

チェス盤上の配置問題について

茨城大教養 仙波 一郎 (Ichiro Semba)

1. はじめに

チェス盤上で、ある条件を満たす駒の置き方をすべて求める問題 (配置問題) を 4 種類考察する。駒はクイーン、スーパー・クイーン、ナイト、ビショップ、ルークとする。配置問題を論理関数で表現し [1, 2, 3]、二分決定グラフ (BDD: Binary Decision Diagram) [4, 5] を構成して解を求める。

問題 1: チェス盤 (マス目が縦に n 個、横に n 個) 上で駒が互いにきき筋に入らないように最大何個の駒を置けるか、またその置き方は何通りか [6]。

問題 2: チェス盤上のすべてのマス目がきき筋に入るようにするには最小何個の駒でよいか、またその置き方は何通りか [7, 8]。
置かれた駒同士の関係について 3 通りの場合が考えられる。

場合 (1): 駒同士がきき筋に入っても入らなくてもよい。

場合 (2): 駒同士がきき筋に入る。

場合 (3): 駒同士がきき筋に入らない。

問題 3: 線上無三問題

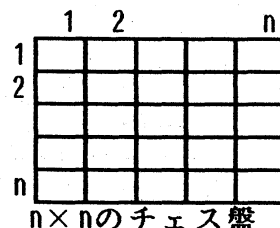
チェス盤上のどの方向にも 3 個の駒が線上 (縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線) に並ばないように、最大何個の駒が置けるか (最大 $2n$ 個は明らか)、またその置き方は何通りか [7, 9]。

問題 4: チェス盤上で、線上 (縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線) に 3 個の駒が並ばないように置き、もう 1 つ空所に駒を置くとどこかの線上に駒が 3 個必ず並ぶようにするには、最小何個の駒でよいか。またその置き方は何通りか [9]。

$n \times n$ のチェス盤上のマス目を (i, j) で表し、対応する論理変数と BDD 変数をつぎのように定義する。

[論理変数] $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

$x_{i,j} = 1$, マス目 (i, j) に駒が
割り当てられた場合。
0, そうでない場合。



1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

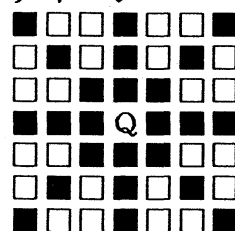
BDD 変数

[BDD 変数] 論理変数 $x_{i,j}$ に割り当てられる BDD 変数を $n(i-1)+j$ とする。

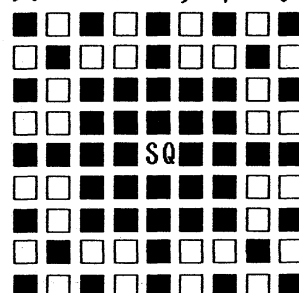
実験結果は、HITACHI workstation 3050R (80MByte) で、最大 BDD ノード数 200 万として実行した。

[駒のきき筋]

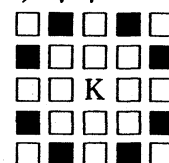
クイーン



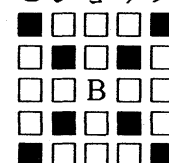
スーパー・クイーン



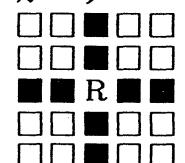
ナイト



ビショップ



ルーク



2. 配置問題

問題 1: チェス盤上で駒が互いにきき筋に入らないように最大何個の駒を置けるか、またその置き方は何通りか。

[条件 1] n^2 個のマス目から r 個を選ぶ。

$$f_{n^2-r, r}(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) = 1$$

$f_{i,j}(y_1, y_2, \dots, y_{i+j})$ は $i+j$ 個の論理変数 $y_1, y_2, \dots, y_{i+j}$ のうち j 個の論理変数が値 1 をとるすべての組合せを表現する論理関数で、つぎの漸化式を用いて求める。

$$f_{0,j}(y_1, y_2, \dots, y_j) = y_1 y_2 \dots y_j \quad (j \geq 1)$$

$$f_{i,0}(y_1, y_2, \dots, y_i) = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_i \quad (i \geq 1)$$

$$f_{i,j}(y_1, y_2, \dots, y_{i+j}) = f_{i,j-1}(y_1, y_2, \dots, y_{i+j-1}) y_{i+j} \\ + f_{i-1,j}(y_1, y_2, \dots, y_{i+j-1}) \bar{y}_{i+j} \quad (i \geq 1, j \geq 1)$$

[条件 2] マス目 (i, j) に駒が存在すると、そのきき筋に入るマス目 (u, v) は空である。マス目 (i, j) のきき筋に入るマス目 (u, v) で、 $u > i$ を満たすものの集合を $P(i, j)$ とする。ただし、クイーン、スーパークイーン、ナイト、bishop については、マス目 (i, j) , $1 \leq j \leq n$ に駒が 1 個存在する条件を付加する。

