

$U(1,2)$ と $U(3)$ における Hecke 作用素の 跡の交代和

東大・理 古閑春隆 (Harutaka Koseki)

互いに他の inner form であるようなふたつの代数群の保型形式の間の Langlands 対応の問題に関して、伊吹山氏と橋本氏は、具体的で接近しやすいと思われるひとつの枠組を導入され、 $Sp(2, \mathbb{R})$ とその compact twist の場合に '次元の交代和の比較定理' を得られた ([1], [2], [3]). ここでは $U(1,2)$ と $U(3)$ に対し、類似物と思われる 'Hecke 作用素の跡の交代和の間の関係式' について報告する.

1. 設定

F を虚 2 次体とし、 $F/\mathbb{Q}$ に関し次のふたつの 3 次 Hermite 行列を考える:

$$H_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

我々の対象は、 $\mathbb{Q}$ 上定義されたふたつの reductive 群 G_1, G_2 であって、それらの $\mathbb{Q}$ -有理点の群は次式で与えられる:

$$G_i(\mathbb{Q}) = \{g \in GL(3, F) \mid {}^t \bar{g} H_i g = H_i\} \quad (i=1, 2).$$

Landherr の古典的定理より, F を固定したときの 3 次ユニタリ群の $\mathbb{Q}$ 上の同型類はこれらを代表とする 2 個のみであることがわかる. また, G_1 と G_2 は $\mathbb{Q}$ の任意の有限素点 ℓ において同型である. そこで同型

$$\Theta_\ell: G_{1,\ell} \xrightarrow{\sim} G_{2,\ell}, \quad \Theta_\ell(g) = \psi_\ell^{-1} g \psi_\ell$$

の列 $\{\Theta_\ell\}_{\ell \neq \infty}$ を固定する. ここで ψ_ℓ は, 適当な条件を満足する $GL(3, F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)$ の元である.

実 reductive 群 $G_{1,\infty}$ は連結であって, 対称領域

$$\mathcal{D} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid 2\operatorname{Re}(z) - |w|^2 > 0\}$$

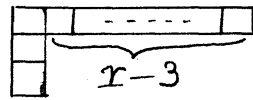
に対する作用 $g \langle z \rangle$ とスカラー値保型因子 $j(g, z)$ が

$$g \begin{pmatrix} {}^t z \\ 1 \end{pmatrix} = j(g, z) \begin{pmatrix} {}^t (g \langle z \rangle) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (g \in G_{1,\infty}, z \in \mathcal{D})$$

により定まる. 整数 $\kappa > 4$ と $G_{1,+} = G_{1,A_+}$ の開コンパクト部分群 $U_{1,+}$ に対し, $U_{1,+}$ に関する weight κ の正則 cusp form の空間 $\mathcal{S}_\kappa(U_{1,+})$ を次のように定義する:

$$\mathcal{S}_\kappa(U_{1,+}) = \left\{ f: G_{1,A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{(i) 左 } G_1(\mathbb{Q}) \text{ 右 } U_{1,+} \text{ 不変,} \\ \text{(ii) } G_{1,\infty} \text{ への制限は } j(g, z)^\kappa \text{ を保型因子として正則,} \\ \text{(iii) 有界} \end{array} \right\}.$$

同じ整数 κ に対し, コンパクト群 $G_{2,\infty}$ の表現 $\rho = \rho_\kappa$ を, その Young 図式が



となるものとする. P の表現空間 M は $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ 次元であり, このような対応 $r \longleftrightarrow P$ により, $G_{1,\infty}$ と $G_{2,\infty}$ の上の軌道積分の両方によい関係式が成立することになる. この P と $G_{2,+} = G_{2,A,+}$ の局コンパクト部分群 $U_{2,+}$ に対し, $U_{2,+}$ に関する 'weight P ' の保型形式の空間 $\mathcal{S}_P(U_{2,+})$ を

$$\mathcal{S}_P(U_{2,+}) = \{ f: G_{2,A} \longrightarrow M \mid \begin{array}{l} \text{(i) 左 } G_2(\mathbb{Q}) \text{ 右 } U_{2,+} \text{ 不変,} \\ \text{(ii) } f(gg_\infty) = \rho(g_\infty)^{-1} f(g) \quad \forall g_\infty \in G_{2,\infty} \end{array} \}$$

により定める.

