

母関数による Wiener-Hermite 展開の定式化と

2次元非粘性流体の Gauss 型定常厳密解^{*}

兵医大・数学 土井正明

関学大・理 今村 勤

§1. 序論

乱流理論において、一つの有効な方法として、速度場を確率関数と見なし、Wiener-Hermite⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾ 展開する方法がある。即ち未知の確率関数を理想確率関数の Hermite 関数で展開する方法である。

この方法の利点として

- (1) Gauss 分布に近い確率関数を扱うのに適している。
- (2) 時間に依存する理想確率関数⁵⁾の導入によって、切断の近似を良く保ちながら、少数項の展開形を用いることが出来る場合が多い。
- (3) 確率関数を直接取り扱うために、エネルギー・スペクトル、分散等が負であるような非物理的な解になることは無い。
- (4) 解を利用して、低次のモーメントのみならず、高次のモーメントを求めることが出来る。

* 本論文は 1978 年 1 月 18 日に「2次元非圧縮等方性乱流」の題で講演したものと同内容である。

(5) 近似の精度を本質的に上げることが出来る。

等があげられる。

この論文では, Wiener-Hermite 展開の方法を母関数⁶⁾ (generating functional) によって再構成する。これは従来の生成・消滅演算子による構成法に比べて, Wiener-Hermite 関数の色々の性質を導出する上で見通しがかより。これを §2, §3 で述べる。§4 で 2 次元非粘性非圧縮乱流の定常 Gauss 型厳密解を pseudo-scalar 型理想確率関数を用いて導出する。これは Cook, Taylor の解⁷⁾ と一致する。

§2. 母関数による Wiener-Hermite 展開の定式化⁶⁾

理想確率関数 $Q_i(x)$ ($i=1, 2, 3$) を特性関数が

$$\langle \exp \{ i \int dx Z_i(x) a_i(x) \} \rangle \equiv \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx Z_i(x) Z_i(x) \right\} \quad (2-1)$$

である確率関数と定義する。ここで x は 3-次元ユークリッド空間のベクトルを表し, 統計的平均値は理想確率関数 $Q_i(x)$ の 1 価関数 $F[\vec{a}(\cdot)]$ に対して

$$\langle F[\vec{a}(\cdot)] \rangle \equiv \int P[s\vec{a}(\cdot)] F[\vec{a}(\cdot)] \quad (2-2)$$

で定義する。Lebesgue-Stieltjes 測度 $P[s\vec{a}(\cdot)]$ は (2-1) より

$$P[\delta \vec{a}(\cdot)] = N^{-1} \delta \vec{a}(\cdot) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)\right] \quad (2-3)$$

で与えられる。ここで

$$\delta \vec{a}(\cdot) \equiv \lim_{dx_j \rightarrow 0} \prod_j [da_i(x_j)] \quad (2-4)$$

$i=1, 2, 3$

であり，添字 j は 3次元ユークリッド空間を細胞 (Cell) に分割したときの指標を意味する。 N は規格化定数で

$$N \equiv \int \delta \vec{a}(\cdot) \exp\left[-\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)\right] \quad (2-5)$$

と形式的に書ける。 N 自身は発散量である。

確率関数 $a_i(x)$ の 1 価汎関数で，統計的平均値が δ -汎関数的 singularity を含めた意味で存在するような確率汎関数 $F[\vec{a}(\cdot)]$ の全体，即ち確率汎関数空間 $\Omega[\vec{a}(\cdot)]$ を考える。以下の議論では， δ -汎関数を通常汎関数のごとく見なして取り扱う。

確率汎関数空間 $\Omega[a(\cdot)]$ 上で，直交汎関数の理論を展開しよう。まず Hermite 関数に対応する理想確率関数 $a_i(x)$ の Wiener-Hermite 汎関数を

$$H_{i_1 \dots i_N}^{[N]}(x_1, \dots, x_N) = \exp\left[\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)\right]$$

$$\times \prod_{k=1}^N \left[-\frac{\delta}{\delta a_{i_k}(x_k)} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x) \right] \quad (2-6)$$