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \left(\bar{x}_{i,j} + \prod_{(u,v) \in P(i,j)} \bar{x}_{u,v} \right) \right) = 1$$

$a+b_1 b_2 \dots b_k = (a+b_1)(a+b_2) \dots (a+b_k)$ を利用して、上式を $a+b$ の形の積に変形する。論理変数 a, b に対応する BDD 変数を $bdd(a), bdd(b)$ とする。 $a+b$ の積を計算していく順序は $\min(bdd(a), bdd(b))$ の降順に行う。このようにすると、BDD を構成するための時間はかかるが、途中の BDD サイズの変化は小さくなることが多い。したがって、BDD のノードを有効に利用でき、より大きい n に対する解が得られる。

[すべての置き方]

[条件 1] $\cdot$ [条件 2] = 1 を満たす解で、 r が最大のもの。

[実験結果] 駒の最大個数と置き方の数 (カッコ内)。BDD 構成中にノード数が 200 万を越えた場合、**** と書く。

n	クイーン	スーパー クイーン	ナイト	ビショップ	ルーク
1	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)	1(1)
2	1(4)	1(4)	4(1)	2(4)	2(2)
3	2(8)	1(9)	5(2)	4(8)	3(6)
4	4(2)	2(20)	8(6)	6(16)	4(24)
5	5(10)	3(24)	13(1)	8(32)	5(120)
6	6(4)	4(44)	18(2)	10(64)	6(720)
7	7(40)	5(54)	25(1)	12(128)	7(5040)
8	8(92)	6(80)	32(2)	14(256)	8(40320)
9	9(352)	8(16)	41(1)	****	9(362880)
10	10(724)	10(4)	****		10(10!)
11	11(2680)	11(44)			11(11!)
12	****	12(6)			12(12!)
13		13(78)			13(13!)
14		14(8)			14(14!)

n	クイーン	スーパー クイーン	ナイト	ビショップ	ルーク
15 16 17		15(16) 16(18) ****			15(15!) ****

〔新しい結果〕 スーパークイーンの最大個数とその置き方。

問題2: チェス盤上のすべてのマス目がきき筋に入るようにするには最小何個の駒でよいか、またその置き方は何通りか。置かれた駒同士の関係について3通りの場合が考えられる。

場合(1): 駒同士がきき筋に入っても入らなくてもよい。

場合(2): 駒同士がきき筋に入る。

場合(3): 駒同士がきき筋に入らない。

〔条件1〕 n^2 個のマス目から r 個を選ぶ。

$$f_{n^2-r, r}(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) = 1$$

〔条件2〕 マス目 (i, j) をきき筋とするマス目の集合を $Q(i, j)$ とする。

ただし、マス目 (i, j) は除く。

場合(1): マス目 (i, j) と、集合 $Q(i, j)$ のマス目全体の中に少なくとも1つ駒が存在する。

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n (x_{i,j} + \sum_{(u,v) \in Q(i,j)} x_{u,v}) \right) = 1$$

上式において、BDDを構成していくときに、取り上げるマス目 (i, j) の順序はチェス盤の周辺から中心へとする。

具体的に、 $n=5$ の場合を示す。

数字は取り上げる順を意味する。

10	8	6	4	2
16	22	20	18	15
14	24	25	23	13
12	21	19	17	11
9	7	5	3	1

$a(b_1+b_2+\dots+b_k)=ab_1+ab_2+\dots+ab_k$ を利用して、 a と $b_1+b_2+\dots+b_k$ の論理積を計算する代わりに、 ab_1 の論理和を順次計算していく。このようにすると、BDDを構成するための所要時間はかかるが、途中のBDDサイズの変化は小さくなることが多い。したがって、BDDのノードを有効に利用でき、より大きい n に対する解が得られる。

場合(2): 集合 $Q(i, j)$ のマス目全体の中に少なくとも1つ駒が存在する。

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \left(\sum_{(u,v) \in Q(i,j)} x_{u,v} \right) \right) = 1$$

場合(3): マス目 (i, j) と、集合 $Q(i, j)$ のマス目全体の中に少なくとも1つ駒が存在する。追加条件として、マス目 (i, j) に駒が存在するとき、集合 $Q(i, j)$ のマス目の中に他の駒が存在してはならない。

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \left(x_{i,j} + \sum_{(u,v) \in Q(i,j)} x_{u,v} \right) \right) = 1$$

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \left(\bar{x}_{i,j} + \prod_{(u,v) \in Q(i,j)} \bar{x}_{u,v} \right) \right) = 1$$