上の状況において, $G_{i,+}$ の $U_{i,+}$ に関する Hecke 環を $\mathcal{L}(G_{i,+}, U_{i,+})$ とし, $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{L}(G_{1,+}, U_{1,+})$ [resp. $\mathcal{P}_2 \in \mathcal{L}(G_{2,+}, U_{2,+})$] の定める $\mathcal{S}_r(U_{1,+})$ 上 [resp. $\mathcal{S}_P(U_{2,+})$ 上] の Hecke 作用素を $T_1(\mathcal{P}_{1,+})$ [resp. $T_2(\mathcal{P}_{2,+})$] と書くことにする. 周知の Selberg trace formula により, 次の跡の積分表示を得る:

$$\begin{aligned} & \text{trace}(T_i(\mathcal{P}_{i,+})) \\ &= \int_{G_i(\mathbb{Q}) \backslash G_{i,A}} \sum_{\gamma \in G_i(\mathbb{Q})} (\mathcal{P}_{i,\infty} \otimes \mathcal{P}_{i,+})(\bar{\gamma} \gamma) d\gamma \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

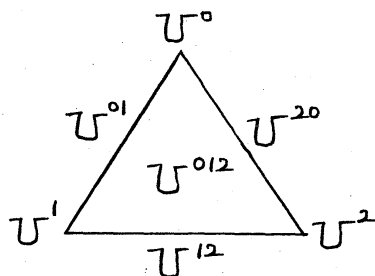
ここで $\mathcal{P}_{1,\infty}$ は $G_{1,\infty}$ 上の weight r の Bergman 核, $\mathcal{P}_{2,\infty}$ は ρ^{-1} の trace とする. (測度の normalization については省略する.)

2. 結果

以下, $(\frac{F/\mathbb{Q}}{p}) = +1$ なる $\mathbb{Q}$ の有限素点 p をひとつ固定する. 従って,

$$G_{1,p} \cong G_{2,p} \cong GL(3, \mathbb{Q}_p).$$

$GL(3, \mathbb{Q}_p)$ の standard parahoric subgroups を U^τ ($\tau = 0, 1, 2, 01, 12, 20, 012$) と書く. これらの包含関係は下図のようになる:



ここで $U^0 = GL(3, \mathbb{Z}_p)$, $U^{01} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & p* \\ * & * & p* \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \cap U^0$, $U^{012} = \left\{ \begin{pmatrix} * & p* & p* \\ * & * & p* \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \cap U^0$ ($* \in \mathbb{Z}_p$) で, U^0 と U^1 と U^2 , U^{01} と U^{12} と U^{20} はそれぞれ共役な部分群であり, また U^{012} は Iwahori subgroup である. 先程の同型により, $G_{i,p}$ の南コンパクト部分群 $U_{i,p}^\tau$ が各 τ に対し定まる. ただし $\mathcal{H}_p(U_{i,p}^\tau) = U_{2,p}^\tau$ とする. さらに各 τ に対し, $G_{i,p}$ の南コンパクト部分群 $U_{i,p}^\tau$ を,

$$U_{i,p}^\tau = \prod_{\ell \neq p} U_{i,\ell} \times U_{i,p}^\tau \quad (i=1,2)$$

で定める. ここに $U_{i,\ell}$ は $G_{i,\ell}$ の (τ によらぬ) 南コンパクト部分群で $\mathcal{H}_\ell(U_{i,\ell}) = U_{2,\ell}$ をみたすものとする.

次に Hecke 環 $\mathcal{L}(G_{i,p}, U_{i,p}^\tau)$ の元 $f_{i,p}^\tau$ を次の形のものとする:

$$\mathcal{P}_{i,f}^\tau = \bigotimes_{l \neq p} \mathcal{P}_{i,l} \otimes \mathcal{P}_{i,p}^\tau \quad (i=1,2).$$

ここに $\mathcal{P}_{i,l} \in \mathcal{L}(G_{i,l}, U_{i,l})$ ($l \neq p$) であり, $\Theta_l^*(\mathcal{P}_{2,l}) = \mathcal{P}_{1,l}$ とする. また $\mathcal{P}_{i,p}^\tau$ は $U_{i,p}^\tau$ の特性関数とする.

各 $\mathcal{P}_{i,f}^\tau$ は, $\mathcal{G}_x(U_{1,f}^\tau)$ ($i=1$) もしくは $\mathcal{G}_p(U_{2,f}^\tau)$ ($i=2$) 上に Hecke 作用素 $T_i(\mathcal{P}_{i,f}^\tau)$ を定めるが, 我々の結果は,

定理 $\forall x > 4$ に対し次の関係式が成立する:

$$\sum_{\tau} \varepsilon(\tau) \text{trace}(T_1(\mathcal{P}_{1,f}^\tau)) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) \text{trace}(T_2(\mathcal{P}_{2,f}^\tau))$$

ただし,

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} +1 & \text{--- } \tau = 0, 1, 2, 012 \\ -1 & \text{--- } \tau = 01, 12, 20 \end{cases}.$$

さて, 伊吹山・橋本両氏の, $S_p(2, \mathbb{R})$ とその compact twist に関する比較定理においては, ふたつの $\mathbb{Q}$ -groups は無限素点とある1個の有限素点で同型でなく, その唯1個の有限素点において parahoric subgroups に関する交代和が導入されている. ところが我々の G_1 と G_2 はすべての有限素点で同型なのであるから, どこかの有限素点で交代和をとるという必要はないのではないかとも思われよう. 実際, 別の定式化(たとえば表現論的な定式化)によってより‘自然’な比較定理が得られる可能性はあると思うが, 現在のところよくわからない. しかし, 我々がここに述べてきたような方向で比較しようとするときには, 次のことを示すことがで

