

集合値写像の像の補集合を像とする集合値写像の連続性について

(On a continuity of the complements of images of a set-valued map)

齋藤裕 Yutaka Saito*, 木村寛 Yutaka Kimura, 荒谷洋輔 Yousuke Araya

秋田県立大学システム科学技術学部

Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

1 はじめに

本研究では, 集合値写像の2つの連続性 (upper-continuity, lower-continuity) が, 集合値写像とその像の補集合を像とする集合値写像の間で対称性をもつことを紹介する. さらに, その対称性を用いて, DC 計画問題の制約集合を変数で制御する際に最適値の動きが下半連続性をもつための十分条件を明らかにする. また, 主定理 (定理 3.2) の補題となる開集合に対する Carathéodory の定理を紹介する.

本研究の背景として, 順序錐を用いた集合値最適化におけるスカラー化関数の遺伝的性質の研究がある. あるスカラー化関数と集合値写像の合成写像について, 元の集合値写像が凸性や半連続性を持つとき合成写像にそれらが遺伝することが知られている. この性質は, 仮定と結論の相似性から, 遺伝的性質と呼ばれる. 直近の流れとしては, 西沢, 田中, Georgiev(2005)[6] によって順序錐を用いた集合の錐凸性や錐半連続性については遺伝的性質が存在することが示されており, その発展として桑野, 田中, 山田 (2010)[4] は同性質に特化した特殊なスカラー化関数を用いて Fan-高橋の不等式の集合値一般化を行っている. 他にも, 久保, 田中 (2013)[2] による Ekeland の変分原理の集合値一般化, 齋藤, 田中, 山田 (2015)[7] による Ricceri の定理の集合値一般化などがある. また, 小林, 齋藤, 田中 (2016)[1] はより一般のスカラー化関数において遺伝的性質をもつための十分条件をいくつか示している.

ところで, いわゆる数理計画問題は制約集合を最適値に写すスカラー化関数とみなすことができ, (具体的な変形は2節で述べる.) さらに遺伝的性質をいくつか備えている. また, ある数理計画問題の制約集合が変数により制御されると仮定した場合, それは集合値写像となる. それらスカラー化関数と集合値写像の合成写像を考えることで, 制御変数と数理計画問題の最適値の関係を1つの関数とみなすことができる.

*yutakasai@akita-pu.ac.jp

数理計画問題の 1 つに、制約条件が 2 つの凸集合の差集合で表される DC 計画問題が広く知られている。DC 計画問題を前述の観点から集合値写像とスカラー化関数の合成関数と捉えた場合集合値写像とその集合値写像の像の補集合を像とする集合値写像の間にある関係性があることがわかった。本稿ではそれらアプローチと得られた結果について述べる。

本稿では大きく次の 2 つを扱う。1 つ目に、集合値写像の連続性についての定理を紹介する。定理の条件が欠けた際の反例と、補題となる Carathéodory の定理の開集合版を紹介する。2 つ目に、それを用いて制御 DC 計画問題の最適値が半連続性を持つための十分条件を述べる。そのために必要な遺伝的性質等の連続性に関する命題を紹介する。

2 空間と定義

X を線形位相空間とし、目的関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と X 上の制約集合 $G \neq \emptyset$ による制約付き数理計画問題の一般形

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{subject to} & x \in G \end{array}$$

に対し、 F, ψ を空でない集合 $A \subset X, B \subset \mathbb{R}$ についてそれぞれ

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \quad \text{and} \quad \psi(B) := \inf_{r \in B} r,$$

とおく。それらの合成写像を

$$\bar{\phi}(\cdot) := \psi(F(\cdot)) \quad (1)$$

とおく。なお、本稿において、一般的なスカラー化関数を別に $\phi: 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ で表すが、上のスカラー化関数 $\bar{\phi}$ と異なる点に注意する。

Y を制御変数のある位相空間とする。制約集合を定める集合値写像を $G: Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ とすると、ある制御変数 $y \in Y$ に対して (P) の最適値は合成写像 $\bar{\phi} \circ G(y) := \bar{\phi}(G(y))$ で得られる。