で定義する。ここで $\delta/\delta a_i(x)$ は汎関数微分である。

ここで上の Wiener-Hermite 汎関数の母汎関数 (generating functional) を次の様に導入する。即ち理想確率関数 $\vec{a}(x)$ と通常関数 $\vec{z}(x)$ の汎関数

$$G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] \equiv \exp \left\{ \int dx [z_i(x) a_i(x) - \frac{1}{2} z_i(x) z_i(x)] \right\} \quad (2-7)$$

を考える。これは Wiener-Hermite 汎関数の母汎関数になっている, 即ち

$$G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N H_{i_1 \cdots i_N}^{[N]}(x_1, \cdots, x_N) z_{i_1}(x_1) \cdots z_{i_N}(x_N) \quad (2-8)$$

となっている。実際汎関数 $G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)]$ の一般化された Taylor 展開において $z_{i_1}(x_1) \cdots z_{i_N}(x_N)$ の係数は

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^N G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)]}{\delta z_{i_1}(x_1) \cdots \delta z_{i_N}(x_N)} \bigg|_{\vec{z}=0} \\ &= \frac{\delta^N \exp \left\{ \int dx [z_i(x) a_i(x) - \frac{1}{2} z_i(x) z_i(x)] \right\}}{\delta z_{i_1}(x_1) \cdots \delta z_{i_N}(x_N)} \bigg|_{\vec{z}=0} \end{aligned}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)} \prod_{j=1}^N \left[\frac{\delta}{\delta z_{ij}(x_j)} \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx [z_i(x) - a_i(x)] [z_i(x) - a_i(x)] \right\} \Big|_{\vec{z}(\cdot)=0}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)} \prod_{j=1}^N \left[-\frac{\delta}{\delta a_{ij}(x_j)} \right] \times e^{-\frac{1}{2} \int dx [z_i(x) - a_i(x)] [z_i(x) - a_i(x)]} \Big|_{\vec{z}(\cdot)=0}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)} \prod_{j=1}^N \left[-\frac{\delta}{\delta a_{ij}(x_j)} \right] e^{-\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)}$$

となる。この母関数 $G[\vec{z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)]$ を用いて, Wiener Hermite 関数の色々の性質を導き出すために, 次の Lemma を始めに証明する。

[Lemma] 任意のベクトル値関数 $f_i(x)$ ($i=1, 2, 3$) に対して

$$\langle e^{\int dx f_i(x) a_i(x)} \rangle = e^{\frac{1}{2} \int dx f_i(x) f_i(x)} \quad (2-9)$$

である。

$$\text{実際} \quad \langle e^{\int dx f_i(x) a_i(x)} \rangle = \frac{\int d\vec{a}(x) e^{-\frac{1}{2} \int dx [a_i(x) a_i(x) + f_i(x) a_i(x)]}}{\int d\vec{a}(x) e^{-\frac{1}{2} \int dx a_i(x) a_i(x)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\mathbf{x}} \frac{\int d\vec{a}(\mathbf{x}) e^{-\frac{d\mathbf{x}}{2}} [a_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})][a_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})]}{\int d\vec{a}(\mathbf{x}) e^{-\frac{d\mathbf{x}}{2}} a_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x})} e^{\frac{d\mathbf{x}}{2} f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})} \\
&= e^{\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})}
\end{aligned}$$

となる。従って (2-7), (2-8) と (2-9) を利用すると容易に次の Lemma が得られる。

[Lemma]

$$\begin{aligned}
&\langle G[\vec{Z}, \vec{a}] \cdots G[\vec{Z}_m, \vec{a}] \rangle \\
&= \exp \left[\sum_{i < j} \int d\mathbf{x} \vec{Z}_i(\mathbf{x}) \cdot \vec{Z}_j(\mathbf{x}) \right] \\
&= \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_m=0}^{\infty} \frac{1}{N_1! \cdots N_m!} \int \prod_{\substack{k_1=1 \\ i=1,2,3}}^{N_1} [d\mathbf{x}_{[1,k_1]} \vec{Z}_{1,j_{k_1}}^{(i)}(\mathbf{x}_{[1,k_1]})] \\
&\quad \times \cdots \times \prod_{\substack{k_m=1 \\ i=1,2,3}}^{N_m} [d\mathbf{x}_{[m,k_m]} \vec{Z}_{m,j_{k_m}}^{(i)}(\mathbf{x}_{[m,k_m]})] \\
&\quad \times \langle H_{j_{[1,1]} \cdots j_{[1,N_1]}}^{[N_1]}(\mathbf{x}_{[1,1]}, \cdots, \mathbf{x}_{[1,N_1]}) \rangle \cdots \\
&\quad \times H_{j_{[m,1]} \cdots j_{[m,N_m]}}^{[N_m]}(\mathbf{x}_{[m,1]}, \cdots, \mathbf{x}_{[m,N_m]}) \rangle \quad (2-10)
\end{aligned}$$

