

等方性乱流の準定常

エネルギースペクトル

関学大 理 田辺憲一・今村勤

§ 1 まえがき

乱流の統計理論の一つの方法として Wiener-Hermite 展開法^{1)~4)}がある。その利点としては、(1)この展開はガウス分布プラス補正項という展開であり、ガウス分布に近い現象を扱うのに適している。従って又高次近似への移行も機械的である。

(2)確率関数そのものを扱うので、幾つかの相関関数だけでなく一旦積分核が判ると全ての統計量が計算できる。又、このとき負のエネルギーのような不都合は起らない。(3)時間的に変る ideal random function を用いた展開では、適当にその時間依存性もとる事により、非線形の効果のうち大部分もガウス分布に‘くりこみ’、かなり長時間、展開による近似を保たせる可能性がある。

もし未知の確率分布がガウス分布に近い事が判っていれば時間的に変る ideal random function を適当にとつて必ずその

未知の分布が展開の始めの数項でよく近似される筈である。
よく発達した一様な乱流では、実験的に速度分布は複合ガウス分布に近い事が知られている。^{5), 6)} 一方理論的には次元解析からコルモゴロフ・スペクトル等が提唱されているが、その仮定となるエネルギーの単位時間あたりの供給率 ε と粘性率 ν との独立性には疑問の余地がある。^{7), 8)} 従って実際に運動方程式の解として、かなり長時間 Wiener-Hermite 展開の数項でよく近似される準定常的特解が得られるかどうか、又その解のエネルギー・スペクトルはどのようなものか、を調べる事は有意義と思われる。‘かなり長時間’とは具体的にどの程度かという事だが、例えば準定常エネルギー・スペクトルを求める時、その準定常スペクトルに近いスペクトルから出発した解が準定常と考えられるスペクトルの形に近づく傾向を示す事が判る位長い間近似が保たればよいであろう。

以下に於て、動粘性率 ν を 0.01 にとり、系の代表的な速さの単位 U_0 、波数の単位 k_0 が夫々 1 、 0.5 位である様な初期値をとる。従って乱れのレイノルズ数は大体 10^2 である。

圧縮性流体に対する Wiener-Hermite 展開の概要を § 2 に述べ、ideal random function の適当な時間的变化を導入する。§ 3 で展開の始めの二項をとって初期値問題の数値積分を行い、その結果を § 4 で議論する。

§ 2. 非圧縮性流体に対する Wiener-Hermite 展開

非圧縮性流体に対して、速度場 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ のフーリエ変換に対する Navier-Stokes 方程式は

$$(\partial_t + \nu k^2) \Delta_{ab}(\vec{k}) u_b(\vec{k}, t) + i \Delta_{ab}(\vec{k}) \int u_c(\vec{k} - \vec{k}', t) k'_c u_b(\vec{k}', t) d\vec{k}' = 0 \quad (1)$$

である。ここで $\Delta_{ab}(\vec{k}) = [k^2 \delta_{ab} - k_a k_b] / k^2$ であり、Einstein の和の約束を使う、例えば (1) に於て b, c について 1 から 3 までの和をとるものとする。

時間的に変る ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開により $\vec{u}(\vec{k}, t)$ は、空間的な等方性を仮定して

$$u_a(\vec{k}, t) = K_{ab}^{(1)}(\vec{k}, t) H_b^{(1)}(\vec{k}, t) + i \int K_{abc}^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', \vec{k}', t) H_b^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', \vec{k}', t) d\vec{k}' + \dots \quad (2)$$

の様に書ける。 $K^{(n)}$ は普通の関数、 $H^{(n)}$ は時間的に変る ideal random function の Hermite 汎関数である。 $H^{(n)}$ の充すべき性質は例えば $\langle \dots \rangle$ を統計的平均を表わすとして、

$$\langle H_{a_1 a_2 \dots a_n}^{(n)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n) \rangle = 0$$

$$\langle H_a^{(1)}(\vec{k}) H_b^{(1)}(\vec{l}) \rangle = \delta_{ab} \delta(\vec{k} + \vec{l})$$

$$\langle H_a^{(1)}(\vec{k}) H_b^{(1)}(\vec{l}) H_c^{(2)}(\vec{m}, \vec{n}) \rangle = \delta_{ac} \delta(\vec{k} + \vec{m}) \delta_{bd} \delta(\vec{l} + \vec{n}) + \delta_{ad} \delta(\vec{k} + \vec{n}) \delta_{bc} \delta(\vec{l} + \vec{m})$$

の様になる。^{3), 4)}

ideal random function の時間的依存性を

$$\partial_t H_a^{(1)}(\vec{k}, t) = i \int L_{abc}^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', \vec{k}', t) H_b^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', \vec{k}', t) d\vec{k}' + \dots \quad (3)$$

の様に仮定しよう。⁴⁾ 以下 $K^{(n)}, H^{(n)}, L^{(n)}$ の変数 t を省略する。又、一般性を失わずに対称性、 $K_{abc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) = K_{acb}^{(2)}(\vec{l}, \vec{k})$, $L_{abc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) = L_{acb}^{(2)}(\vec{l}, \vec{k})$

を仮定できる。 ideal random function であるために $L^{(2)}$ の充すべき条件は

$$L_{abc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) + L_{bca}^{(2)}(\vec{l}, -\vec{k} - \vec{l}) + L_{cab}^{(2)}(-\vec{k} - \vec{l}, \vec{k}) = 0 \quad (4)$$

である。⁴⁾

方程式 (2), (3) に於て $H^{(2)}$ の項までで近似すると, $K^{(1)} K^{(2)}$ に対する方程式は

$$\begin{aligned} (\partial_t + \nu k^2) \Delta_{ac}(\vec{k}) K_{cb}^{(1)}(\vec{k}) &= -2 \Delta_{ac}(\vec{k}) \int K_{cde}^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}, \vec{k}) L_{bed}^{(2)}(-\vec{k}, \vec{k} - \vec{k}) d\vec{k} \\ &\quad + 2 \Delta_{ac}(\vec{k}) k_d \int [K_{de}^{(1)}(\vec{k} - \vec{k}) K_{ceb}^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}, \vec{k}) + K_{deb}^{(2)}(-\vec{k}, \vec{k}) K_{cd}^{(1)}(\vec{k})] d\vec{k} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t + \nu |\vec{k} + \vec{l}|^2) \Delta_{ad}(\vec{k} + \vec{l}) K_{db}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) &= -\Delta_{ad}(\vec{k} + \vec{l}) K_{de}^{(1)}(\vec{k} + \vec{l}) L_{ebc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta_{ad}(\vec{k} + \vec{l}) (\vec{k} + \vec{l})_e [K_{eba}^{(1)}(\vec{k}) K_{dc}^{(1)}(\vec{l}) + K_{ec}^{(1)}(\vec{l}) K_{db}^{(1)}(\vec{k})] \\ &\quad - 2 \int K_{efc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) K_{dfb}^{(2)}(-\vec{k}, \vec{k}) d\vec{k} - 2 \int K_{efb}^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}) K_{dfc}^{(2)}(-\vec{k}, \vec{l}) d\vec{k} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。簡単のため $K^{(1)}, K^{(2)}$ の初期値を実数にとると, $L^{(2)}$ を実数にとる限り, $L^{(2)}$ は実数である。3-mode model や Bergers 系の時には ideal random function の時間的变化を適当にとってのガウス部分のくりこみによつて, $K^{(2)} K^{(2)}$ 項を無視できたので, ^{9), 10)} ここでも無視する事にする。

