

van der Corput の lemma の応用について

信州大 理 鹿 野 健

§ 1.

解析数論や級数論においては，次のような指数和 (exponential sum) の大きさを評価する必要がある問題が多い。

$$(1) \quad \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda(k) e^{2\pi i f(k)}$$

例えば，解析数論では，ゼータ函数の零点の評価，加法数論における解の個数の評価，数列の一樣分布性の判定，等々，その大部分の問題が(1)の様な指数和の評価に帰着されると言っても過言ではない。他方，級数論では総和法やフーリエ級数論において，主として反例を作るために(1)の様な和が考察されることがある。van der Corput は，最初ゼータ函数の評価問題のために，表題で言うような lemma を用いたのだが，実はその lemma は幾つも種類があって

問題毎に形を変えたものを使うのが普通である。その最も一般的なものを使って解析数論、とりわけゼータ函数の問題に応用してみた結果は、例えば[6]に詳しい。これに反して、級数論の方面では、例えば[5]や[7]に少し書かれてはいるものの、この van der Corput の lemma はそう多く用いられていないように思われる。実は、級数論ではそう一般的な、あるいは強力な形でなくとも大体は間に合うのであって、Salem が[5]で示した形での van der Corput lemma を使う。これは次のようなものである。

Lemma (van der Corput - Salem)

$r(t) \geq 0$ が $a \leq t \leq b$ での減少函数で、
 $f'(t)$ がそこで単調でかつ

$$|f'(t)| \leq 1 - \theta \quad (a \leq t \leq b)$$

となるような $\theta > 0$ が存在するならば、

$$(2) \quad \sum_{a \leq n \leq b} r(n) \cdot e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b r(t) \cdot e^{2\pi i f(t)} dt + O(1)$$

である。ここに右辺の $O(1)$ は、 a, b, r, f を含まない評価であって、

$$\sup_{a \leq t \leq b} r(t) = c$$

とすると、

0 と 0 のみに関係する評価である。

§ 2. まずここでは一様分布論への応用を述べる。

van der Corput [2] は次の定理を得た。

[定理 1] もし何らかの自然数 k について, x_n の第 k 次差分 $\Delta^k x_n$ が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束し, かつ

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n |\Delta^k x_n| = \infty,$$

であるならば, 実数列 $\{x_n\}$ は一様分布列 (uniformly distributed (mod 1) sequence) である。

(一様分布論については, 例えば [1], [3], [4] を参照。)

ただし, $\Delta^k x_n$ は単調列とする。

この定理の証明には実は van der Corput の lemma は使われていないのだが, [6] に示されているような形の v.d.C. lemma を使えば, 条件(3)は

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k |\Delta^k x_n| = \infty,$$

で置き換えられるように思う。しかし, 私が示せるのは

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 |\Delta^k x_n| = \infty,$$

で置き換えられることだけで, これが v.d.C. lemma の限界のように感じられる。

しかし(4)は真実であって, *complex method* と帰納法とによって証明できると思われるがまだ成功していない。

また, 次の予想を持っているが, 真偽の程は定かでない。

『実数の無限列 $\{x_n\}$ が一様分布するためには, 任意の自然数 k に対して

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^k |\Delta^k x_n| = \infty,$$

となることが必要である。』

§3. *van der Corput - Salem* の Lemma を使っての級数論への応用を試みる。

Hardy は [3] で Borel 総和法に関する反例として次の様な級数を考えた。

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} e^{A i n^{\alpha}}.$$

この級数は, $0 < \alpha < 1$ のとき, 任意の $\delta > 0$ に対して (C, δ) 総和可能であるが, すべての $A \neq 0$ に対して収束しない。Hardy はこれらの事実を, Borel 総和法に関するタウバー型定理と函数論的方法によって証明したが, そこでも分るように, $\alpha = \frac{1}{2}$ がデリケートな境目である。 $(C, 1)$ 総和法から Borel 総和可能性を導くタウバー型定理として, [3] には次の定理があげられている (Theorem 149)。

[定理 2] 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の部分和を A_n とする。

もし

$$\sigma_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1} = A + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ならば, この級数は A に Borel 総和可能である。

そして, Hardy は例によって, この定理が *best* である事, 即ち定理において, 我々は o を O では置き換えられないことを示した。しかし, Hardy の例では A_n が非有界でしかも $a_n \rightarrow 0$ である。彼は気付かなかった様であるが, 実は (6) の級数で $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合のものが, 上のような欠点を補う反例となることを以下に示そう。それは次の定理の系であって, これを証明するために v.d.C. - S. lemma が必要なのである。

[定理 3] すべての $x > 0$ に対して, 2つの級数

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$$

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$$

は収束しないが, 任意の $\delta > 0$ に対して (C, δ) 総和可能であり, また (7), (8) の部分和は有界である。

〔証明〕 詳細にではなく、スケッチ的に述べる。

まず我々は次の Kronecker による lemma から出発する。

(Lemma 1) 実数項の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は、任意の数列 $\lambda_n \uparrow \infty$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k a_k = o(\lambda_n), \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることである。