集合値写像 G の像が開 (閉, 有界, 凸) 集合であるとき、 G は開 (閉, 有界, 凸) 値であるという。

次節でスカラー化関数や集合値写像の連続性を論じるにあたり、点または集合の開近傍族のようなものを次のように定める。

定義 2.1 (開近傍族) 位相空間 Y 上の点 x 、集合 A に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y(x) &:= \{W \subset Y \mid x \in W = \text{int } W\} \\ \mathcal{N}_Y^u(A) &:= \{W \subset Y \mid A \subset W = \text{int } W\} \\ \mathcal{N}_Y^l(A) &:= \{W \subset Y \mid A \cap W \neq \emptyset, W = \text{int } W\}. \end{aligned}$$

集合の開近傍族 $\mathcal{N}_Y^u(\cdot)$ と $\mathcal{N}_Y^l(\cdot)$ は集合値写像における次の 2 種類の連続性の定義の中で次のように用いられる。

定義 2.2 (連続性 (集合値写像), [5]) 集合値写像 $G : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ について,

- (i) G が $\bar{y} \in Y$ で *upper-continuous* であるとは, $\forall W \in \mathcal{N}_X^u(G(\bar{y})), \exists U \in \mathcal{N}_Y(\bar{y})$ such that

$$W \in \mathcal{N}_X^u(G(y)) \quad \forall y \in U$$

である.

- (ii) G が $\bar{y} \in Y$ で *lower-continuous* であるとは, $\forall W \in \mathcal{N}_X^l(G(\bar{y})), \exists U \in \mathcal{N}_Y(\bar{y})$ such that

$$W \in \mathcal{N}_X^l(G(y)) \quad \forall y \in U$$

である.

$\forall \bar{y} \in Y$ で成り立つとき, それぞれ単に *upper-continuous*, *lower-continuous* と呼ぶ.

これらの名称から, 本稿では $\mathcal{N}_X^u()$ を upper 型開近傍と呼ぶこととする. この開近傍族を用いてスカラー化関数の下半連続性を次のように定義する.

定義 2.3 (下半連続性 (スカラー化関数)) スカラー化関数 $\phi : 2^Y \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ が *upper* 型近傍による *lower semicontinuous* (略記: *l.s.c.*(u)) であるとは, ϕ が $\forall A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}, \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{N}_X^u(A)$ such that

$$\phi(A) - \epsilon < \phi(B) \quad \forall B \subset V$$

である.

注: スカラー化関数の半連続性を定義するにあたり, $\mathcal{N}_X()$ (lower 型開近傍) は定義域の近傍として扱うにはふさわしくない. 仮に lower 型開近傍で upper 型の際と同様に下半連続性を定義しそれを *l.s.c.*(l) と書くと,

$$\text{l.s.c.}(u) \Rightarrow \text{l.s.c.}(l)$$

が容易に導かれる. 定義の性質も非常に弱く, *l.s.c.*(l) は下半連続らしからぬグラフを持つスカラー化関数も許容してしまう. よって本稿では *l.s.c.*(u) のみを採用する.

3 補集合値写像の連続性

集合値写像 $G : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ に対し, G の補集合値写像 G^c を

$$G^c(\cdot) := X \setminus G(\cdot)$$

と定める. 集合値写像の値域 (制約集合の空間) X が有限次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ である場合, 集合値写像とその補集合値写像の連続性について次の対称性がいえる.

命題 3.1 (補集合値写像の連続性 1) G を Y 上の集合値写像とする. G が $\bar{y}$ で *upper-continuous* ならば, G^c は $\bar{y}$ で *lower-continuous*.

定理 3.2 (補集合値写像の連続性 2) $G:Y \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$ を開凸値な集合値写像とする. このとき, G が $\bar{y} \in Y$ で有界値かつ *lower-continuous* ならば, G^c は $\bar{y}$ で *upper-continuous*.

証明は省くが, 成立条件の妥当性について以下に補足を加える.

まず開値性について, これは補集合値写像 G^c が閉値であることを保証している. 開値写像はその定義において, 像そのものを近傍としてとれるため, 多くの場合 *upper-continuity* を満たさない.

凸値性と有界値性の必要性については以下の 2 つの反例からわかる. なお, $], \cdot, \cdot[$ は実数開区間を表す.

例 3.3 (凸値性のない例)

$$G(y) := \begin{cases}]0, 1[& (y \leq 0) \\]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\} & (y > 0) \end{cases}$$

とおく. このとき, G は $\bar{y} = 0$ で *lower-continuous* だが, G^c は $\bar{y} = 0$ で *upper-continuous* ではない (図 1.)

