantum mechanics

中央大学 理工学部 数学科 竹村 剛一 (TAKEMURA Kouichi)
Department of Mathematics, Chuo University

1 序

ホイン (Heun) の微分方程式は, $\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1$ という条件のもとで

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0, \quad (1)$$

として定義される線形常微分方程式である. これはリーマン球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ において 4 点 $\{0, 1, t, \infty\}$ で確定特異点 (regular singularity) をもっているが, ホインの微分方程式はリーマン球面上で定義された 4 点に確定特異点をもつ二階線形常微分方程式の標準形にもなっている. なお, 3 点の場合がガウスの超幾何微分方程式である.

$$z(1-z)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)y' - \alpha\beta y = 0. \quad (2)$$

ホインの微分方程式において, q はアクセサリーパラメーターと呼ばれるものであり, 各特異点での解の局所的な振る舞い (特性指数) とは独立なパラメーターである. 一方, ガウスの超幾何微分方程式においては, パラメーター α, β, γ はすべて各特異点の特性指数から決まってしまう, 方程式はリジッドであるといわれる. この違いにより, ホインの微分方程式の解析は超幾何微分方程式のものと比べると格段に難しくなっている.

本稿では, ホインの微分方程式と量子力学の関係について述べていく. とくに, 楕円関数を用いてホインの微分方程式を書き換え, 有限帯ポテンシャルの理論との関係や積分変換について解説する.

2 ホインの微分方程式における特異点の合流

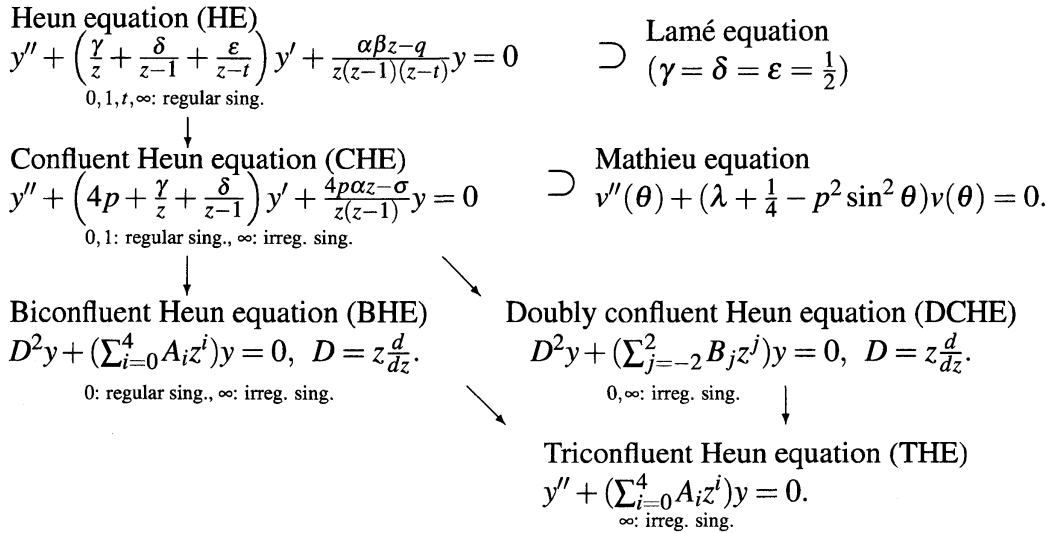
ホインの微分方程式から特異点の合流によって得られる微分方程式たちを紹介する.

ホインの微分方程式 (1) において $\varepsilon = -4pt$, $\beta = -4pt + \delta + \varepsilon - \alpha - 1$, $q = -\sigma t$ とおいて確定特異点 t を ∞ に合流させる ($t \rightarrow \infty$ とする) ことにより, 形式的に次の微分方程式が得られる.

$$y'' + \left(4p + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} \right) y' + \frac{4p\alpha z - \sigma}{z(z-1)} y = 0. \quad (3)$$

これは合流型ホイン微分方程式 (confluent Heun equation) と呼ばれるものである. $z = 0, 1$ は確定特異点のままであるが, $z = \infty$ は確定特異点でなく不確定特異点 (irregular singularity) となっている.

3 点確定特異点の場合は, ガウスの超幾何微分方程式から特異点の合流によりクンマーの合流型超幾何微分方程式が導出され, 合流型超幾何微分方程式からさらにエルミート-ウエーバーの微分方程式が導出される. 4 点確定特異点の場合にも合流型ホイン微分方程式からさまざまな微分方程式が導出され, 図示すると次のようになる.



[12] では、これらの微分方程式の各々に対して解説がなされている。量子力学との関係について、triconfluent Heun equation は 1 次元調和振動子の模型のポテンシャルを 4 次の多項式に置き換えた quartic anharmonic oscillator の定常状態を表す式そのものである。調和振動子の模型を行列に拡張した non-commutative Harmonic Oscillator については、Heun equation が現れる ([11]).

また、量子情報で用いられる Rabi 模型について、confluent Heun equation が現れることも知られている ([1]).