$L^{(2)}$ を一意的に決める方法はないが, 適当な $L^{(2)}$ を探す幾つかの鍵はある。まず $L^{(2)}$ は条件 (4) を充たねばならない。 (4) のかなり一般的な解として

$$\begin{aligned} L_{abc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) &= \frac{-1}{2} \sum_{\vec{r}} G^{(r)}(\vec{k}, \vec{l}, -\vec{k} - \vec{l}) [l_f \Delta_{fe}(\vec{k}) F_{eb}^{(r)}(\vec{k}) M_{ac}^{(r)}(-\vec{k} - \vec{l}, \vec{l}) \\ &\quad + k_f \Delta_{fe}(\vec{l}) F_{ec}^{(r)}(\vec{l}) M_{ab}^{(r)}(-\vec{k} - \vec{l}, \vec{k})] \end{aligned} \quad (7)$$

が考えられる。ここで $F^{(\tau)}$ は任意関数, $G^{(\tau)}$ は任意対称関数,
 $M^{(\tau)}$ は条件 $M_{ab}^{(\tau)}(\vec{k}, \vec{l}) = M_{ba}^{(\tau)}(\vec{l}, \vec{k})$ を充すものとする。等方性を
 仮定すると

$$K_{ab}^{(1)}(\vec{k}) = \Delta_{ab}(\vec{k}) A(k) \quad (8)$$

$$\Delta_{ac}(\vec{k}) F_{cb}^{(\tau)}(\vec{k}) = \Delta_{ab}(\vec{k}) F^{(\tau)}(k)$$

$$G^{(\tau)}(\vec{k}, \vec{l}, -\vec{k}-\vec{l}) = G^{(\tau)}(k, l, |\vec{k}+\vec{l}|)$$

と考えてよい。ここに k, l は夫々 $|\vec{k}|, |\vec{l}|$ を表わす。簡単のため
 に $M^{(\tau)}(k, l)$ を対称関数として

$$M_{ab}^{(\tau)}(\vec{k}, \vec{l}) = \Delta_{ac}(\vec{k}) \Delta_{cb}(\vec{l}) M^{(\tau)}(k, l)$$

の様に書けると仮定する。方程式(6)で $K^{(2)} K^{(2)}$ 項を無視する
 と $K^{(2)}$ の形は

$$K_{abc}^{(2)}(\vec{k}, \vec{l}) = \frac{1}{2} \Delta_{ad}(\vec{k}+\vec{l}) [l_e \Delta_{eb}(\vec{k}) \Delta_{cd}(\vec{l}) B(k, l, |\vec{k}+\vec{l}|) \\ + k_e \Delta_{ec}(\vec{l}) \Delta_{bd}(\vec{k}) B(l, k, |\vec{k}+\vec{l}|)] \quad (9)$$

の様に書ける, ここに

$$B(k, l, |\vec{k}+\vec{l}|) = \int_{-\infty}^t e^{-\nu |\vec{k}+\vec{l}|^2 (t-t')} \left[\sum_{\tau} F^{(\tau)}(\vec{k}) M^{(\tau)}(l, |\vec{k}+\vec{l}|) G^{(\tau)}(k, l, |\vec{k}+\vec{l}|) A(|\vec{k}+\vec{l}|) \right. \\ \left. - A(k) A(l) \right] dt' \quad (10)$$

である。

方程式(5)で a, b について trace をとり, (8), (9) を用いると,

方程式系

$$(\partial_t + \nu \vec{k}^2) A(k) = \int_0^t dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm \alpha_{klm} [A(l) \{ (\beta_{klm}^{(1)} + \beta_{klm}^{(2)}) B(l, k, m) - \beta_{klm}^{(3)} B(m, l, k) \} \\ - \sum_{\tau} F^{(\tau)}(l) M^{(\tau)}(k, m) G^{(\tau)}(k, l, m) \{ \beta_{klm}^{(1)} B(m, l, k) + \beta_{klm}^{(2)} B(l, m, k) \}] \quad (11)$$

$$(\partial_t + \nu |\vec{k} + \vec{l}|^2) B(\vec{k}, l, |\vec{k} + \vec{l}|) = \sum_{\tau} F^{(\tau)}(\vec{k}) M^{(\tau)}(l, |\vec{k} + \vec{l}|) G^{(\tau)}(\vec{k}, l, |\vec{k} + \vec{l}|) A(\vec{k} + \vec{l}) - A(\vec{k}) A(l) \quad (12)$$

を得る。こゝで

$$\alpha_{klm} = \frac{\pi}{16 k^2 l m} (k^4 + l^4 + m^4 - 2k^2 l^2 - 2l^2 m^2 - 2k^2 m^2)$$

$$\beta_{klm}^{(1)} = k^4 - (l^2 - m^2)^2$$

$$\beta_{klm}^{(2)} = -\{4k^2 m^2 + (k^2 + m^2 - l^2)^2\}$$

$$\beta_{klm}^{(3)} = 2(l^2 - m^2)(l^2 + m^2 - k^2)$$

である。

$L^{(2)}$ を探す次の鍵は、展開近似を良くする事である。即ち比 $B(\vec{k}, l, |\vec{k} + \vec{l}|) / A(\vec{k} + \vec{l})$ を小さくする事と考えられる。以下我々は簡単な選択

$$M^{(1)} = G^{(1)} = 1 \quad G^{(\tau)} = 0 \quad (\tau \neq 1) \quad F^{(1)}(\vec{k}) = A(\vec{k}) \quad (13)$$

をとる。方程式 (12) の右辺は $A(\vec{k}) \{A(\vec{k} + \vec{l}) - A(l)\}$ となる。これは k の大きい時には $A(\vec{k})$ が小さくなり、 k の小さい時には $\{A(\vec{k} + \vec{l}) - A(l)\}$ が小さくなると考えられるので、あまり大きくはならないだろう。もし $L^{(2)} = 0$ にした時、この右辺は $-A(\vec{k}) A(l)$ であるからその相違は明らかである。

エネルギー・スペクトル関数 $E(k) = 2\pi k^2 \langle u_a u_a \rangle$ は $A(k), B(k, l, m)$ を用いて

$$E(k) = 4\pi k^2 [A^2(k) + \int_0^\infty dl \int_{|k-l|}^{k+l} dm \alpha_{klm} \{\beta_{klm}^{(2)} B^2(m, l, k) + \beta_{klm}^{(1)} B(m, l, k) B(l, m, k)\}]$$

の様に表示される。以下このうちガウス分布からの寄与を $E_1(k)$ と略記する事にする。

§ 3. 方程式(11),(12)の数値積分

方程式(11),(12)を k に就いて inhomogeneous mesh をとり 積分を和にかえ, t に就いて 階差方程式として解く. $\nu=0.01$ にとり, 特に断わらなければ $\Delta t=0.01$, mesh points の数 13 にとり, $k>12$ の領域を無視して考える. 初期条件としては, 代表的な速度、波数が夫々 1, 0.5 程度のもの, 従って乱れの Reynolds 数が大体 10^2 のものとする.