[すべての置き方]

[条件1]・[条件2] = 1 を満たす解で、 r が最小のもの。

[実験結果] 駒の最小個数と置き方の数(カッコ内)。

クイーン

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	1(4)	1(4)	1(4)
3	1(1)	1(1)	1(1)
4	2(12)	2(12)	3(16)
5	3(186)	3(70)	3(16)
6	3(4)	4(960)	4(120)
7	4(86)	4(22)	4(8)
8	5(4860)	5(352)	5(728)
9	5(114)	5(10)	5(92)
10	5(8)	****	5(8)
11	5(2)		5(2)
12	6(8)		****
13	****		

スーパー・クイーン

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	1(4)	1(4)	1(4)
3	1(9)	1(9)	1(9)
4	1(4)	1(4)	1(4)
5	1(1)	1(1)	1(1)
6	2(8)	2(4)	2(4)
7	3(678)	3(234)	3(72)
8	3(48)	3(24)	4(978)
9	3(4)	3(4)	4(288)
10	4(515)	4(171)	4(40)
11	4(4)	4(4)	5(536)
12	4(1)	4(1)	****
13	****	****	

ナイト

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	4(1)	0(0)	4(1)
3	4(8)	0(0)	4(8)
4	4(9)	6(36)	4(9)
5	5(47)	7(480)	5(7)
6	8(127)	8(36)	8(3)
7	10(10)	10(10)	13(688)
8	12(2)	14(16)	14(16)
9	14(2)	18(84)	14(2)
10	16(4)	22(2704)	16(4)
11	21(800)	****	****
12	****		

ビショップ

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	2(4)	4(1)	2(4)
3	3(6)	4(16)	3(2)
4	4(25)	4(1)	4(16)
5	5(104)	6(8)	5(44)
6	6(484)	8(3721)	6(256)
7	7(2136)	8(108)	7(768)
8	8(11664)	10(10816)	8(5184)
9	9(71136)	****	9(25344)
10	10(451584)		****
11	****		

ルーク

n	場合(1)	場合(2)	場合(3)
1	1(1)	1(1)	1(1)
2	2(6)	2(4)	2(2)
3	3(48)	3(6)	3(6)
4	4(488)	4(80)	4(24)
5	5(6130)	5(410)	5(120)
6	6(92592)	6(5112)	6(720)
7	7(1642046)	7(48818)	7(5040)
8	8(33514112)	8(695424)	8(40320)
9		9(9589266)	9(362880)
10		****	****

〔新しい結果〕 3つの場合について、各駒の最小個数とその置き方。

問題3 (線上無三問題) : チェス盤上のどの方向にも3個の駒が線上(縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線)に並ばないように最大何個の駒が置けるか(最大2n個は明らか)。

〔条件1〕 n^2 個のマス目から2n個を選ぶ。

$$\prod_{n^2-2n, 2n} (x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) = 1$$

〔条件2〕 線上にある3個のマスの組 $[(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)]$ の集合を $R(n)$ とする。線上に並ぶ3個のマスのうち、たかだか2個に駒が存在する。

$$\prod (\bar{x}_{i_1, j_1} + \bar{x}_{i_2, j_2} + \bar{x}_{i_3, j_3}) = 1$$

$$[(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)] \in R(n)$$

論理変数 $x_{i_1, j_1}, x_{i_2, j_2}, x_{i_3, j_3}$ に対応するBDD変数のうち、小さい値を $\min(x_{i_1, j_1}, x_{i_2, j_2}, x_{i_3, j_3})$ とし、 $\min(x_{i_1, j_1}, x_{i_2, j_2}, x_{i_3, j_3})$ の降順にBDDを構成していく。このようにすると、BDDを構成するための時間はかかるが、途中のBDDサイズは急激に変化しないのでBDDノードを有効に利用して大きいnに対する解が得られる。

置き方に対称性(点対称、対角対称)を導入する。

〔条件3.1〕 (点対称) チェス盤の中心に対して対称の位置にあるマス目 $((i, j)$ と $(n+1-i, n+1-j))$ には同時に駒が存在するかまたは存在しない。

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_{i,j} \oplus x_{n+1-i, n+1-j}) = 1$$

論理変数 $x_{i,j}, x_{n+1-i, n+1-j}$ に対応するBDD変数のうち、小さい値を $\min(x_{i,j}, x_{n+1-i, n+1-j})$ とし、 $\min(x_{i,j}, x_{n+1-i, n+1-j})$ の降順にBDDを構成する。

〔条件3.2〕 (対角対称) チェス盤の2つの対角線に対して対称の位置にあるマス目 $((i, j)$ と $(j, i))$ には同時に駒が存在するかまたは存在しない。