他にも量子力学などの物理の模型に合流型を含めたホインの微分方程式が現れる例があるが、そのうちのいくつかは [14] にて扱われている。

3 ホインの微分方程式の楕円関数による表示とスペクトル問題

$\wp(x)$ を Weierstrass の楕円関数、つまり

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(x - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2} \right), \quad (4)$$

とする。このとき $\wp(x)$ は基本周期が $(2\omega_1, 2\omega_3)$ の二重周期関数である。 $\omega_0 = 0, \omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$ とおくことで $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ は半周期となる。また、 $e_i = \wp(\omega_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とおく。 $\tau = e_3/e_1$ と比をとることにより、 $\lambda(\tau) = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}$ はある種の保型関数となることが知られており、さらに $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に対して $\lambda(\tau) = t$ となる τ が存在することが知られている。さて、ホインの微分方程式 (1) を

$$t = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}, \quad z = \frac{\wp(x) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad (5)$$

という変換を用い $\tilde{\Phi}(z) = z^{-\frac{l_1}{2}}(z-1)^{-\frac{l_2}{2}}(z-t)^{-\frac{l_3}{2}}, y\tilde{\Phi}(z) = f(x)$ とおくことにより書き換えると、次の式が得られる。

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i) - E \right) f(x) = 0. \quad (6)$$

これをホインの微分方程式の楕円関数による表示と呼ぶことにする．パラメーターの対応は以下のようにになっている．

$$\begin{aligned} l_0 &= \beta - \alpha - 1/2, \quad l_1 = -\gamma + 1/2, \quad l_2 = -\delta + 1/2, \quad l_3 = -\varepsilon + 1/2, \\ E &= (e_2 - e_1)(-4q + (-(\alpha - \beta)^2 + 2\gamma^2 + 6\gamma\varepsilon + 2\varepsilon^2 - 4\gamma - 4\varepsilon - \delta^2 + 2\delta + 1)/3 \\ &\quad + (-(\alpha - \beta)^2 + 2\gamma^2 + 6\gamma\delta + 2\delta^2 - 4\gamma - 4\delta - \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1)t/3). \end{aligned} \quad (7)$$

よって，式(1)での特性指数(局所モノドロミー)に対応するパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ は式(6)での結合定数に対応するパラメーター l_0, l_1, l_2, l_3 に，式(1)でのアクセサリパラメーター q は式(6)での固有値 E に，特異点の位置 t は楕円関数の周期 $(2\omega_1, 2\omega_3)$ の比 ω_3/ω_1 に対応している．

l_0, l_1, l_2, l_3 のうち三つが0のとき(とくに $l_1 = l_2 = l_3 = 0 (\Leftrightarrow \gamma = \delta = \varepsilon = 1/2)$ のとき)，微分方程式(6)(または微分方程式(1))はラメ(Lamé)の微分方程式と呼ばれる．

式(6)での左辺の作用素を量子力学でのハミルトニアンとみなすと，ホインの微分方程式は定常シュレディンガー方程式の形となっている． $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ かつ $\omega_3 \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \setminus \{0\}$ のときには， x が実軸上ではポテンシャルは(無限大を含む)実数値関数であって， $2\omega_1$ の周期性をもつ．さらに $l_0 = l_1 = 0$ ならばポテンシャルは実軸上で特異点をもたず，滑らかである．

一般に $l_0 = l_1 = 0$ とは限らないとき，モデルは区間 $(0, \omega_1)$ 上で定義されていて，定常状態は区間 $(0, \omega_1)$ で二乗可積分な固有関数を指すと考えられる．ここで，どのような時に二乗可積分な固有関数をもつかを， $l_0 > 1/2, l_1 > 1/2$ のときに考える．

微分方程式(6)において $x = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ はすべて確定特異点となっており，特性指数はそれぞれ $-l_i, l_i + 1$ ($i = 0, 1, 2, 3$)となっている．とくに， $x = 0$ の近傍において，微分方程式(6)は以下の形の解の基底をもつ．

$$f_1(x) = x^{l_0+1}(1 + c_2x^2 + c_4x^4 + \dots), \quad f_2(x) = x^{-l_0}(1 + c'_2x^2 + c'_4x^4 + \dots). \quad (8)$$

$f_1(x)$ は $x = 0$ のそばで二乗可積分であるが， $f_2(x)$ は $x = 0$ を端点とする積分で二乗可積分でない．また， $x = \omega_1$ の近傍においては以下の形の解の基底をもつ．

$$g_1(x) = (x - \omega_1)^{l_1+1}(1 + d_2(x - \omega_1)^2 + \dots), \quad g_2(x) = (x - \omega_1)^{-l_1}(1 + d'_2(x - \omega_1)^2 + \dots). \quad (9)$$

$g_1(x)$ は $x = \omega_1$ のそばで二乗可積分であるが， $f_2(x)$ は $x = \omega_1$ を端点とする積分で二乗可積分でない．

$f_1(x)$ を $x = \omega_1$ のそばまで解析接続したとき，それは $g_1(x)$ と $g_2(x)$ の線形結合で書けるが，解析接続した結果が $g_1(x)$ の定数倍となれば $x = \omega_1$ のそばでも二乗可積分となって区間 $(0, \omega_1)$ で二乗可積分な固有関数となる．一方，解析接続した結果に $g_2(x)$ の項が残っていれば $x = \omega_1$ のそばで二乗可積分とならない．