最初の一連の計算は初期値を

$$E_1(k) = 4\pi k^2 C_s / (0.5^s + k^s), \quad E_2(k) = 0$$

$$S = 3, 3.5, 4, 4.5 \quad C_3 = 0.01 \quad C_{3.5} = C_4 = C_{4.5} = 0.02 \quad (14)$$

にとり行なった. この時特に $k>10$ の領域を無視した.

エネルギー・スペクトル関数の変化を図 1, 2, 3, 4 に夫々 $S=3, 3.5, 4, 4.5$ の場合について表わした. これらから領域 $1 < k < 2.5$ に対して $S=3.5$, と $S=4$ の場合が比較的安定なスペクトルを与える事, 更にもっと k の大きい領域では傾斜がも, ときつい事が判る.

2 番目の一連の計算は初期値を

$$E_1(k) = 4\pi k^2 C'_s / [(0.5^{3.7} + k^{3.7})(7^s + k^s)], \quad E_2(k) = 0$$

$$S = 3, 4, 5, 6 \quad C'_3 = 6.5, C'_4 = 45, C'_5 = 313, C'_6 = 2200 \quad (15)$$

にとり行なった. $S=3, 5, 6$ に対するエネルギー・スペクトル関数の変化は夫々図 5, 6, 7 に表わした. $S=4$ に対するものは.

次の計算の結果である図8と余り変らない。これらの結果から $S=4$ が比較的安定なスペクトルを与えている事が判る。

3番目の計算は、スペクトルの形を更に詳しく調べるために mesh points の数を20に増して、初期値(15) ($S=4$) に就いて行った。エネルギー・スペクトル関数の変化は図8に示した。その形はかなり安定している。領域 $1 < k < 2.8$ ではスペクトル $E(k) \sim k^{-\rho}$ の傾斜は大体一定であり、表Iに示す様に $\rho \sim 1.7$ のまわりで振動する様である。領域 $8 < k < 11$ では傾斜はそれ程明らかではないが表IIに示した。

表I 初期値(15) $S=4$ に対する領域 $1 < k < 2.8$ に於けるエネルギー・スペクトル関数 $E(k) \sim k^{-\rho}$ の ρ の値。(3番目の計算による)

t	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
ρ の最小値	1.56	1.58	1.59	1.59	1.59	1.58
ρ の平均値	1.66	1.70	1.73	1.74	1.74	1.73
ρ の最大値	1.74	1.80	1.83	1.83	1.82	1.83

表II 初期値(15) $S=4$ に対する領域 $8 < k < 11$ に於けるエネルギー・スペクトル関数 $E(k) \sim k^{-\sigma}$ の σ の値。(3番目の計算による)

t	0.0	0.2	0.4	0.6
σ の最小値	4.51	4.63	4.22	4.04
σ の平均値	4.74	4.94	4.56	4.28
σ の最大値	5.00	5.11	4.89	4.64

k の小さい領域でのエネルギースペクトル関数の形を調べるために、4番目の一連の計算を初期値

$$E_1(k) = 4\pi k^{2+\gamma} C_\gamma'' / [(0.5^{4+\gamma} + k^{4+\gamma})(7^4 + k^4)], \quad E_2(k) = 0$$

$$\gamma = 0, 1, 2 \quad C_\gamma'' \sim 10 \quad (16)$$

に対して行った。この際 $\Delta t = 0.1$ にとった。 k の小さい処でのエネルギースペクトル関数の変化を表 III に示した。 $t=20$ で約 50% 程度の全エネルギーの減りにも拘らず、 $\gamma=1, 2$ の場合には、 k の小さい処で $E(k)$ が増加している。この事は $\gamma=0$ がこの 3 つの中で最も確からしい事を示している。

表 III 初期値 (16) に対する $R(k) = [E(k, t=20) - E(k, t=0)] / E(k, t=0)$ の値。(4番目の計算による)

	$R(0.025)$	$R(0.075)$
$\gamma=0$ の場合	-0.023	-0.149
$\gamma=1$ の場合	0.047	0.079
$\gamma=2$ の場合	0.696	0.660

§ 4. まとめ

我々は非圧縮性、等方性乱流について、 $\nu=0.01$ 代表的な速度、波数が夫々 1, 0.5 の場合について調べて来た。今迄の結果から得られる結論としては、

i) ある波数の領域で傾斜が大體一定である様な準定常エネ

ルギースパクトル関数がある。

ii) その傾斜は $1 < k < 2.8$ で $\rho \sim 1.7$ $E(k) \sim k^{-\rho}$ であり、コルモゴロフのスパクトルと一致する。

iii) $8 < k < 11$ ではあまり明確ではないが大体 $E(k) \sim k^{-\sigma}$ ($4 < \sigma < 5$) である。

iv) k の小さい領域では $E(k) \sim k^2$ の方が $E(k) \sim k^3, k^4$ より確からしい。従って、ロフチャンスキーの積分は多分発散する。というものである。

$L^{(2)}$ の選択の多様性について一言したい。 $L^{(2)}$ の選択によって結果が変わるならば、どの結果が信用されるべきかという疑問が起るかも知れない。しかし $L^{(2)}$ の選択は異なる近似体系を選択する事である。近似の採り方に依って結果が異なるのは当然であり、最も信用すべき結果は最も良い近似で得られたものであるう。近似の度合を示すものとしては、ガウス項と補正項の比で表わすのが適當であろう。

13 とか 20 とかの mesh は粗いが、この点に関して次の 2 点を述べておきたい。一つは、傾斜を調べるのにかなりの数の mesh points をその領域に含ませてある。例えば第 3 の計算で $1 < k < 2.8$ の領域に 6 つの mesh points を含ませてある。二つのは結果、特にエネルギーースパクトルの変化の傾向が mesh のとり方にあまり依存しなかった事である。