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n (\bar{x}_{i,j} \oplus x_{j,i}) \right) = 1$$

BDDの構成の方法は条件3.1と同様。

[すべての置き方]

解: [条件1] · [条件2] = 1 を満たすもの。

点対称解: [条件1] · [条件2] · [条件3.1] = 1 を満たすもの。

対角対称解: [条件1] · [条件2] · [条件3.2] = 1 を満たすもの。

[実験結果] 置き方の数。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
解	1	1	2	11	32	50	132	320	****
点対称解	1	1	2	7	0	18	40	36	28
対角対称解	1	1	2	3	4	4	2	10	6

n	10	11	12
解			
点対称解	****		
対角対称解	9	12	****

[新しい結果] 対角対称解。

問題4: チェス盤上で、線上（縦横及び対角線だけでなく、あらゆる直線）に3個の駒が並ばないように置き、もう1つ空所に駒を置くとどこかの線上に駒が3個必ず並ぶようにするには、最小何個の駒でよいか。またその置き方は何通りか。

[条件1] n^2 個のマス目から r 個を選ぶ。

$$\prod_{n^2-r, r} (x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) = 1$$

[条件2] 線上に並ぶ3個のマス目のうち、たかだか2個に駒が存在する。

$$\prod (\bar{x}_{i_1, j_1} + \bar{x}_{i_2, j_2} + \bar{x}_{i_3, j_3}) = 1$$

$$[(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)] \in R(n)$$

[条件3] マス目 (i, j) を含み、線上に並ぶ3個のマス目のうち、マス目 (i, j) を除く他の2個のマス目に駒が存在するものがある。

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n (x_{i,j} + \sum_{[(i, j), (i_2, j_2), (i_3, j_3)] \in R(n)} \bar{x}_{i,j} \cdot x_{i_2, j_2} \cdot x_{i_3, j_3}) \right) = 1$$

マス目 (i, j) に割り当てられた BDD 変数の降順に BDD を構成していく。

[すべての置き方]

[条件 1] · [条件 2] · [条件 3] = 1 を満たす解で、 r が最小のもの。

[実験結果] 置き方の数。

n	1	2	3	4	5	6
解	1(1)	4(1)	4(5)	4(2)	6(152)	6(8)

n	7	8	9	10	11
解	8(****)	8(****)	8(****)	10(****)	*(****)

[新しい結果] なし。

3. 結論

チェス盤上で駒を配置する 4 種類の配置問題に対して、論理関数による解法を示した。BDD を利用して結果を得たが、問題を表現する BDD をどのような順序で構成していくかによって、BDD サイズが変わってくる。ここでは、所要時間はかかるが BDD サイズの変化が小さくなること较多的い方法を示した。従来の結果と比較していくつかの問題で、新しい結果を得た。

謝辞

BDD パッケージの利用を許可して頂いた平石裕実教授、湊氏、越智氏に感謝いたします。有益な御助言を頂く矢島脩三教授に感謝いたします。

参考文献

- [1] 仙波一郎, 矢島脩三: 組合せ問題の論理関数による解法について、数理解析研究所講究録 833, 計算機構とアルゴリズム, pp204-213, 1993
- [2] I. Semba, S. Yajima: "Combinatorial Algorithms by Boolean Processing I", 情報処理学会研究報告, Vol. 93, No. 24, pp25-32, 1993.
- [3] I. Semba, S. Yajima: "Combinatorial Algorithms by Boolean Processing II", 情報処理学会研究報告, Vol. 93, No. 24, pp33-40, 1993.
- [4] S. Minato, N. Ishiura and S. Yajima: "Shared Binary Decision Diagram with Attributed Edges for Efficient Boolean Function Manipulation", Proc. 27th ACM/IEEE DAC, pp. 52-57, (June 1990).
- [5] H. Ochi, K. Yasuoka and S. Yajima: "A Breadth-First Algorithm for Efficient Manipulation of Shared Binary Decision Diagrams in the Secondary Memory", The 45th General Convention of IPSJ, 6-137, (Oct. 1992).
- [6] J. S. Madachy: "MADACHY'S MATHEMATICAL RECREATIONS", 1979.
みやた よしゆき訳: 数学レクリエーション, pp23-45, 啓学出版, 1987.
- [7] R. K. Guy: "Unsolved Problems in Number Theory", Springer-Verlag, 1981.
一松 信監訳: 数論における未解決問題集, pp. 114-116, 191-193, 1982.
- [8] M. Gardner: "MATHEMATICAL MAGIC SHOW", 1977.
一松 信訳: 続々数学魔法館, pp1-20, 東京図書, 1979.
- [9] M. Gardner: "Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers", Freeman, 1989.
一松 信訳: ペンローズ・タイルと数学パズル, 丸善, 1992.