よって， $x = 0$ での解 $f_1(x)$ が $x = \omega_1$ での解 $g_1(x)$ の定数倍となっていることが，二乗可積分な固有関数となっている条件となる．しかし，この条件は大域的なモノドロミーを調べることになっており，一般に難しい問題である．

なお，もとのホインの微分方程式に書き換えると，特異点 $z = \infty$ での正則解が $z = 0$ においても正則となっている条件に「ほぼ」対応し，いわゆる Heun function を求める問題となる．

以下で有限帯ポテンシャルの理論を持ち出し，モノドロミーの解析について述べる．

4 有限帯ポテンシャル

Definition 1 $v(x)$ を周期的で滑らかな実関数とし, $H = -d^2/dx^2 + v(x)$ とする. $\sigma_b(H) \subset \mathbb{R}$ を以下の性質をみたすものとして定める.

$$E \in \sigma_b(H) \Leftrightarrow \text{二階微分方程式 } (H - E)f(x) = 0 \text{ の解はどれも } \mathbb{R} \text{ で有界である.}$$

集合 $\sigma_b(H)$ の閉包が整数 g を用いて $\overline{\sigma_b(H)} = [E_0, E_1] \cup [E_2, E_3] \cup \cdots \cup [E_{2g}, \infty)$ と表示されるとき, $v(x)$ を有限帯ポテンシャルと呼ぶ.

Definition 2 $H = -d^2/dx^2 + v(x)$ に対して,

$$A = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2g+1} + \sum_{j=0}^{2g-1} b_j(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2g-1-j} \quad (10)$$

という奇数階の微分作用素で H と可換 ($[A, H] = 0$) になるものが存在するとき, $v(x)$ を代数幾何的有限帯ポテンシャルと呼ぶ.

この可換性での $v(x)$ の満たすべき方程式は定常高階 KdV 方程式と等価になることが知られている ([22]). 驚くべきことに, 有限帯ポテンシャルというスペクトルの様子と代数幾何的有限帯ポテンシャルという微分作用素の可換性が対応している. すなわち, 次の定理が 1970 年代に Novikov らによって示されている ([22]).

Theorem 1 $v(x)$ が周期的で滑らかな実関数であるという仮定のもとで, $v(x)$ が有限帯ポテンシャルであることと $v(x)$ が代数幾何的有限帯ポテンシャルであることは同値である.

代数幾何的有限帯ポテンシャルの例について, 次のものがある.

Theorem 2 (i) (1940 年, Ince [6]) ラメの微分方程式に対応する関数 $l_3(l_3+1)\wp(x+\omega_3)$ は, $l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega_3 \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \setminus \{0\}$ のときに有限帯ポテンシャルとなる.

(ii) (1990 年頃, Treibich, Verdier [23]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ のとき, 関数 $\sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)$ は代数幾何的有限帯ポテンシャルとなる.

とくに (ii) での関数は Treibich-Verdier ポテンシャルと呼ばれている. 引き続き, Gesztesy と Weikard([5]) や Smirnov([13]) らにより研究がされてきた. 本稿では, (ii) についての Treibich と Verdier のものとは別の一つの証明の指針と, 関連するモノドロミーの表示式について概観する. ([15] にも解説がある.)

5 解の積がみたす微分方程式の特殊解と代数幾何的有限帯ポテンシャル

ホインの微分方程式の楕円関数による表示

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i) - E\right)f(x) = 0 \quad (11)$$

を調べていく. $h(x)$ を任意の二つの解の積とすると, これは次の三階の微分方程式を満たしている.

$$\left(\frac{d^3}{dx^3} - 4 \left(\sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp(x+\omega_i) - E \right) \frac{d}{dx} - 2 \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp'(x+\omega_i) \right) h(x) = 0. \quad (12)$$

この微分方程式において $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ という条件のもとでは, すべての E について 0 でない二重周期関数を解にもつことが示される. l_i と $-l_i-1$ ($i=0,1,2,3$) を入れ替えても微分方程式 (11) は同じ形となっているので, l_i を 0 以上にとった形での命題を述べる.

Proposition 3 ([16, Proposition 3.5]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると, 微分方程式 (12) は以下のように表示される二重周期関数の解をもつ.

$$\Xi(x, E) = c_0(E) + \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{l_i-1} b_j^{(i)}(E) \wp(x+\omega_i)^{l_i-j}. \quad (13)$$

さらに, 係数 $c_0(E), b_j^{(i)}(E)$ を, E の多項式としてとることができる.

この命題自体は各特異点 $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ での局所モノドロミーが自明になることなどを用いて証明される. また,

$$Q(E) = \Xi(x, E)^2 \left(E - \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp(x+\omega_i) \right) + \frac{1}{2} \Xi(x, E) \frac{d^2 \Xi(x, E)}{dx^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d \Xi(x, E)}{dx} \right)^2 \quad (14)$$

とおくと, 右辺を x について微分すると式 (12) によって 0 となるので, $Q(E)$ は x に依存せず, E の多項式となっている.