この Lemma から, Wiener-Hermite 汎関数の多重積の平均に關する性質が容易に導き出される。

[定理]

$$\begin{aligned} & \left\langle H_{j_{[1,1]} \dots j_{[1,N_1]}}^{[N_1]}(X_{[1,1]}, \dots, X_{[1,N_1]}) \dots H_{j_{[m,1]} \dots j_{[m,N_m]}}^{[N_m]}(X_{[m,1]}, \dots, X_{[m,N_m]}) \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{\text{右のすべての} \\ \text{可能な分け方} \\ \text{についての和}}} \prod_{\substack{\text{すべての } [a,p] \text{ と } [b,q] \text{ を} \\ a \neq b \text{ の条件で} \\ \text{対 } [a,p], [b,q] \\ \text{に分け, 各対についての積}}} \delta_{j_{[a,p]} j_{[b,q]}} \delta[X_{[a,p]} - X_{[b,q]}] \end{aligned} \quad (2-11)$$

$$= 0 \quad \text{for otherwise}$$

が得られる。上の定理を次の様な Feynman rule 的計算規則にまとめた方が分かり易いであろう。

- (i) 各 $H^{[N_k]}$ に対して, N_k 個の点 $j_{[k,1]} \dots j_{[k,N_k]}$ を横に並べて書く。
- (ii) 各点をスフツツに分け, すべてのグラフを書く。ただし同じ $H^{[N_k]}$ に属するものは対をとらない。対をとれずに点が残るとき, 例えば $\sum N_k$ が奇数であったり, 1つの N_s が他の N_s の和よりも大きかったりするときは, 統計的平均値は 0 である。

- (iii) 各対 $j_{[a,b]}, j_{[c,d]}$ に対して

$$\delta_{j_{[a,b]} j_{[c,d]}} \delta^{(3)}(X_{[a,b]} - X_{[c,d]})$$

を割り当てる。

(iv) (iii) で与えた factor の積を作る。

(v) 全ての対の種類に対応する factor の積の和を取る。

例えば $\langle H_i^{(1)}(X) H_j^{(1)}(Y) H_{kl}^{(2)}(Z_1, Z_2) \rangle$ は

(i) $(i, X) \cdot$
 $(j, Y) \cdot$
 $(k, Z_1) \quad (l, Z_2)$

(ii) 

(iii) & (iv)

$$\delta_{ik} \delta(X - Z_1) \delta_{jl} \delta(Y - Z_2) \quad \delta_{il} \delta(X - Z_2) \delta_{jk} \delta(Y - Z_1)$$

(v)

$$\begin{aligned} & \langle H_i^{(1)}(X) H_j^{(1)}(Y) H_{kl}^{(2)}(Z_1, Z_2) \rangle \\ &= \delta_{ik} \delta(X - Z_1) \delta_{jl} \delta(Y - Z_2) \\ &+ \delta_{il} \delta(X - Z_2) \delta_{jk} \delta(Y - Z_1) \end{aligned}$$

となる。これは (2-10) より (2-11) を導き出す手順から容易に得られる規則であらう。

空間に一様性があるときの, $\langle \psi_i(x) \rangle = 0$ の確率関数 $\psi_i(x)$ の Wiener-Hermite 展開は

$$\begin{aligned} \psi_i(x) = & \int dx' K''(x-x') H''(x') \\ & + \int dx' dx'' K_{ijk}^{(2)}(x-x', x-x'') H_{jk}^{(2)}(x', x'') \\ & + \dots \end{aligned} \quad (2-12)$$

と書くことが出来る。

空間に一様性があるとき, 例えは (2-12) を見ると, Fourier 変換 で話をする と便利である。波数空間における理想確率関数 $\tilde{a}_i(k)$ を

$$\tilde{a}_i(k) \equiv \frac{1}{[2\pi]^{3/2}} \int dx e^{ik \cdot x} a_i(x) \quad (2-13)$$