数値積分は $E_i(k)/E(k)$ の最小値があまり小さくならない時間
 即ち近似があまり破れない時間だけ行った。‘かなり長時間
 近似を保つ’というのはこの時間にエネルギースペクトル関数
 の変化を知る事ができるかという問題に帰着される。計算は
 大体この最小値が0.5~0.7位を目安としている。例えば才一と
 才三の計算でこの最小値は $1 < k < 2.8$ の領域で $t < 12$ までで
 0.64であり、この間にその領域でのエネルギースペクトルの
 変化を見る事ができた。

全エネルギーの時間変化については、上の意味でかなり長
 時間近似を保つ事に成功しなかった。例えば才三の計算では
 $t=1.5$ でエネルギーの減りは僅か8%程度であり、才四の計
 算では $t \sim 2$ で $E_i(\text{total})/E(\text{total})$ が既に50%を割ってしま
 った。この事情はあるが、各波数領域での変化を見るには簡
 単な(13)式の様な $L^{(2)}$ が充分‘くりこみ’の役割を果たした。その有
 効性を見るために、初期値(15) ($S=4$) に対する計算を $L^{(2)}=0$
 にとったものについてもやってみた。結果は図9に表はされ
 ている様に $t=0.6$ までに $4 < k$ の領域で $E_i(k)$ が一度は0になっ
 てしまう。これは対応した図8における計算で $E_i(k)/E(k)$ の最
 小値が $k < 12$ で $t=0.6$ まで0.61を保った事と比較されるべき
 である。

参考文献

- 1) R.H.Cameron and W.T.Martin, Ann. Math. 48 (1947) 385
- 2) N.Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958)
- 3) T.Imamura, W.C.Meecham and A.Siegel, J. Math. Phys. 6 (1965) 695
- 4) M.Doï and T.Imamura, Prog. Theor. Phys. 41 (1969) 358
- 5) L.F.G.Simons and C.Salties, Proc. Roy. Soc. A 165 (1938) 73
- 6) M.Uberoi, J. Aero. Sci. 20 (1953) 197
- 7) A.N.Kolmogoroff, C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. 30 (1941) 301
- 8) T.Tatsumi, Ranryu (in Japanese) (Maki Press, Japan, 1962)
- 9) S.Tanaka and T.Imamura, Prog. Theor. Phys. 45 (1971) 1098
- 10) M.Yano and T.Imamura, Phys. Fluids 15 (1972)

図の説明

- 図1 初期値(14) $S=3$ に対するエネルギースペクトル関数
図2 初期値(14) $S=3.5$ に対するエネルギースペクトル関数
図3 初期値(14) $S=4$ に対するエネルギースペクトル関数
図4 初期値(14) $S=4.5$ に対するエネルギースペクトル関数
図5 初期値(15) $S=3$ に対するエネルギースペクトル関数
図6 初期値(15) $S=5$ に対するエネルギースペクトル関数
図7 初期値(15) $S=6$ に対するエネルギースペクトル関数
図8 初期値(15) $S=4$ に対するエネルギースペクトル関数
図9 初期値(15) $S=4$ に対する $E_1(k)/E(k)$ 。 $C^{(1)}$ は $L^{(2)}$ として(13)を採ったもの。 $C^{(2)}$ は $L^{(2)}=0$ に採ったもの。