例として, $l_0=1, l_1=l_2=l_3=0$ のとき, 関数 $\Xi(x, E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x, E) = \wp(x) + E, \quad Q(E) = (E+e_1)(E+e_2)(E+e_3), \quad (15)$$

と計算される. また, $l_0=2, l_1=l_2=l_3=0$ のとき, 関数 $\Xi(x, E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x, E) = 9\wp(x)^2 + 3E\wp(x) + E^2 - \frac{9}{4}g_2, \quad Q(E) = (E^2 - 3g_2) \prod_{i=1}^3 (E - 3e_i), \quad (16)$$

と計算される. ここで $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$ とおいている.

代数幾何的有限帯ポテンシャルに関して, 次が成り立つ.

Theorem 4 ([17, Theorem 3.1]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を仮定する. $v(x) = \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp(x+\omega_i)$

とおき, $\Xi(x, E) = \sum_{j=0}^g a_j(x) E^{g-j}$ と書いておく. $(2g+1)$ 階の微分作用素 A を次のように定義する.

$$A = \sum_{j=0}^g \left\{ a_j(x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} a_j(x) \right) \right\} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) \right)^{g-j}. \quad (17)$$

このとき, A は作用素 $H = -d^2/dx^2 + v(x)$ と可換になる. つまり, 関数 $v(x) = \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp(x+\omega_i)$ は代数幾何的有限帯ポテンシャルである.

多項式 $Q(E)$ の変数 E に作用素 $H = -d^2/dx^2 + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)$ を代入した微分作用素 $Q(H)$ と微分作用素 A の間には関係式

$$A^2 + Q(H) = 0. \quad (18)$$

が成り立っている ([17, Proposition 3.2]).

6 解の積分表示とモノドロミーの超楕円積分による表示式

関数 $\Xi(x, E)$ と $Q(E)$ を用いることによって微分方程式 (11) の解の積分表示を得られる.

Proposition 5 ([16, Proposition 3.7]) $\Xi(x, E)$ を Proposition 3 で定まる関数とし, $Q(E)$ を式 (14) で定まる多項式とすると, 関数

$$\Lambda(x, E) = \sqrt{\Xi(x, E)} \exp \int \frac{\sqrt{-Q(E)}}{\Xi(x, E)} dx, \quad (19)$$

は微分方程式 (11) の解となる.

微分方程式 (11) の周期的より, 関数たち $\Lambda(x+2\omega_1, E)$, $\Lambda(x+2\omega_3, E)$ も微分方程式 (11) の解となる. 関数たち $\Lambda(x+2\omega_1, E)$, $\Lambda(x+2\omega_3, E)$ がもとの解 $\Lambda(x, E)$ たちを用いてどのように表示できるのかという問題は, リーマン球面上のホインの微分方程式 (式 (1)) においては 2 点 $\{0, \infty\}$ や 2 点 $\{0, 1\}$ のまわりのモノドロミーを求める問題, すなわちモノドロミーの大域的なようすを探求する問題になっている. 次の定理はこの問題に対する一つの明示的な結果を与えている.

Theorem 6 ([17, 18]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を仮定する. 関数 $\Xi(x, E)$ を

$$\Xi(x, E) = c(E) + \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{l_i-1} a_j^{(i)}(E) \left(\frac{d}{dx} \right)^{2j} \wp(x + \omega_i) \quad (20)$$

と表示しておき,

$$a(E) = \sum_{i=0}^3 a_0^{(i)}(E) \quad (21)$$

とおく. E_0 は $Q(E_0) = 0$ をみたす数とすると, ある $q_1, q_3 \in \{0, 1\}$ について $\Lambda(x+2\omega_k, E_0) = (-1)^{q_k} \Lambda(x, E_0)$ ($k=1, 3$) が成立する. そして, この E_0 と q_1, q_3 を用いるとすべての E に対して

$$\Lambda(x+2\omega_k, E) = (-1)^{q_k} \Lambda(x, E) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{E_0}^E \frac{-2\eta_k a(\tilde{E}) + 2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} \right), \quad (22)$$

が $k=1, 3$ について成立する. ここで $\eta_k = \zeta(\omega_k)$ ($k=1, 3$), $\zeta(x)$ は Weierstrass のゼータ関数である.

例として, $l_0 = 1, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ のとき, $E_0 = -e_2$ とおくと $Q(E_0) = 0$ と $\Lambda(x, E_0) = -\Lambda(x + 2\omega_1, E_0) = -\Lambda(x + 2\omega_3, E_0)$ が成立する. このときの式 (22) は, $k = 1, 3$ に対して以下のような第二種楕円積分によるモノドロミーの表示式となる.

$$\Lambda(x + 2\omega_k, E) = -\Lambda(x, E) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-e_2}^E \frac{2\omega_k \tilde{E} - 2\eta_k}{\sqrt{-(\tilde{E} + e_1)(\tilde{E} + e_2)(\tilde{E} + e_3)}} d\tilde{E} \right). \quad (23)$$

また, $l_0 = 2, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ のとき, $E_0 = \sqrt{3g_2}$ とおくと $Q(E_0) = 0$ と $\Lambda(x, E_0) = \Lambda(x + 2\omega_1, E_0) = \Lambda(x + 2\omega_3, E_0)$ が成立する. このときの式 (22) は, $k = 1, 3$ に対して以下のような種数 2 の第二種超楕円積分によるモノドロミーの表示式となる.