きる：

命題 $G_{i,+}$ の南コンパクト部分群 $U_{i,+} = \prod_{l \neq \infty} U_{i,l}$
 $(i=1,2)$ で $\forall l$ において $(H_l(U_{1,l}) = U_{2,l})$ をみたすものが、
 任意に与えられたとき、次の (i), (ii) をみたす $\mathcal{L}(G_{i,+}, U_{i,+})$ の
 元 $\mathcal{P}_{i,+} = \bigotimes_{l \neq \infty} \mathcal{P}_{i,l} (i=1,2)$ が存在する。

(i) $\forall l$ において $(H_l^*(\mathcal{P}_{2,l}) = \mathcal{P}_{1,l})$,

(ii) $\text{trace}(T_1(\mathcal{P}_{1,+})|_{\widetilde{\mathcal{G}}_x(U_{1,+})}) \neq \text{trace}(T_2(\mathcal{P}_{2,+})|_{\widetilde{\mathcal{G}}_p(U_{2,+})})$

となるような $x > 4$ が無限個存在する。

3. 証明の方針

定理の証明で主に用いるのは、以下のことである：

(1) $G_{1,\infty}$ と $G_{2,\infty}$ の上の軌道積分の関係式。

(2) $G_{1,\infty}$ における Selberg 原理。

(3) $G_{1,p} \cong G_{2,p} \cong GL(3, \mathbb{Q}_p)$ の上の 'Steinberg 型' 軌道積分がある範囲の共役類上で消えていること。

(4) $G_i(\mathbb{Q})$ のひとつの stable conjugacy class に含まれる共役類の記述。

(5) G_1 の trace formula において、半単純でない元の寄与 ($\lim_{s \downarrow 0}$ 付きの表示) から (3) の軌道積分が 'くくり出せる' こと。

ここでは (4) についてのみ、簡単に触れておくことにする。

我々の群 G_i においては, *stable conjugacy* と *conjugacy* は一致しない. Langlands [5] の序文にあるように, このような場合, *trace formula* の比較には, $GL(n)$ と *simple algebra* の場合などには見られない新しい困難があると考えられる. それは, 半単純元に対してすら, *local* な軌道積分の間の関係式から *global* な *trace* の間の関係式が直ちには出てこないという困難である.

我々の場合, (i) の知識を使ってこれを見なおすことができる. $f(x)$ を F 係数, 3 次, *monic* で $f(0) \neq 0$ かつ '相反型' の多項式とし, 簡単のため $f(x)$ は *separable* とする. このとき

$$\mathbb{C}_i(f(x))_{\mathbb{Q}} = \{ g \in G_i(\mathbb{Q}) \mid g \text{ の固有多項式は } f(x) \}$$

とし, $\sim_{\mathbb{Q}}$ で $G_i(\mathbb{Q})$ -共役による同値を表わす. また $\mathbb{Q}$ の各素点 v において $\mathbb{C}_i(f(x))_v$, $\sim_v$ を同様に定義する. このときよく知られているように, 自然な写像

$$\mathbb{C}_i(f(x))_{\mathbb{Q}} / \sim_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \prod_v \mathbb{C}_i(f(x))_v / \sim_v$$

は *injective* であるが, もちろん *surjective* ではなく, その像は (i) *adelic* な条件, および (ii) 各 v における不変量, すべての v をわたる積が 1 という形の *product formula* 型の条件, の両者によって特徴づけられる. ここで容易にわかることは, 上に述べた困難をひきおこしているのは (ii) の *product*

formulaだということである.

ところが, $f(x)$ が F 上既約の場合, この product formula 型の条件は出てこないのである. 従ってそのような $f(x)$ に対応する寄与については, local な(1)から直ちに global な関係式を得ることができる.

では, $f(x)$ が F 上可約の場合はどうかと言うと, この仮定から $\mathbb{C}_i(f(x))_P$ が (11) の '消える' 型になることがわかる. つまりこのような $f(x)$ に対応する寄与は 0 になる. ここで P が $(\frac{F/\mathbb{Q}}{P}) = +1$ なる素点であるため, 'P で交代和をとる' という操作は, 共役類の寄与を消す働きが大きく $\bigwedge$ 話がうまくいって $\searrow$ いくのである. それによて

詳細については [4] を参照して下さい.

文献

- [1] T. Ibukiyama, On symplectic Euler factors of genus two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 30 ('84)
- [2] ———, On relations of dimensions between automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (I), Bonn. Math.
- [3] T. Ibukiyama and K. Hashimoto, ——— (II), Bonn. Math.

- [4]. H. Koseki, On a comparison of trace formulas for $GU(1,2)$ and $GU(3)$, to appear.
- [5]. R. P. Langlands, Stable conjugacy; definitions and lemmas, *Canad. J. Math.* 31 ('79).