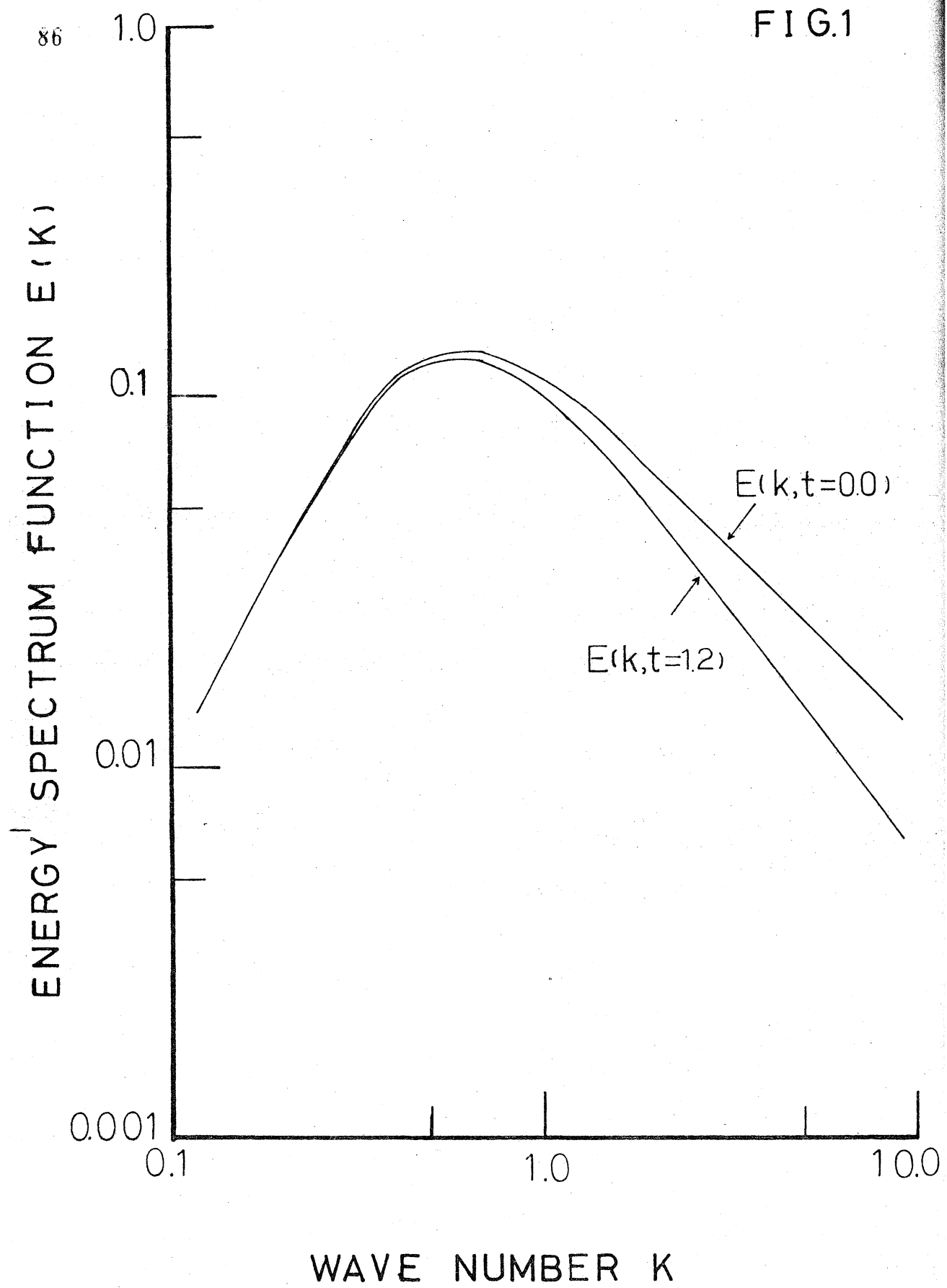


FIG.2 87

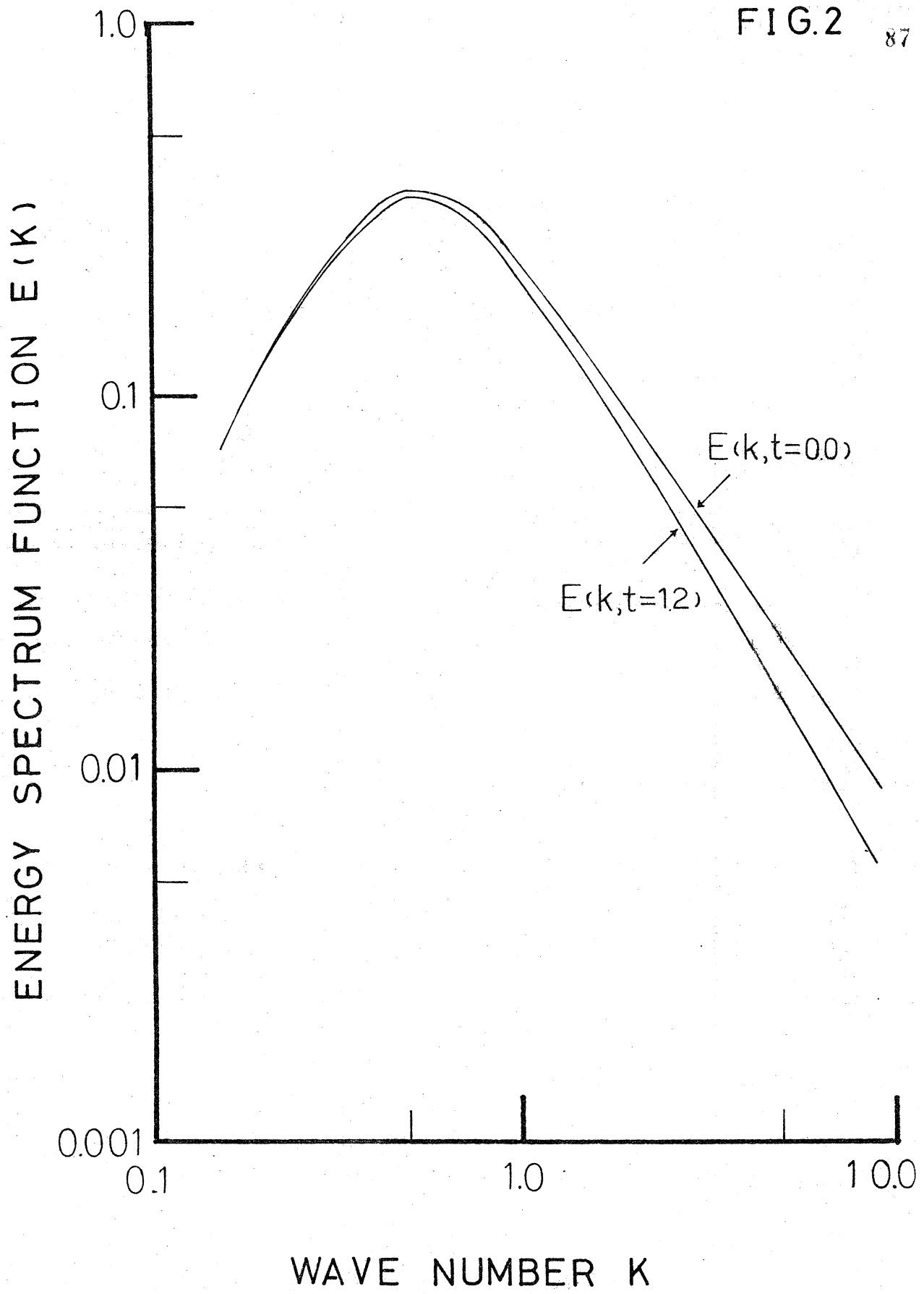


FIG.3