$$\Lambda(x + 2\omega_k, E) = \Lambda(x, E) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\sqrt{3g_2}}^E \frac{\omega_k(2\tilde{E}^2 - 3g_2) - 6\eta_k \tilde{E}}{\sqrt{-(\tilde{E}^2 - 3g_2) \prod_{i=1}^3 (\tilde{E} - 3e_i)}} d\tilde{E} \right). \quad (24)$$

7 Hermite-Krichever 仮設法と超楕円積分を楕円積分に帰着させる式

$\sigma(x)$ を Weierstrass のシグマ関数とし, 楕円 Baker-Akhiezer 関数 $\Phi_i(x, \alpha)$ を

$$\Phi_i(x, \alpha) = \frac{\sigma(x + \omega_i - \alpha)}{\sigma(x + \omega_i)} \exp(\zeta(\alpha)x), \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (25)$$

によって定める. 微分方程式の解が

$$f(x) = \exp(\kappa x) \left(\sum_{i=0}^3 \sum_j \tilde{b}_j^{(i)} \left(\frac{d}{dx} \right)^j \Phi_i(x, \alpha) \right) \quad (26)$$

という型に書けると仮定してその解などを調べる手法を Hermite-Krichever 仮設法と呼ぶ. 解がこのように書けたとしたら, 解を周期 $2\omega_k$ ($k = 1, 3$) だけずらしたときの挙動は

$$f(x + 2\omega_k) = \exp(-2\eta_k \alpha + 2\omega_k \zeta(\alpha) + 2\kappa \omega_k) f(x) \quad (27)$$

と記述することができる.

以下で述べる定理は, ホインの微分方程式の楕円関数による表示 (式 (11)) において, $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば Hermite-Krichever 仮設法の形で表示できる解が存在することなどを主張している.

Theorem 7 ([18]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. ある多項式 $P_1(E), \dots, P_4(E)$ が存在し, $P_2(E) \neq 0$ ならばホインの微分方程式の楕円関数表示 (式 (11)) の 0 でない解で

$$f(x) = \exp(\kappa x) \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{l_i-1} \tilde{b}_j^{(i)} \left(\frac{d}{dx} \right)^j \Phi_i(x, \alpha) \right) \quad (28)$$

という形で表示できる解が存在する. α と κ は

$$\wp(\alpha) = \frac{P_1(E)}{P_2(E)}, \quad \kappa = \frac{P_3(E)}{P_4(E)} \sqrt{-Q(E)} \quad (29)$$

と表示でき、式(27)により、解 $f(x)$ を周期ぶんずらした際のモノドロミーが記述される。 $P_2(E) = 0$ を満たすときは、

$$f(x) = \exp(\kappa x) \left(\bar{c} + \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{l_i-2} \bar{b}_j^{(i)} \left(\frac{d}{dx} \right)^j \wp(x + \omega_i) + \sum_{k=1}^3 \bar{c}_k \frac{\wp'(x)}{\wp(x) - e_k} \right) \quad (30)$$

と表示できる解が存在する。

また、モノドロミーを調べるためには α と κ の値を調べることで、つまり式(29)での多項式 $P_1(E), \dots, P_4(E)$ を調べる必要がある。これらの多項式の計算法については [8, 18] にて記述されている。

例として $l_0 = 1, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合、式(28)は以下の形に書き直される。

$$f(x) = \exp(\kappa x) \left(\tilde{b}_0^{(0)} \Phi_0(x, \alpha) \right). \quad (31)$$

この場合は、どんな E についても上の形の非自明な ($\tilde{b}_0^{(0)} \neq 0$ となる) 解が存在し、 α, κ は以下の式をみたしている。

$$\wp(\alpha) = -E, \quad \kappa = 0. \quad (32)$$

$l_0 = 2, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合、式(28)は以下の形に書き直される。

$$f(x) = \exp(\kappa x) \left(\tilde{b}_0^{(0)} \Phi_0(x, \alpha) + \tilde{b}_1^{(0)} \left(\frac{d}{dx} \right) \Phi_0(x, \alpha) \right). \quad (33)$$

α, κ と E の関係は、

$$\wp(\alpha) = e_1 - \frac{(E - 3e_1)(E + 6e_1)^2}{9(E^2 - 3g_2)}, \quad \kappa = \frac{2}{3(E^2 - 3g_2)} \sqrt{-(E^2 - 3g_2) \prod_{i=1}^3 (E - 3e_i)}, \quad (34)$$

