

Geometric Crystals, Schubert Varieties and Crystal Bases

中島 俊樹 (NAKASHIMA Toshiki)

上智大学理工学部数学科

(Sophia University)

e-mail: toshiki@mm.sophia.ac.jp

1 Introduction

幾何クリスタルの理論は、[1] により基礎付けがなされ、その後、[7],[16] において tropical R matrix との関係についての研究でその有用性が認められた。この論説では、[15] の crystal bases との関係についての解説を行う。ここで用語の定義、記号は [15] に従うものとする。

2 Geometric Crystals and Unipotent Crystals

G (resp. $\mathfrak{g}$) を symmetrizable GCM $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ に associate した Kac-Moody 群 (resp. 代数) とし、 $G \supset B^\pm \supset U^\pm \supset T$ をそれぞれ Borel subgroup, unipotent subgroup, maximal torus とする。(Kac-Moody group については、[10],[12],[17] を参照。) $\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{t}^* | \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq (0)\}$ を root system, $Q = \sum_i \mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とする。 $Q_+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$, $\Delta_+ := \Delta \cap Q_+$ とおく。Weyl 群 $W = \langle s_i | i \in I \rangle$ (s_i は simple reflection) は $W \cong N_G(T)/T$ となる。 $i \in I$ に対して、homomorphism $\phi_i : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow G$ があって

$$\phi_i \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \exp t e_i, \quad \phi_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \right) = \exp t f_i \quad (t \in \mathbb{C}).$$

ここで、 e_i, f_i は $\mathfrak{g}$ の生成元。

$w \in W$ に対して

$$R(w) := \{(i_1, i_2, \dots, i_l) \in I^l | w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}\},$$

とおく。ここで、 l は length of w .

$\text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ (resp. $\text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$) の元を T の character (resp. co-character) と呼ぶ。simple co-root $\alpha_i^\vee \in \text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ ($i \in I$) を $\alpha_i^\vee(t) := T_i$ で定義すると、pairing $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ を得る。

Definition 2.1. (i) X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\gamma : X \rightarrow T$, $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ ($i \in I$);

$$\begin{aligned} e_i^c : \mathbb{C}^\times \times X &\longrightarrow X \\ (c, x) &\longmapsto e_i^c(x), \end{aligned}$$

を rational morphisms とする。3 つ組 $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ が *geometric pre-crystal* とは $e^1(x) = x$ かつ

$$\gamma(e_i^c(x)) = \alpha_i^\vee(c)\gamma(x), \quad (2.1)$$

をみたすこと。

(ii) $(X, \gamma_X, \{e_i^X\}_{i \in I})$, $(Y, \gamma_Y, \{e_i^Y\}_{i \in I})$ を *geometric pre-crystal* とする。rational morphism $f : X \rightarrow Y$ が *morphism of geometric pre-crystals* とは f が次をみたすこと：

$$f \circ e_i^X = e_i^Y \circ f, \quad \gamma_X = \gamma_Y \circ f.$$

特に、morphism f が ind-varieties の birational isomorphism であるとき f は *isomorphism of geometric pre-crystals* という。

$\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ を *geometric pre-crystal* とする。word $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l) \in R(w)$ ($w \in W$) に対して $\alpha^{(l)} := \alpha_{i_l}$, $\alpha^{(l-1)} := s_{i_l}(\alpha_{i_{l-1}})$, $\dots$, $\alpha^{(1)} := s_{i_1} \cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})$ とおく。ここで、word $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l) \in R(w)$ に対して rational morphism $e_{\mathbf{i}} : T \times X \rightarrow X$ を、次で定義する。

$$(t, x) \mapsto e_{\mathbf{i}}^t(x) := e_{i_1}^{\alpha^{(1)}(t)} e_{i_2}^{\alpha^{(2)}(t)} \cdots e_{i_l}^{\alpha^{(l)}(t)}(x).$$