例 3.4 (有界値性のない例)

$$G(y) := \begin{cases}]0, -\frac{1}{y}[& (y < 0) \\]0, +\infty[& (y = 0) \\]0, \frac{1}{y}[& (y > 0) \end{cases}$$

とおく. このとき, G は $\bar{y} = 0$ で *lower-continuous* だが, G^c は $\bar{y} = 0$ で *upper-continuous* ではない (図 2.)

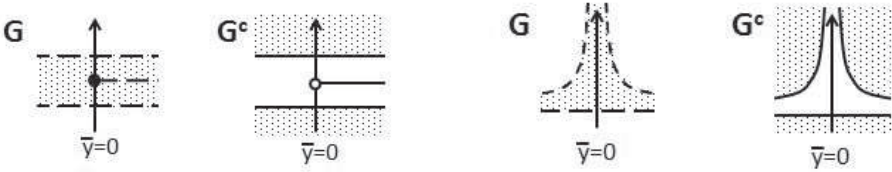


図 1: 例 3.3 の概形

図 2: 例 3.4 の概形

最後に, G の値域を $\mathbb{R}^n$ に限定した理由について, 以下の二つを挙げる. 1 つ目は有界閉集合をコンパクト集合として扱うことにより値域側の有限開被覆をとるため. 2 つ目は次の補題を用いるためである.

補題 3.5 (集合族に対する Carathéodory の定理) $X \subset \mathbb{R}^n$ を開凸集合とする.
このとき, 任意の $\bar{x} \in X$ に対して, 開凸集合族 $\{A_i\}_{i \in I} \subset 2^X \setminus \{\emptyset\}$ と $W \in \mathcal{N}(\bar{x})$ が存在し, $\bar{x} \notin A_i, W : \text{convex}$ かつ $W \subset \text{conv}\{a_i\}_{i \in I} \quad \forall a_i \in A_i, i \in I$ を満たす. ただし, $I := \{1, 2, \dots, n+1\}$, $\text{conv}P$ は P の凸包 (P を含む最小の凸集合) .

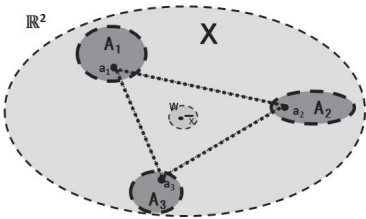


図 3: $\mathbb{R}^2$ における補題 3.5 の概形

この補題は Carathéodory の定理を点の開近傍の各点について示したものである. この補題によって定義域側の近傍を $n+1$ 個に絞ることができ, 共通部分を取れるようになる. $\mathbb{R}^n$ 上であればこの補題を用いることで定理 3.2 のような集合値写像の連続性に関する定理の証明が容易になる.

4 DC 計画問題の解析への利用

本節では定理 3.2 を利用して, 制御 DC 計画問題の最適値の下半連続性の十分条件を導く. これにより, 制約条件を変数で連続的に制御する際に不連続な値の落ち込みが起こらないことを保証できる.

4.1 導入

次のような DC 計画問題の一般形を考える.

$$\begin{aligned} \text{(DCP)} \quad & \min f(x) \\ & \text{subject to } x \in G_1 \setminus G_2 = G_1 \cap G_2^c \end{aligned}$$

ただし $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n, G_1 : \text{閉凸}, G_2 : \text{開凸}, G_1 \setminus G_2 \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$ とする. 制約条件 G_1, G_2 が同一の変数 $y \in Y$ で制御されるとき, すなわち集合値写像 $G_1, G_2 : Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ により (DCP) を

$$\begin{aligned} \text{(DCP)}_y \quad & \min f(x) \\ & \text{subject to } x \in \bar{G}(y) := G_1(y) \cap G_2^c(y) \end{aligned}$$

とする. この $(\text{DCP})_y$ を制御 DC 計画問題と呼ぶ. $(\text{DCP})_y$ の最適値 $\bar{\phi} \circ \bar{G}$ が Y 上で (実数値関数の) 下半連続性をもつための, 目的関数 f と制約条件 (集合値写像) G_1, G_2 の十分条件を, 定理 3.2 を用いて示す.

補助となる命題等を以下にまとめる.

4.2 $\bar{\phi}$ の半連続性と遺伝的性質

目的関数 f の半連続性より, 次の命題が得られる. ただし $\bar{\phi}$ は式 (1) で定義されたスカラー化関数である.