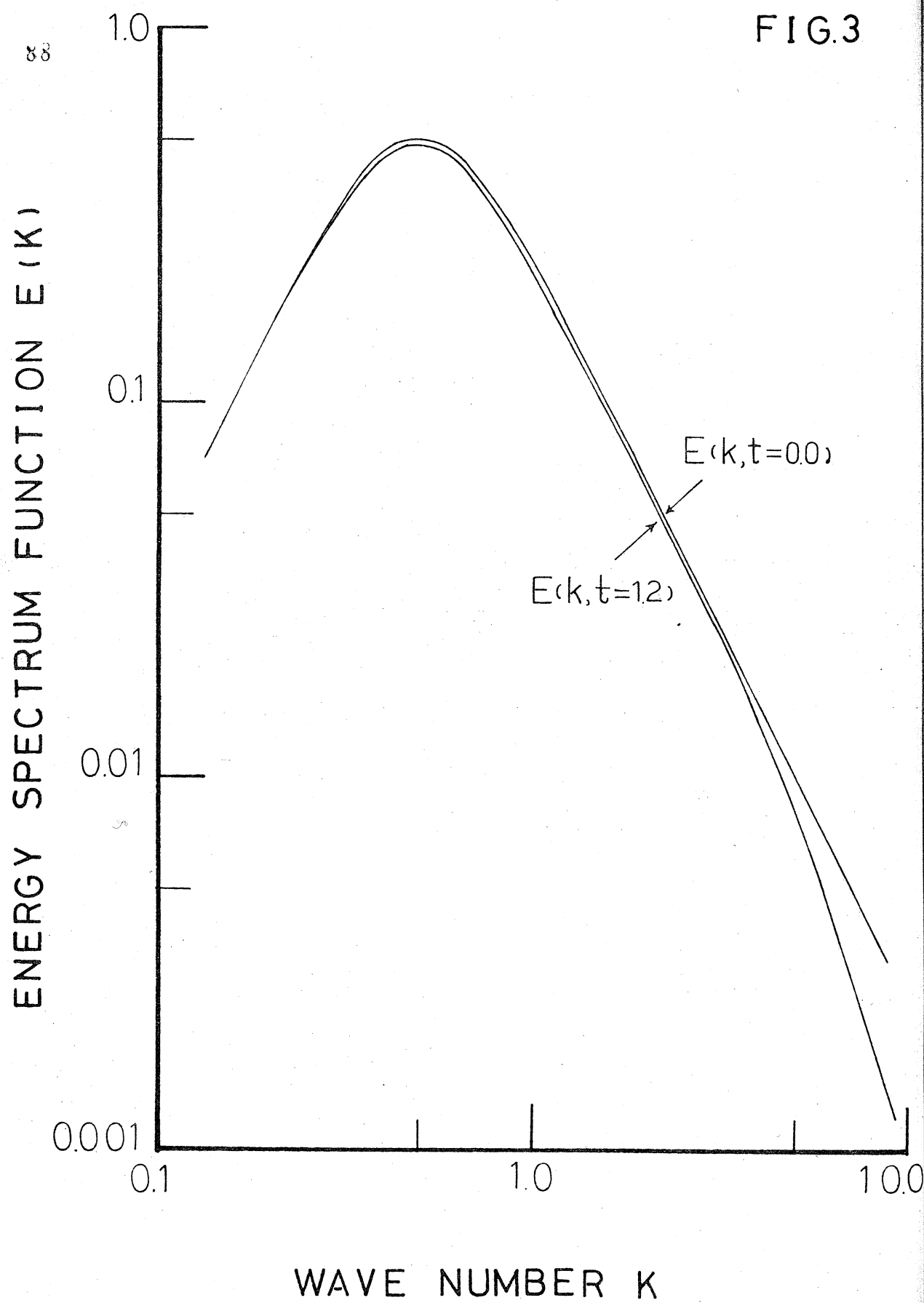


FIG.4

89

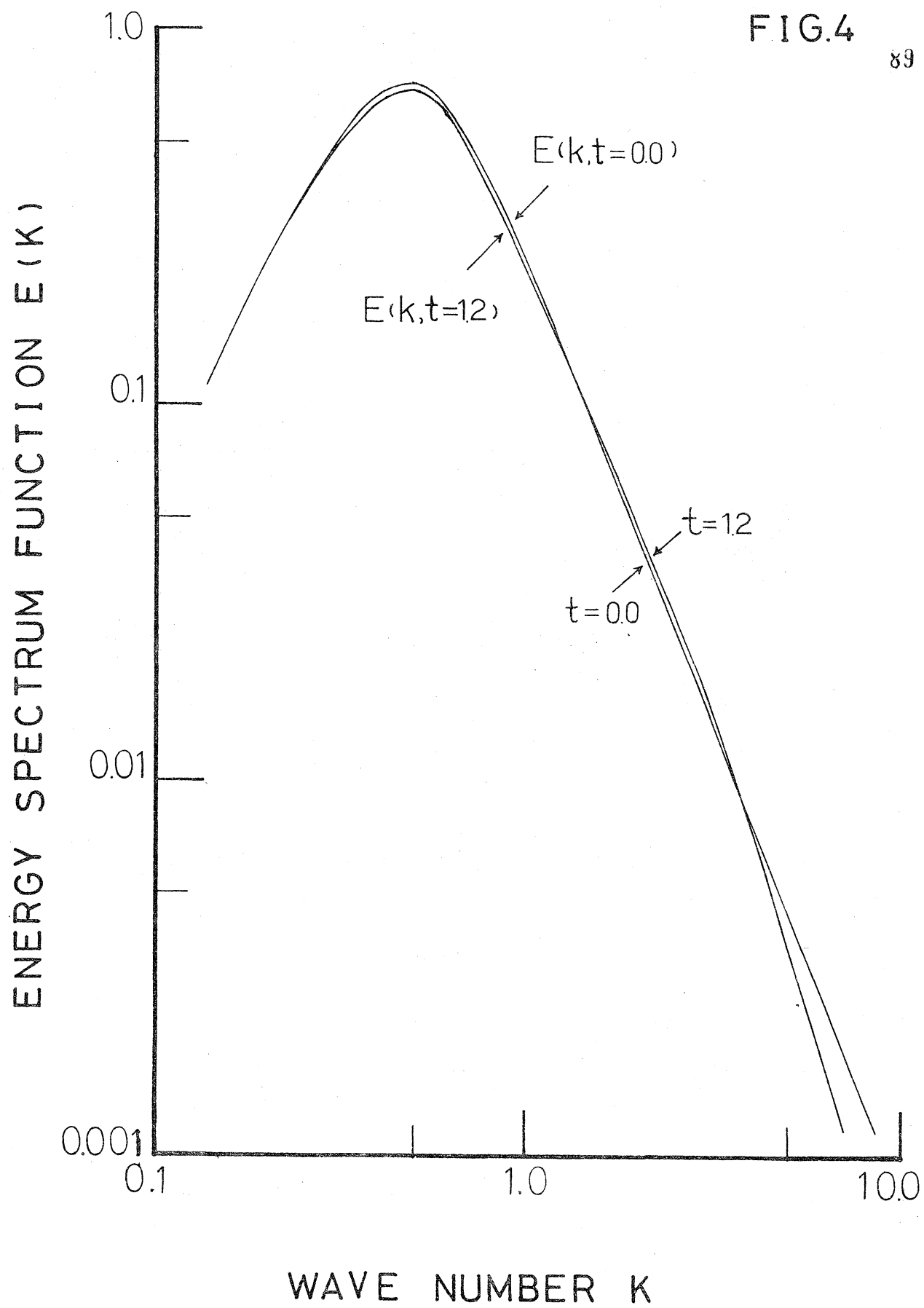


FIG. 5