従って、例えば(7)が、ある $x > 0$ について収束したと仮定すると、上の Lemma 1 から、 $\lambda_n = \sqrt{n}$ に対して、

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n \cos(\sqrt{k}x) = o(\sqrt{n}),$$

とならなければならない。所が一方では、v. d. C.-S. lemma から、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$(10) \quad \sum_{k=1}^n \cos(\sqrt{k}x) = \frac{2}{x} \sqrt{n} \sin(\sqrt{n}x) + O(1),$$

であることが容易に分るから、(9)と(10)が矛盾する事となつて(7)がすべての $x > 0$ に対して収束しないことが示される。

(7)と(8)の部分和が共に有界であることは、また v. d. C.-S. lemma によつて、例えば(7)については、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\cos(\sqrt{k}x)}{\sqrt{k}} = \frac{2}{x} \{ \sin(\sqrt{n}x) - \sin x \} + O(1),$$

であることが分るから明かである。

次に(7)が $(C, 1)$ 総和可能であることは, v. d. C. 一筋, lemma を用いて直接的にも示せるが, ここではもっと横着して, 次の lemma によることにする。

(Lemma 2) ([3] Theorem 71 の $k=1$ の場合。)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $(C, 1)$ 有界で, λ_n が 0 に収束する仮似凸列 (quasi-convex sequence) ならば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$ は $(C, 1)$ 総和可能である。

この lemma と (10) から, $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ととれば (7) が $(C, 1)$ 総和可能であることが分る。なぜならば, (10) と Abel 変換により, (7) が $(C, 1)$ 有界であることが示せるからである。以上をまとめると, (7) は $(C, 1)$ 総和可能であって, 部分和は有界であるから, [3] の Theorem 70 と Theorem 43 によって, $\forall \delta > 0$ に対して (C, δ) 総和可能であることが示される。(8)についても全く同様である。

(系) 定理 2 において, たとえ $A_n = O(1)$ かつ $a_n \rightarrow 0$ であっても, $\circ$ を O に置き換えることはできない。

(証明) 定理 3 と, [3] の Theorem 156 から明か。

我々は定理 3 を更に先に進めることができる。それは,

[定理 4] 例え (8) について,

$$\overline{A}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\sqrt{k}x)}{\sqrt{k}}, \quad \underline{A}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\sqrt{k}x)}{\sqrt{k}}$$

とすると, $x \rightarrow 0^+$ のとき,

$$\overline{A}(x) = x \log \frac{1}{x} + \frac{4}{x} + O(x),$$

$$\underline{A}(x) = x \log \frac{1}{x} + O(x),$$

であり, (8) の $(C, 1)$ 平均は $\frac{1}{2}(\overline{A}(x) + \underline{A}(x))$

に収束する。ただし $x \neq 0$ 。

(7) についても同様の結果が得られる。

この定理の証明は長くなるのでここには述べないが、それには v. d. C. - S. lemma をもちろん使う。そしてその方法によって実は次の結果を証明することができる。

[定理 5] 級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ixn^{\alpha}}}{n^{\beta}}$$

($x > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$)

は $\alpha + \beta > 1$ のときすべての x に対して収束し, $\alpha + \beta \leq 1$ のときはすべての x に対して発散する。部分和有界となるのは $\alpha + \beta = 1$ のときであり, そのときに限る。

この定理は, Hardy が [3] で本質的に述べているが, 彼の方法は函数論によるものである。

また, 定理 4 の $\overline{\Delta}(x)$ と $\underline{\Delta}(x)$ の $x \rightarrow \infty$ での大きさについては, v. d. C. - Salem lemma の別なタイプのものから,

$$\overline{\Delta}(x) = O(x), \quad \underline{\Delta}(x) = O(x),$$

であることが分る。一方, 下からの評価としては, ゼータ函数の評価と同様な方法で, 例えば

$$\underline{\Delta}(x) = O(\log x), \quad \overline{\Delta}(x) = O(\log x),$$

であることは容易に分るが, これらの真の大きさは不明である。多分, 上からの評価の方が真実に近いものだろうと思われる。

(文 献)

- [1] Cigler - Helmborg : Neuere Entwicklung der Theorie der Gleichverteilung, Jahresbericht d. DMV, 64 (1961) 1 ~ 50.

- [2] Corput, J. G. van der : Diophantische
Ungleichungen I , Acta Math., 56 (1931)
373~456
- [3] Hardy, G. H. : Divergent Series , Oxford,
(1949)
- [4] Koksma - Kuipers (editors) : Asymptotic
Distribution Modulo 1, Compositio Math.,
16 (1964), 1~203.
- [5] Salem, R : Essais sur les séries tri-
gonométriques, Hermann (1940)
- [6] Titchmarsh, E. C. : The theory of the
Riemann Zeta-function, Oxford (1951).
- [7] Zygmund, A : Trigonometric Series, vol. I,
Cambridge (1959).