で定義する。従って特性関数は (2-1) より

$$\langle \exp[i \int dx \tilde{z}_i(-k) \tilde{a}_i(k)] \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int dk \tilde{z}_i(-k) \tilde{z}_i(k)} \quad (2-14)$$

となる。ここで $\tilde{z}_i(k)$ は

$$\tilde{z}_i(k) \equiv [2\pi]^{-3/2} \int dx e^{ik \cdot x} z_i(x)$$

とする。母関数は (2-7) より

$$G[\vec{Z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] = \exp \left\{ \int dx \left[\tilde{Z}_i(-|k) \tilde{a}_i(|k) - \frac{1}{2} \tilde{Z}_i(-|k) \tilde{Z}_i(|k) \right] \right\} \quad (2-15)$$

という形に書けるから，波数空間における Wiener-Hermite 汎関数は

$$G[\vec{Z}(\cdot), \vec{a}(\cdot)] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d|k_1 \cdots d|k_N H_{i_1 \cdots i_N}^{[N]}(|k_1, \cdots, |k_N) \\ \times \tilde{Z}_{i_1}(-|k_1) \cdots \tilde{Z}_{i_N}(-|k_N) \quad (2-16)$$

で与えられる。すなわち具体的形は

$$H_{i_1 \cdots i_N}^{[N]}(|k_1, \cdots, |k_N) = e^{\frac{1}{2} \int d|k \tilde{a}_i(-|k) \tilde{a}_i(|k)} \\ \times \prod_{j=1}^N \left[-\frac{\delta}{\delta \tilde{a}_{i_j}(-|k_j)} \right] e^{-\frac{1}{2} \int d|k \tilde{a}_i(-|k) \tilde{a}_i(|k)} \quad (2-17)$$

である。Wiener-Hermite 汎関数の多重積の統計的平均値は (2-15) 及び (2-16) を使うと

$$\left\langle H_{j[1,1] \cdots j[1,N_1]}^{[N_1]}(|k_{1,1}, \cdots, |k_{1,N_1}) \times \cdots \times H_{j[m,1] \cdots j[m,N_m]}^{[N_m]}(|k_{m,1}, \cdots, |k_{m,N_m}) \right\rangle \\ = \sum_{\substack{\text{右のすべての可能な分け方} \\ \text{についての和}}} \prod \delta_{j[a,b] j[b,q]} \delta(|k_{[a,b]} + |k_{[b,q]})$$

すべての $[a,b]$ を $a \neq b$ の条件のもとで
対 $[a,b] [b,q]$ に分け各対についての和

$= 0$ for otherwise

となる。従って波数空間における Feynman 型計算規則は座標空間における Feynman 型規則において, factor

$\delta_{j[s]j[t]} \delta[x_s - x_t]$ を $\delta_{j[s]j[t]} \delta[|k_s + k_t|]$ と置き換える以外, 全く同じである。また Wiener-Hermite 展開 (2-12) は

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i(k; t) = & \tilde{K}_{ii}^{(1)}(k; t) H_{i_1}^{(1)}(k) \\ & + \int dk_1 \tilde{K}_{ii, i_1}^{(2)}(k - k_1, k_1; t) H_{i_1, i_2}^{(2)}(k - k_1, k_1) + \dots \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ii, \dots, i_N}^{[N]}(k_1, \dots, k_N) = & [2\pi]^{-\frac{N}{2}(N+1)} \int dx_1 \dots dx_N e^{-i \sum_{j=1}^N |k_j \cdot x_j|} \\ & \times K_{ii, \dots, i_N}^{[N]}(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (2-18)$$

である。

§Ⅲ 時間的に変化する理想確率関数を用いた Wiener-Hermite 展開⁵⁾

強い乱流状態は Gauss 分布に近いという実験事実を反映するような Wiener-Hermite 展開の理論を考える。例えば速度場が Navier-Stokes 方程式に従う場合, 速度場が常に