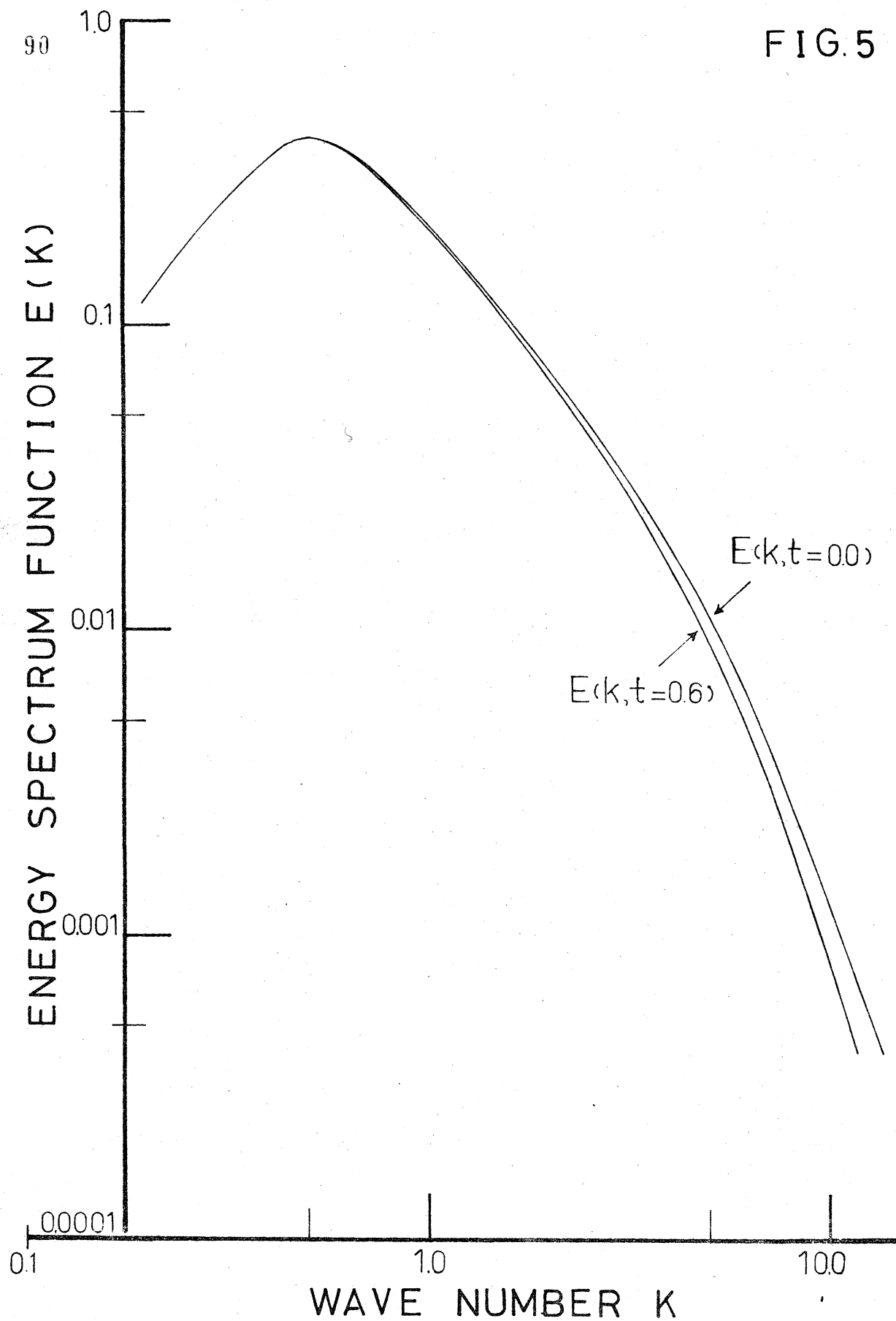


FIG.6

91

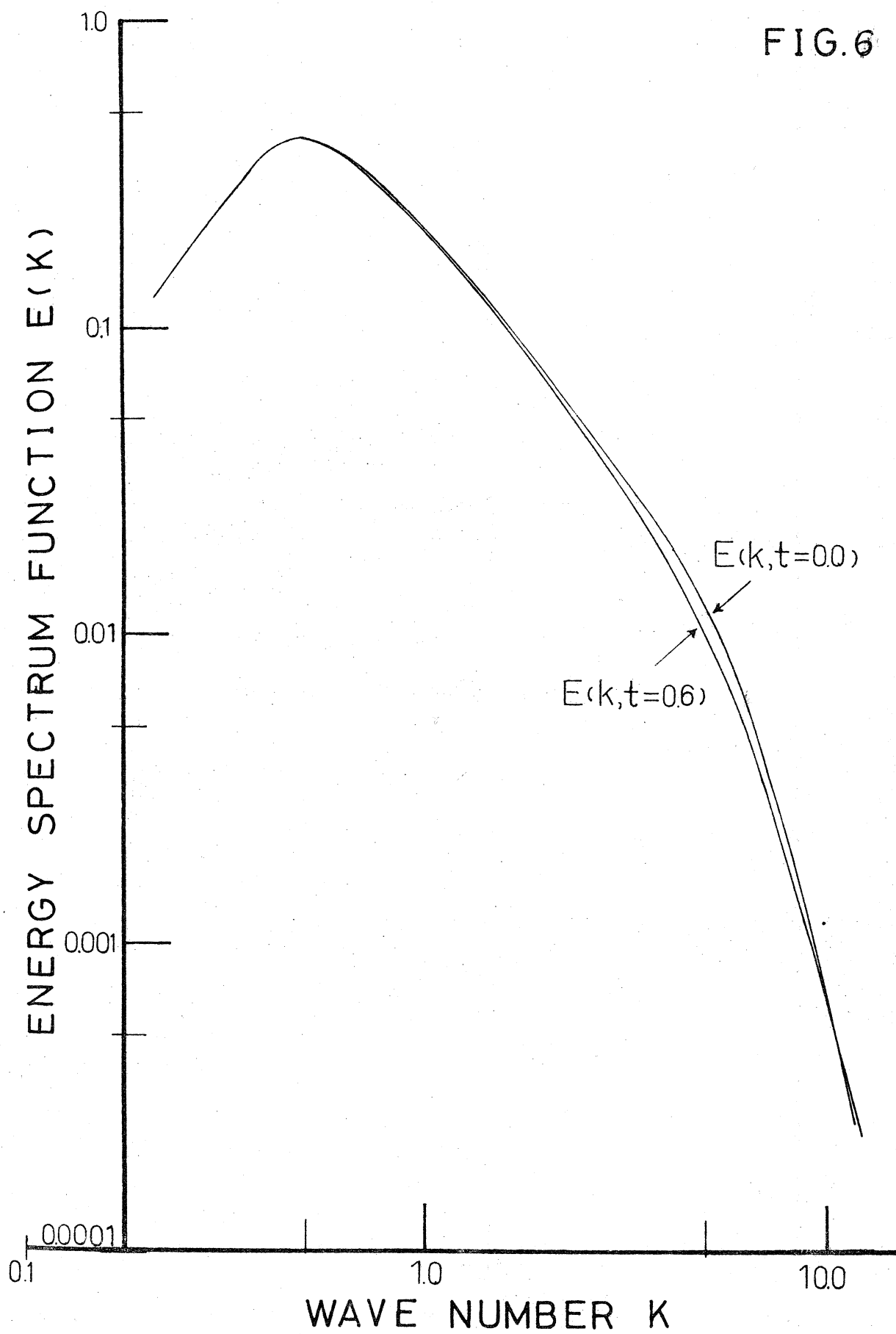


FIG. 7