となっており、 $E \neq \pm\sqrt{3g_2}$ のときには式(33)の形の解が存在する。

ホインの微分方程式の大域的モノドロミーを表す式として、超楕円積分によるもの(式(22))と Hermite-Krichever 仮設法によるもの(式(27))を紹介してきた。これらを見比べることで超楕円積分を楕円積分に帰着させる式が導出される。例として $l_0 = 2, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合には、

$$\xi = e_1 - \frac{(E - 3e_1)(E + 6e_1)^2}{9(E^2 - 3g_2)}, \quad (35)$$

という変数変換により、種数 2 の超楕円積分を楕円積分に帰着する 2 つの式

$$-\frac{1}{2} \int_{\infty}^E \frac{3\tilde{E}}{\sqrt{-(\tilde{E}^2 - 3g_2)(\tilde{E}^3 - 9g_2\tilde{E}/4 - 27g_3/4)}} d\tilde{E} = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{3e_1}^E \frac{\tilde{E}^2 - 3g_2/2}{\sqrt{-(\tilde{E}^2 - 3g_2)(\tilde{E}^3 - 9g_2\tilde{E}/4 - 27g_3/4)}} d\tilde{E} = \\ -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{-(E^3 - 9g_2E/4 - 27g_3/4)}{(E^2 - 3g_2)}} + \int_{e_1}^{\xi} \frac{\tilde{\xi} d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}}, \end{aligned} \quad (37)$$

が得られる。

8 積分変換とモノドロミー

本章では、ホインの微分方程式の積分変換を用いて、有限帯ポテンシャルの結果を別のパラメーターのポテンシャルに応用する。まず、ホインの微分方程式 (1) の積分変換についての結果を述べる。これは Kazakov, Slavyanov が本質的に得ていたが ([7]), ミドルコンボリューションの研究において再発見されたものである ([19])。

Theorem 8 ([7, 19]) $y(w)$ は以下のホインの微分方程式の解とする。

$$\frac{d^2 y}{dw^2} + \left(\frac{\gamma'}{w} + \frac{\delta'}{w-1} + \frac{\varepsilon'}{w-t} \right) \frac{dy}{dw} + \frac{\alpha' \beta' w - q'}{w(w-1)(w-t)} y = 0. \quad (38)$$

すると,

$$\tilde{y}(z) = \int_{[C_z, C_i]} y(w) (z-w)^{-\alpha} dw \quad (39)$$

は以下のホインの微分方程式の解となる。

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-t} \right) \frac{d\tilde{y}}{dz} + \frac{\alpha \beta z - q}{z(z-1)(z-t)} \tilde{y} = 0. \quad (40)$$

ここで, $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ とし, $[C_z, C_i] = C_z C_i C_z^{-1} C_i^{-1}$ は $w=z$ と $w=i$ をめぐる *Pochhammer* の径路とし, パラメーターたちは以下の関係を満たすものである。

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma - \alpha + 1, \delta' = \delta - \alpha + 1, \varepsilon' = \varepsilon - \alpha + 1, \beta' = \beta - \alpha + 1, \\ \alpha' &= 2 - \alpha, q' = q + (\alpha - 1)(\varepsilon + \delta t + (\gamma - \alpha)(t + 1)). \end{aligned} \quad (41)$$

この定理では、オイラー型の積分変換によって異なるパラメーターのホインの微分方程式の解がつながることを示されており、知られている解を積分変換で移すことによって未知の解が得られる可能性がある。実際、ホインの微分方程式の多項式型の解を積分変換で移すと、特異点 $\{0, 1, t, \infty\}$ のいずれかが見かけの特異点となるホインの微分方程式の解が得られることが知られている ([20])。

ここで、積分変換を楕円関数を用いた形に書き換える。コシグマ関数

$$\sigma_i(x) = \exp(-\eta_i x) \frac{\sigma(x + \omega_i)}{\sigma(\omega_i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (42)$$

を用いると、Theorem 8 は次のように書き換えられる。

Proposition 9 ([20, 21]) $\alpha_0 \in \{-l_0, l_0 + 1\}$ とし,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\alpha_0 - l_1 - l_2 - l_3}{2}, l'_0 = \frac{-\alpha_0 - l_1 - l_2 - l_3}{2} - 1, l'_1 = \frac{\alpha_0 + l_1 - l_2 - l_3}{2} - 1, \\ l'_2 &= \frac{\alpha_0 - l_1 + l_2 - l_3}{2} - 1, l'_3 = \frac{\alpha_0 - l_1 - l_2 + l_3}{2} - 1, \end{aligned} \quad (43)$$

とおく。 $\tilde{f}(x)$ は微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l'_i (l'_i + 1) \wp(x + \omega_i) - E \right) \tilde{f}(x) = 0 \quad (44)$$

をみたすとする。このとき、

$$f(x) = \sigma(x)^{\alpha_0} \sigma_1(x)^{-l_1} \sigma_2(x)^{-l_2} \sigma_3(x)^{-l_3}. \quad (45)$$

$$\int_I \tilde{f}(y) \sigma(y)^{l'_0+1} \sigma_1(y)^{l'_1+1} \sigma_2(y)^{l'_2+1} \sigma_3(y)^{l'_3+1} (\sigma(x+y) \sigma(x-y))^{-\eta} dy$$

は微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp(x+\omega_i) - E \right) f(x) = 0 \quad (46)$$

をみたす。(経路 I の取り方については [20] を参照のこと)

この命題において、固有値 E は保存されていることを注意しておく。

ところで、 $\tilde{f}_1(x, E), \tilde{f}_2(x, E)$ を微分方程式 (44) の解の基底とする。そして、 $x \rightarrow x + 2\omega_k$ ($k \in \{1, 3\}$) という解析接続に関するモノドロミー行列を $\tilde{M}_{2\omega_k}(E)$ と書くことにする。つまり、

$$(\tilde{f}_1(x+2\omega_k, E), \tilde{f}_2(x+2\omega_k, E)) = (\tilde{f}_1(x, E), \tilde{f}_2(x, E)) \tilde{M}_{2\omega_k}(E). \quad (47)$$