Gauss分布に近いということはN.S.方程式の非線形項の効果の大部分がGauss分布へ寄与していることを意味する。従って理想確率関数を各時刻ごとに取り直すことによって、N.S.方程式の非線形項の効果のうち、大きな部分をGauss項に"くりこみ"、補正項を小さく保たせることによって、数項で良い近似が成立する様に理論を構成する必要があることを意味している。

N.S.方程式の非線形項は2次であるから、理想確率関数 $\vec{a}(lk:t)$ の時間変化を

$$\begin{aligned} \partial_t H_i^{(0)}(lk:t) &= L_i^{(0)}(lk:t) + L_{ie}^{(0)}(lk:t) H_e^{(0)}(lk:t) \\ &+ \int dlk' L_{ielm}^{(2)}(lk-lk', lk':t) H_{elm}^{(2)}(lk-lk', lk':t) \quad (3-1) \end{aligned}$$

で記述出来ると仮定する。ここで空間の等方性を仮定した。

$\vec{a}(lk:t)$ が各時刻で理想確率関数であるための必要十分条件は(2-14)である。即ち $\vec{a}(lk:0)$ が理想確率関数であるとするとき、

$$\partial_t \langle a_{i_1}(lk_1:t) \cdots a_{i_N}(lk_N:t) \rangle = 0 \quad (3-2)$$

但し $N = 1, 2, 3, \dots$, か, $\vec{a}(lk:t)$ が任意の時刻で理想確率関数であるための条件である。従って積分核 $L^{(0)}, L^{(1)}, L^{(2)}$ に対する条件は

$$L^{(0)}(lk:t) = 0 \quad (3-3)$$

$$L_{ik}^{(0)}(k:t) + L_{ki}^{(0)}(-k:t) = 0 \quad (3-4)$$

$$\left[L_{ijl}^{(2)}(k_2, k_3) + L_{jli}^{(2)}(k_3, k_1) + L_{lji}^{(2)}(k_1, k_2) \right]$$

$$\times \delta(k_1 + k_2 + k_3) = 0 \quad (3-5)$$

である。但し $L^{(2)}$ を一般性を失うことなく

$$L_{ijl}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) = L_{ijl}^{(2)}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$$

と仮定することが出来る。

ここで一般性を失うことなく $L^{(0)} = 0$ にとることが出来ることを示す。新しい理想確率関数 $\vec{b}(k:t)$ を

$$\vec{b}(k:t) \equiv \left[\mathcal{A} e^{\int_0^t L^{(0)}(-k:\tau)^T} \right] \vec{a}(k:t) \quad (3-6)$$

で定義する。ただし $\mathcal{A}$ は反時間順序積 (anti-time ordered product) を表わす。又 τ は転置行列を取ることを表わしている。 $\vec{a}(k:t)$ が理想確率関数であれば、 $\vec{b}(k:t)$ も理想確率関数であることは

$$\left[\mathcal{A} e^{\int_0^t L^{(0)}(k:\tau)^T} \right]^T = \sigma \tau \left[e^{\int_0^t L^{(0)}(k:\tau)} \right] \quad (3-7)$$

$$\left[\mathcal{A} e^{\int_0^t L^{(0)}(-k:\tau)^T} \right] \left[\sigma \tau e^{\int_0^t L^{(0)}(k:\tau)} \right] = \mathbb{1} \quad (3-8)$$

$$\left[\sigma \tau e^{\int_0^t L^{(0)}(k:\tau)} \right] \left[\mathcal{A} e^{\int_0^t L^{(0)}(-k:\tau)^T} \right] = \mathbb{1} \quad (3-9)$$

に注意すると、 $\vec{b}(k:t)$ の特性関数が

$$\langle e^{i \int dk \vec{Z}(-k) \cdot \vec{b}(k:t)} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int dk \vec{Z}(-k) \cdot \vec{Z}(k)} \quad (3-10)$$

となることからわかる。ここで T は時間順序積 (time-ordered product) を表わす。さらに (2-17) と (3-6) より

$$H_{i_1 \dots i_N}^{[N]}(k_1, \dots, k_N) = \prod_{j=1}^N \left[T e^{\int_0^t d\tau L''(-k_j: \tau)} \right]_{i_j l_j} \\ \times \bar{H}_{l_1 \dots l_N}^{[N]}(k_1, \dots, k_N) \quad (3-11)$$