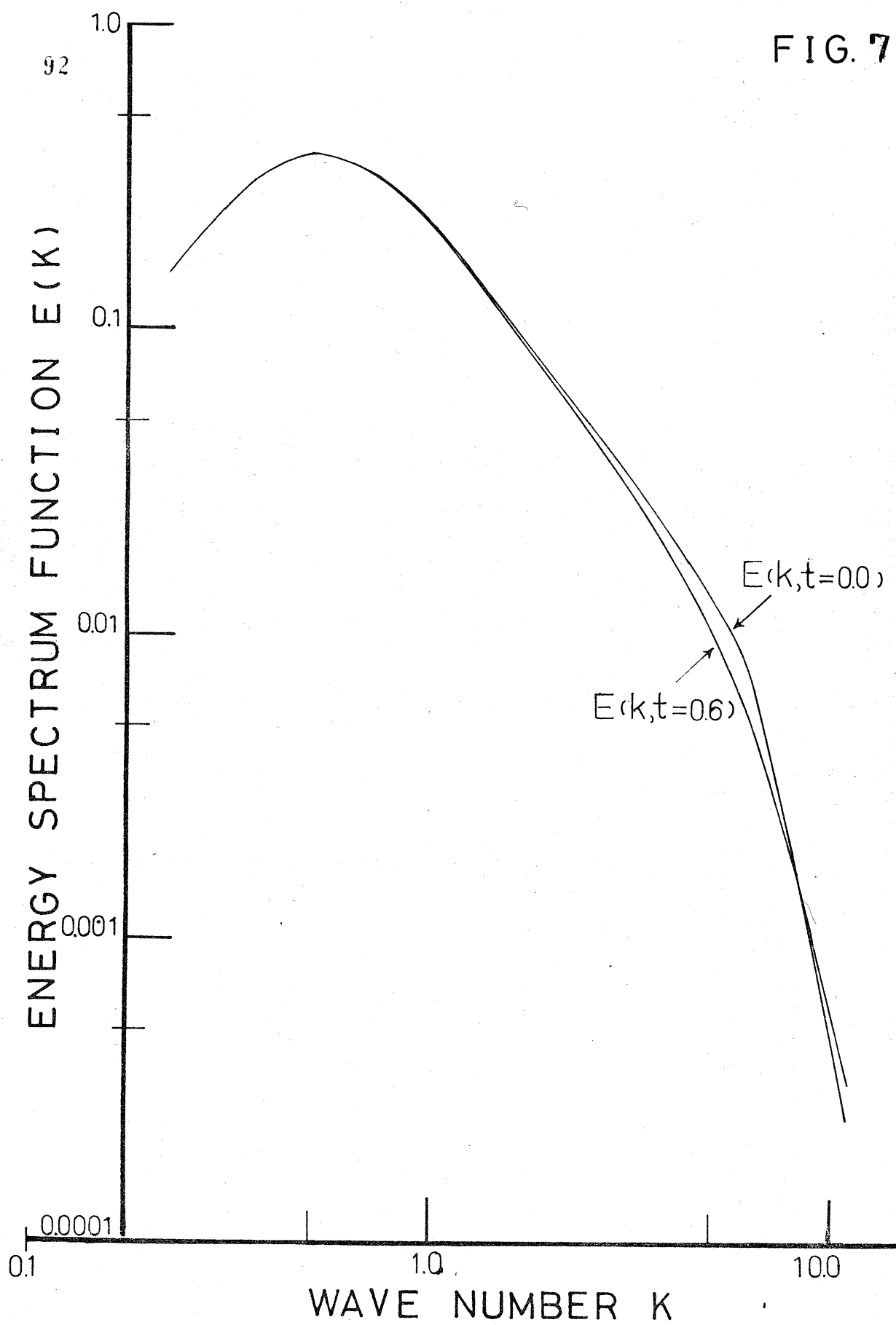


FIG. 8

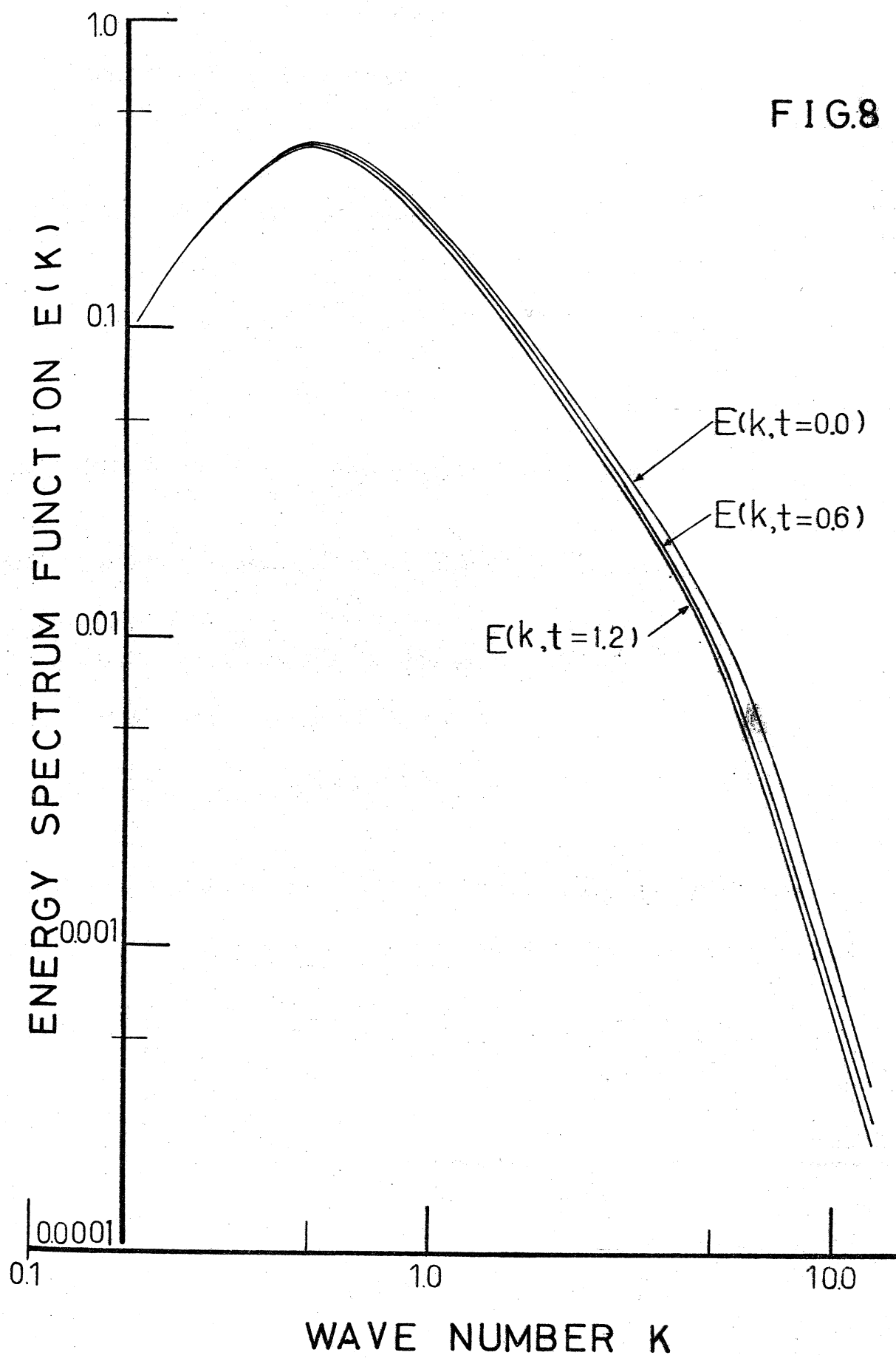


FIG. 9⁵⁴