また、微分方程式 (46) の解についての $x \rightarrow x + 2\omega_k$ ($k \in \{1, 3\}$) という解析接続に関するモノドロミー行列を $M_{2\omega_k}(E)$ と記すことにする。微分方程式 (44, 46) において一回微分の項がないことから $\det \tilde{M}_{2\omega_k}(E) = \det M_{2\omega_k}(E) = 1$ が従うが、トレースについて次の定理が成り立つ。

Theorem 10 ([20, 21]) $\operatorname{tr} \tilde{M}_{2\omega_k}(E) = \operatorname{tr} M_{2\omega_k}(E)$, ($k = 1, 3$) が成り立つ。

この系として、積分変換により解の周期性が保たれることがわかる。つまり、次が導かれる。

Corollary 11 $k \in \{1, 3\}$ とする。微分方程式 (44) の解 $\tilde{f}_k(x, E)$ で $\tilde{f}_k(x+2\omega_k, E) = C_k(E) \tilde{f}_k(x, E)$ をみたすものが存在すれば、同じ $C_k(E)$ に対して微分方程式 (46) の解 $f_k(x, E)$ で $f(x+2\omega_k, E) = C_k(E) f_k(x, E)$ をみたすものが存在する。つまり、積分変換により解の周期性は保たれる。

代数幾何的有限帯ポテンシャルとなる場合に積分変換に考えると、次がいえる。

Proposition 12 $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z} + 1/2$ と $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 \in 2\mathbb{Z} + 1$ を仮定する。 $\alpha_0 \in \{-l_0, l_0 + 1\}$ とおき、 $\eta, l'_0, l'_1, l'_2, l'_3$ を式 (43) で定めると $\eta \in \mathbb{Z} + 1/2$ かつ $l'_0, l'_1, l'_2, l'_3 \in \mathbb{Z}$ が成り立つ。このとき微分方程式 (44) の解は有限帯ポテンシャルの方法で求まるが、その解を $\tilde{f}(x)$ とすると、式 (45) で与えられる関数 $f(x)$ は微分方程式 (46) の解となる。また、 $a(E), c(E), E_0, q_1, q_3$ を、 $l'_0, l'_1, l'_2, l'_3 \in \mathbb{Z}$ に対して Theorem 6 にて決まるものとし、 $M_{2\omega_k}(E)$ ($k = 1, 3$) を微分方程式 (46) におけるシフト $x \rightarrow x + 2\omega_k$ に関するモノドロミー行列とすると、以下の表示が成り立つ。

$$\operatorname{tr} M_{2\omega_k}(E) = 2(-1)^{q_k} \cos \left(\int_{E_0}^E \frac{\omega_k c(\tilde{E}) - \eta_k a(\tilde{E})}{\sqrt{Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} \right). \quad (48)$$

これをもとのホインの微分方程式の話にもどすと, $\gamma', \delta', \varepsilon', \beta' - \alpha' \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ で q' が一般の場合での有限帯ポテンシャルによる解を積分変換によって移すと, $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha + 1/2, \beta + 1/2 \in \mathbb{Z}$ で q が一般の場合の解が得られることとなる.

例として $l_0 = 3/2, l_1 = l_2 = l_3 = 1/2$ の場合を考える. $\alpha_0 = 5/2$ ととると $\eta = 1/2, l'_0 = -3, l'_1 = l'_2 = l'_3 = 0$ となる. $(l'_0, l'_1, l'_2, l'_3) = (-3, 0, 0, 0)$ のときの微分方程式は $(l'_0, l'_1, l'_2, l'_3) = (2, 0, 0, 0)$ のときのものと一致するので, $l_0 = 3/2, l_1 = l_2 = l_3 = 1/2$ の場合の解 $f_k(x, E)$ ($k = 1, 3$) で以下の性質をみたすものが存在する.

$$f_k(x + 2\omega_k, E) = f_k(x, E) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\sqrt{3g_2}}^E \frac{\omega_k(2\tilde{E}^2 - 3g_2) - 6\eta_k \tilde{E}}{\sqrt{-(\tilde{E}^2 - 3g_2) \prod_{i=1}^3 (\tilde{E} - 3e_i)}} d\tilde{E} \right). \quad (49)$$

9 おわりに

本稿ではホインの微分方程式がどのような形で量子力学の模型と関係するかを解説した. とくに楕円関数を用いた表示, 有限帯ポテンシャルとの関連, そして積分変換について議論した.

ここで, 今度の研究進展が期待されるものとして, ホインの微分方程式の拡張と考えられる2つの方程式を紹介しておく.