が成立する。ここで $\bar{H}$ は $\vec{b}(k:t)$ の Wiener-Hermite 関数である。この新しい理想関数 $\vec{b}(k:t)$ の時間微分の Wiener-Hermite 展開が H'' の項をもたないことは, (3-1), (3-3), (3-6), (3-11) を用いて, 実際

$$\partial_t b_i(k:t) = \left[\mathcal{A} e^{\int_0^t d\tau L''(-k: \tau)} \right]_{ij} \times \\ \times \int dk' L_{j k l}^{(2)}(k-k', k':t) \left[T e^{\int_0^t d\tau L''(-k+k': \tau)} \right]_{k k'} \\ \times \left[T e^{\int_0^t d\tau L''(-k': \tau)} \right]_{l l'} \bar{H}_{k' l'}^{(2)}(k-k', k':t) \quad (3-12)$$

となることからわかる。

まとめると, 理想確率関数 $Q_i(k:t)$ の時間微分の右辺は一般性を失うことなく

$$\partial_t a_i(k:t) = \int dk' L_{ijk}^{(2)}(k-k', k':t) \cdot H_{jk}^{(2)}(k-k', k') \quad (3-13)$$

と書くことが出来る。 $L^{(2)}$ に対する条件は

$$L_{ijk}^{(2)}(P, Q) = L_{ikj}^{(2)}(Q, P) \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} & [L_{ijl}^{(2)}(k_2, k_3) + L_{jli}^{(2)}(k_3, k_1) + L_{lji}^{(2)}(k_1, k_2)] \\ & \times \delta(k_1 + k_2 + k_3) = 0 \end{aligned} \quad (3-15)$$

である。

§IV 2次元非粘性非圧縮流体

今オ1軸とオ2軸によって張られる空間に対して、等方的かつ一様、そしてオ3軸に関して一様な2次元非圧縮非粘性流体を考える。

速度場 $\mathcal{V}_i(k:t)$ は Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} & [\partial_t + \nu k^2] \mathcal{V}_i(k:t) \\ & = -i \int dk' k_l \Delta_{ij}(k) \mathcal{V}_l(k-k') \mathcal{V}_j(k') \end{aligned} \quad (4-1)$$

および連続の方程式

$$k_i \mathcal{V}_i(k:t) = 0 \quad (4-2)$$

に従うものとする。ここで

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (4-3)$$

である。

非粘性 ($\nu=0$) の場合に適当な時間的に変る pseudo-scalar 理想確率関数を選ぶことにより、

$$\mathcal{V}_a(\mathbf{k}) = \varepsilon_{ab3} k_b V(\mathbf{k}) H''(\mathbf{k}; t) \quad (4-4)$$

$$\mathbf{k} \equiv (k_1, k_2, 0)$$

の形で表わされる定常 Gauss 解が存在することを示そう。

ここで $H''(\mathbf{k}; t)$ は

$$\partial_t H''(\mathbf{k}; t) = \int d\mathbf{k}' I^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}'; t) H^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}'; t) \quad (4-5)$$

を満たすとして, $I^{(2)}$ は条件

$$I^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}; t) + I^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}-\mathbf{k}; t) + I^{(2)}(-\mathbf{k}-\mathbf{k}, \mathbf{k}; t) = 0 \quad (4-6)$$

を満たす範囲で任意に選べる。連続の式 (4-2) は (4-4) と
とることにより満たされることは明らかである。(4-1) 式で
 $\nu=0$ としたものに (4-4) (4-5) を代入すると

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ab3} k_b V(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' I^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}'; t) H^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}'; t) \\ &= -i \int d\mathbf{k}' \Delta_{ab}(\mathbf{k}) k_c \varepsilon_{cd3} [\mathbf{k}-\mathbf{k}']_d V(\mathbf{k}-\mathbf{k}') H''(\mathbf{k}-\mathbf{k}'; t) \\ & \quad \times \varepsilon_{be3} k'_e V(\mathbf{k}') H''(\mathbf{k}'; t) \end{aligned} \quad (4-7)$$

