

sine-Gordon系の統計力学

北大理 高山 一

1975年、Krumhansl-Schrieffer (KS) は1次元 ϕ^4 系の古典統計に、一方では厳密な transfer 積分 (TI) 法を、他方ではフォノンとソリトンとからなる現象論的な2成分理想気体模型を適用し、両者の良い一致を示すことでソリトンの統計^力学的役割を初めて明らかにした。KS理論はその後 sine-Gordon (SG) 系をはじめ他の様々なソリトン系に適用されるとともに、フォノン・ソリトン間相互作用も取り込んだ理論に改良されている。さらに、汎関数積分法を用いた準古典的な量子統計理論により、ソリトン系の統計力学における量子効果も調べられた。これらの理論の結果は、量子効果の小さいソリトン系での低温極限では全て一致しており、その範囲でKS理論の基本的な考え方である2成分気体模型は確立されたと言えよう¹⁾。しかし、興味ある問題がまだ山積している。即ち、

1. 厳密な量子統計理論
2. 低温極限からのずれと高温極限への移行におけるソリトンの挙動
3. ソリトン系の有限温度における動的振舞いと現実の系との対応
4. SG系におけるフリーザー問題

などがあげられる。我々は問題2に着目し、まずフォノン系に対する高温補正を調べた。その結果は、以下に示すように、問題4に対する解答も示唆している²⁾。

準古典的な量子統計理論によれば、ソリトンのエネルギー E_s に比べて十分に低温 ($T \ll E_s$) における SG 系の熱力学関数 Ω は、ソリトンの存在しない状態からの寄与 Ω_0 (非調和項効果を含むフォノン系の熱力学関数) とソリトンからの寄与 Ω_s との和で与えられる。これがKS理論の2成分気体模型に他ならないが、ここで着目するのは Ω_0 である。単純な摂動理論により Ω_0 は

$$\Omega_0 = \Omega_{00} - T \left\{ \left\langle \exp \left[- \int_0^{\frac{1}{T}} V'(\tau) d\tau \right] \right\rangle_c - 1 \right\} \quad (1)$$

で与えられる。ここで Ω_{00} は、くり込まれた質量 m をもつ自由フォノン系の熱力学関数、 $V'(\tau)$ は SG ポテンシャル $(m/g)^2 \cos(g\phi)$ と展開した高次項

$$V'(\tau) = m^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-g^2)^{n-1}}{(2n)!} \int dx \phi^{2n}(x, \tau), \quad (2)$$

また、くり込まれた質量 m は $T=0$ での質量 m_0 を用いて

$$\frac{m}{m_0} = 1 - t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{9}{8}t^4 - \dots \quad (3)$$

$t = T/E_S$ で与えられる。ダイアグラムの方法を用いて(1)式の第2項を g^8 で計算し、(3)式と合せ、さらに古典極限をとれば、

$$\Omega_0 = \frac{m_0 E_S L}{2} \left\{ \varepsilon_f + t - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^3 - \frac{5^3}{2^6} t^4 - \frac{927}{2^7} t^5 - \dots \right\} \quad (4)$$

を得る。ここで L は系の大きさ、 ε_f は質量 m_0 の自由フォノン（非調和項効果も含まない）系の熱力学関数である。(4)式はTI法のフォノンの寄与に完全に一致している。 Ω_S についての高温補正項の汎関数積分法による評価はまだできていないが、その古典極限はTI法のものと同じであると期待される。

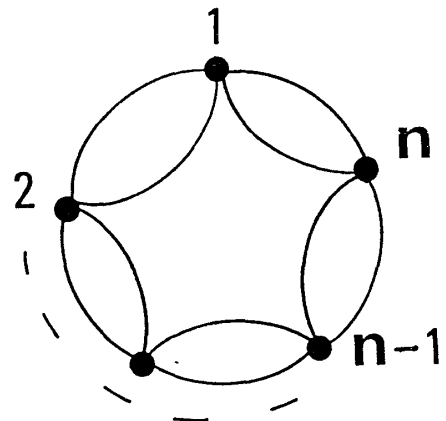
以上のようにSG系の熱力学関数は非調和項効果を含むフォノンとソリトンの寄与で尽されておき、他の自由度が関与する余地はないようにみえる。一方、逆散乱法に基づく理論や $T=0$ での場の量子論によれば、ハミルトニアンを扱う限りでは、ソリトンと反ソリトンの束縛状態ブリーザーもSG系の基本的なモードとみなされ、有限温度の熱力学関数にも関与するものと考えられる。この矛盾が問題4である。この問題に関して、(4)式に列した我々の提議論は次のような解答を示唆する。(4)式に寄与するダイアグラムのうち、図のようなバブル型ダイアグラムだけを集めてみると、その寄与は

$$\Delta\Omega_0^{(bu)} = -\frac{1}{2} T \sum_{\lambda} \sum_{\mathbf{q}} \ln [D_B^{(2)}(\mathbf{q}, \omega_{\lambda})] + \text{resid.} \quad (5)$$

$$D_B^{(2)}(\mathbf{q}, \omega_{\lambda}) = \frac{2\pi(\mathbf{q})}{1 - \frac{m^2 g^2}{2} \pi(\mathbf{q}, \omega_{\lambda})} \quad (6)$$

となる。但し $\pi(\mathbf{q}, \omega_{\lambda})$ は1個のバブルの寄与。(6)式は量子化された第2ブリーザーの伝播子で、その対数で与えられる(5)式第1項は第2ブリーザーの熱力学関数とみなされるものである。こ

の結果は‘熱力学関数へのブリーザーの寄与は、フォノンの非調和項として取り込まれている’と理解される。即ち、非線形系のハミルトニアンがいくつかのモードに分離可能であつても、統計力学を論ずるには自由度の分配の仕方が問題になり、その点で非線形モードは必ずしも互いに独立なモードにはなっていないと思われる。



1) 高山一; 日本物理学会誌, 36 (1981) 802.

2) H. Takayama and K. Wada; J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3549.