1つは量子パンルヴェ第六方程式であるが, これは非定常ホイン方程式 (non-stationary Heun equation) とも呼ばれるものである. ホインの微分方程式は楕円関数を用いると定常シュレディンガー方程式と捉えることができるが, $\tau/\sqrt{-1}$ ($\tau = \omega_3/\omega_1$) を時間変数と思って非定常非自励シュレディンガー方程式

$$\left\{ A \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1) \wp(x + \omega_i) \right\} f(x) = 0, \quad (50)$$

($\omega_0 = 0, \omega_1 = a/2, \omega_2 = -a(1 + \tau)/2, \omega_3 = a\tau/2, a$ は固定)

という式を考える. これは, 通常のパンルヴェ第六方程式の正準形式における表示を量子化したものともみなせ, 名古屋 ([9]) により精力的に研究されている. Zabrodin と Zotov ([24]) はこれに関連して量子 Calogero-Painlevé 対応を提唱した. また, この方程式の特別な場合は共形場理論や可解格子模型などで現れている ([2, 3, 4]).

他方, ホインの微分方程式の多変数化として Inozemtsev 系を考えることができる. ここで BC_N 型の Inozemtsev 系とは以下の形のハミルトニアンで与えられる N 粒子量子系である.

$$H = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2l(l+1) \sum_{1 \leq j < k \leq N} (\wp(x_j - x_k) + \wp(x_j + x_k)) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1) \wp(x_j + \omega_i). \quad (51)$$

$N = 1$ の場合, このハミルトニアンの固有関数を表す式がホインの微分方程式の楕円関数による表示となっている. また, BC_N 型の Inozemtsev 系は量子 Liouville 可積分であることが知られている. つまり, $k = 2, \dots, N$ に対して $H_k = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{2k} + (\text{lower terms})$ の形

の微分作用素で, H も含めて互いに可換になるもの, つまり $[H, H_k] = 0$ と $[H_{k_1}, H_{k_2}] = 0$ ($k, k_1, k_2 = 2, \dots, N$) が成り立つようなものが存在する ([10]). しかし, 量子 Liouville 可積分であるからといって解が簡単に求まるものでない. $N = 1$ の場合に対応するホインの微分方程式の場合でさえ, 解の大域的な様子は特別なときでしかわかっていない.

参考文献

- [1] D. Braak, On the Integrability of the Rabi Model, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011), 100401-100404.
- [2] V. Bazhanov, V. Mangazeev, Eight-vertex Model and Non-stationary Lamé Equation, *J. Phys. A* **38** (2005), L145-L153.
- [3] P. Etingof and A. Kirillov Jr., Representations of affine Lie algebras, parabolic differential equations, and Lamé functions, *Duke Math. J.* **74** (1994), 585-614.
- [4] V. Fateev, A. Litvinov, A. Neveu, E. Onofri, A differential equation for a four-point correlation function in Liouville field theory and elliptic four-point conformal blocks, *J. Phys. A* **42** (2009), 304011.
- [5] F. Gesztesy and R. Weikard, Treibich-Verdier potentials and the stationary (m)KdV hierarchy, *Math. Z.* **219** (1995), 451-476.
- [6] E. L. Ince, Further investigations into the periodic Lamé functions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **60** (1940), 83-99.
- [7] A. Kazakov, S. Slavyanov, Integral relations for special functions of the Heun class, *Theoret. and Math. Phys.* **107** (1996), 733-739.
- [8] R. Maier, Lamé polynomials, hyperelliptic reductions and Lamé band structure, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, **366** no. 1867 (2008), 1115-1153.
- [9] H. Nagoya, Hypergeometric solutions to Schrodinger equations for the quantum Painleve equations, *J. Math. Phys.* **52** (2011), 083509.
- [10] T. Oshima, Completely integrable systems with a symmetry in coordinates, *Asian J. Math.*, **2** (1998), 935-955.
- [11] A. Parmeggiani, Spectral Theory of Non-commutative Harmonic Oscillators: An Introduction. Lecture Notes in Math. **1992**, Springer, 2010.
- [12] A. Ronveaux (ed.), Heun's differential equations, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1995.
- [13] A. Smirnov, Elliptic solitons and Heun's equation, *The Kowalevski property*, 287-305, CRM Proc. Lecture Notes, **32**, Amer. Math. Soc., 2002.

- [14] S. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions.*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 2000.
- [15] 竹村 剛一, ホインの微分方程式, 数学, **60** (2008), 272-294.
- [16] K. Takemura, The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method, *Comm. Math. Phys.*, **235** (2003), 467-494.
- [17] K. Takemura, The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **11** (2004), 21-46.
- [18] K. Takemura, The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system IV: the Hermite-Krichever Ansatz, *Comm. Math. Phys.*, **258** (2005), 367-403.
- [19] K. Takemura, Middle convolution and Heun's equation, *SIGMA* **5** (2009), 040, 22 pages.
- [20] K. Takemura, Integral transformation of Heun's equation and some applications, Preprint, arXiv:1008.4007 [math.CA]
- [21] K. Takemura, Integral transformation and Darboux transformation of Heun's differential equation, *Nonlinear and modern mathematical physics*, AIP Conference Proceedings **1212** (2010), 58-65.
- [22] 田中俊一, 伊達悦朗, KdV 方程式, 紀伊國屋書店, 1979.
- [23] A. Treibich and J. Verdier, Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires, *Duke Math. J.*, **68** (1992), 217-236.
- [24] A. Zabrodin and A. Zotov, Quantum Painleve-Calogero correspondence for Painleve VI, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073508.