となる。これに $H^{(n)}$ を掛けて平均をとると, $n \neq 2$ では恒等的に成立し, $n = 2$ で

$$\begin{aligned} & 2 \varepsilon_{ab3} k_b V(k) L^{(2)}(P, q) \delta(P + q + k) \\ &= -i \Delta_{ab}(k) k_c [\varepsilon_{cd3} p_d V(p) \varepsilon_{be3} q_e V(q) \\ & \quad + \varepsilon_{cd3} q_d V(q) \varepsilon_{be3} p_e V(p)] \delta(P + q + k) \end{aligned} \quad (4-8)$$

となる。(4-8) の右辺は

$$\begin{aligned} & i \Delta_{ab}(k) \varepsilon_{cd3} p_c q_d \varepsilon_{be3} (q_e - p_e) V(p) V(q) \\ & \times \delta(P + q + k) \end{aligned} \quad (4-9)$$

と書ける。いま

$$L^{(2)}(P, q) = \frac{-i}{2} \varepsilon_{ab3} p_a q_b \frac{k_c [p_c - q_c]}{k^2} \frac{V(p) V(q)}{V(k)} \quad (4-10)$$

とすれば (4-8) が満たされることを示そう。 k 方向を $\oplus$ 軸にとれば $a=1$ に対して (4-8) が成立することは自明である。このとき $a=2$ に対しては左辺は

$$i \varepsilon_{ab3} p_a q_b (p_1 - q_1) V(p) V(q) \delta(P + q + k)$$

となり, (4-9) から右辺と一致することが判る。

従って問題は (4-10) が条件 (4-6) を満たすように $V(k)$ を求められるかということになる。(4-10) を (4-6) に代入すれば

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p^2 - q^2}{k^2} \frac{1}{V(k)^2} + \frac{q^2 - k^2}{p^2} \frac{1}{V(p)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{k^2 - p^2}{q^2} \frac{1}{V(q)^2} \right] V(p) V(q) V(k) \delta(p + q + k) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4-11)$$

が得られる。 α, β を任意定数として

$$V(k) = \frac{\alpha}{k[1 + \beta k^2]^{1/2}} \quad (4-12)$$

は (4-11) を満たす。かくして

$$\mathcal{V}_a(k) = \varepsilon_{ab3} k_b \frac{\alpha}{k[1 + \beta k^2]^{1/2}} H'''(k; t) \quad (4-13)$$

は定常 Gauss 解である。

これから作られる特性関数は

$$\begin{aligned} G[\mathbf{z}(\cdot)] &= \left\langle e^{i \int d^3k \mathbf{z}_a(-k) \mathcal{V}_a(k; t)} \right\rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3k \mathbf{z}_a(-k) \Delta_{ab}(k) \frac{\alpha^2}{1 + \beta k^2} \mathbf{z}_b(k) \right] \end{aligned} \quad (4-14)$$

であり、また渦度

$$\begin{aligned}\omega(k) &= i \varepsilon_{ab3} k_a \mathcal{V}_b(k; t) \\ &= i \frac{\alpha k}{[1 + \beta k^2]} H'''(k; t)\end{aligned}$$

に対する特性関数は

$$\begin{aligned}G^\omega[\mu(\cdot)] &= \left\langle e^{i \int d^3k \mu(-k) \omega(k)} \right\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2} \int d^3k \mu(-k) \frac{\alpha^2 k^2}{1 + \beta k^2} \mu(k)}\end{aligned}$$

となり Cook, Taylor⁷⁾のそれと一致する。

従ってこの解は新しく発見されたものではない。しかし解を Wiener-Hermite 展開の形で書くことは小さな粘性を考慮したときに生ずる Gauss 分布に対する補正, また準安定なエネルギー・スペクトルの形につりての研究への道を開くことになる。目下この線に沿って研究中である。

文 献

- (1) R. H. Cameron and W. T. Martin,
Ann. Math. 48 (1947) 385
- (2) N. Wiener, Non-linear Problems in Random Theory
(John Wiley & Sons, Inc. New York 1958)

- (3) T. Imamura, W.C. Meecham and A. Siegel,
J. Math. Phys. 6 (1965) 695
- (4) 今村勤, 確率場の数学, 岩波書店
- (5) M. Doi and T. Imamura, Progr. Theor. Phys. 41
(1969) 358
- (6) 土井正明, 博士論文 (理学大理) 1976年
- (7) I. Cook and J. B. Taylor, Phy. Rev. Lett. 28, N2 (1972)
82