命題 4.1 ($\bar{\phi}$ の下半連続性) f が下半連続ならば, $\bar{\phi}$ は $l.s.c.(u)$.

命題 4.2 (下半連続の遺伝的性質) $\bar{\phi}$ が $l.s.c.(u)$ かつ G が $upper\text{-}continuous$ ならば, $\bar{\phi} \circ G$ は下半連続.

4.3 2つの集合値写像の共通部分をとる写像

2つの (一般に有限個の) 集合値写像の像の共通部分を像としてもつ集合値写像について, 次の定理が得られる. なお, 値域の空間は正規空間 (normal space) の必要があるが, 明らかに $\mathbb{R}^n$ は正規空間である.

定理 4.3 (共通部分の $upper\text{-}continuity$) $G_1, G_2: Y \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ が $upper\text{-}continuous$ かつ閉値な集合値写像, X が正規空間ならば, $G'(\cdot) := G_1(\cdot) \cap G_2(\cdot)$ は $upper\text{-}continuous$.

4.4 $(\text{DCP})_y$ の下半連続性

定理 3.2, 4.3, 命題 4.1, 4.2 より, 次の結論が得られる.

定理 4.4 f が $l.s.c.$, G_1 が $upper\text{-}continuous$ かつ閉値, G_2 が $lower\text{-}continuous$ かつ有界開凸値, $\bar{G}(\cdot) \neq \emptyset$ ならば, $\bar{\phi} \circ \bar{G}$ は下半連続.

証明 f : 下半連続なので, 命題 4.1 より $\bar{\phi}: l.s.c(u)$. G_2 : lower-continuous, 有界開凸値なので, 定理 3.2 より G_2^c : upper-continuous, 閉値. G_1, G_2^c : upper-continuous, 閉値なので, 定理 4.3 より $\bar{G}$: upper-continuous. $\bar{\phi}: l.s.c(u)$ かつ $\bar{G}$: upper-continuous なので, 定理 4.2 より $\bar{\phi} \circ \bar{G}$: 下半連続. ■

定理 4.4 の仮定のうち, G_1 の閉値性と G_2 の開凸値性は DC 計画問題であらかじめ仮定されている. このことから, 制御 DC 計画問題の下半連続性の十分条件としては特に

- 目的関数の下半連続性
- 制約条件それぞれの連続性

- G_2 の有界性

を確かめればよいことが分かる. この定理において (DCP) の前提条件である G_1 の凸性は不要であることから, $(DCP)_y$ の派生として G_1 の凸性を弱めた問題に対しても同様にして半連続性が保証できることを示している.

5 おわりに

本研究では, 集合値写像の補集合の連続性について, 一般的な集合値写像の連続性に関する定理を示した. またその利用方法として, 差集合を制約条件にもちかつその条件が集合値写像の像であるような数理計画問題の最適解の下半連続性を導き, 考察を行った.

今後の展開として, 集合値写像の他の連続性についても考察を行うことや, 逆写像と組み合わせるなどより広い利用方法を調べていく.

参考文献

- [1] S. Kobayashi, Y. Saito and T. Tanaka, *Convexity for compositions of set-valued map and monotone scalarizing function*, Pacific Journal of Optimization, **12**, 2016, 43–54.
- [2] T. Kubo, T. Tanaka and S. Yamada, *Ekeland's variational principle for set-valued maps via scalarization*, in Proceedings of Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, S. Akashi, D. S. Kim, T. H. Kim, G. M. Lee, W. Takahashi, and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2013, 283–289.
- [3] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Analysis., **30**, 1997, 1487–1496.
- [4] I. Kuwano, T. Tanaka and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **11**, 2010, 513–525.
- [5] A. A. Khan, C. Tammer and C. Zalinescu, *Set-valued optimization, An introduction with applications*, Springer-Verlags, Berlin Heidelberg, 2015.
- [6] S. Nishizawa, T. Tanaka and G. P. Georgiev, *On inherited properties for vector-valued multifunctions*, Multi-objective programming and goal programming, 2003, 215–220.
- [7] Y. Saito, T. Tanaka and S. Yamada, *On generalization of Ricceri's theorem for Fan-Takahashi minimax inequality into set-valued maps via scalarization*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **16**, 2015, 9–19.