Definition 2.2. (i) 上の設定で *geometric pre-crystal* χ が *geometric crystal* とは、任意の $w \in W$, $\mathbf{i}$ と $\mathbf{i}' \in R(w)$ に対して

$$e_{\mathbf{i}} = e_{\mathbf{i}'}. \quad (2.2)$$

が成立すること。

(ii) $(X, \gamma_X, \{e_i^X\}_{i \in I})$ 及び $(Y, \gamma_Y, \{e_i^Y\}_{i \in I})$ を *geometric crystal* とする。rational morphism $f : X \rightarrow Y$ が *of geometric crystals の morphism* (resp. *isomorphism*) とは *geometric pre-crystals の morphism* (resp. *an isomorphism*) であること。

次の補題が成り立つ：

Lemma 2.3. (2.2) は次の関係と同値

$$\begin{aligned} e_i^{c_1} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = 0, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -2, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1^3 c_2} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^3 c_2} e_i^{c_1^2 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -3, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \end{aligned}$$

Remark. $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle \geq 4$ のとき e_i と e_j の間には関係なし。

以下 U^+ を U と書く。次に Kac-Moody groups に対して unipotent crystals (see [1]) を定義する。

Definition 2.4. X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\alpha : U \times X \rightarrow X$ を $\{e\} \times X$ 上で定義される U -action とする。このとき、pair $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ が U -variety とは、 U -varieties $\mathbf{X} = (X, \alpha_X)$ と $\mathbf{Y} = (Y, \alpha_Y)$ に対して rational morphism $f : X \rightarrow Y$ が U -morphism とは U -action と可換となること。

ここで、 $B^- = U^-T$ に U -variety structure を入れる。 B^- は G の ind-subgroup であり、また G における multiplication map は open embedding; $B^- \times U \hookrightarrow G$ を induce するので birational isomorphism であり、その inverse birational isomorphism を

$$g : G \longrightarrow B^- \times U.$$

とする。ここで、rational morphisms $\pi^- : G \rightarrow B^-$ と $\pi : G \rightarrow U$ を $\pi^- := \text{proj}_{B^-} \circ g$ と $\pi := \text{proj}_U \circ g$ で定義し B^- への rational U -action α_{B^-} を

$$\alpha_{B^-} := \pi^- \circ m : U \times B^- \longrightarrow B^-,$$

と定義すると (m multiplication map in G), U -variety $\mathbf{B}^- = (B^-, \alpha_{B^-})$ を得る。

Definition 2.5. (i) $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ を U -variety, $f : X \rightarrow \mathbf{B}^-$ を U -morphism とする。このとき、pair $(\mathbf{X}, f)$ を *unipotent G -crystal* と呼ぶ。

(ii) $(\mathbf{X}, f_X)$ 及び $(\mathbf{Y}, f_Y)$ を unipotent crystals とする。 U -morphism $g : X \rightarrow Y$ が *morphism of unipotent crystals* とは $f_X = f_Y \circ g$ となることであり、特に g が ind-variety の birational isomorphism であるとき *isomorphism of unipotent crystals* という。

unipotent crystal の大きな特徴は crystal base と関係の深い積構造が入ることであるがここでは省略する。文献は [1],[15] を参照。

ここまで定義した unipotent crystal と geometric crystal には以下のような関係がある。

$i \in I$ に対して $U_i^\pm := U^\pm \cap \bar{s}_i U^\mp \bar{s}_i^{-1}$, $U_\pm^i := U^\pm \cap \bar{s}_i U^\pm \bar{s}_i^{-1}$ とおく。実は $U_i^\pm = U_{\pm\alpha_i}$. 半直積

$$U^- = U_{-\alpha_i} \cdot U_-^i,$$

より canonical projection $\xi_i : U^- \rightarrow U_{-\alpha_i}$ を得る。これを用いて U^- 上の関数

$$\chi_i := y_i^{-1} \circ \xi_i : U^- \longrightarrow U_{-\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

と定義し、さらに $\chi_i(u \cdot t) := \chi_i(u)$ ($u \in U^-$, $t \in T$) により B^- 上の関数に延長する。unipotent G -crystal $(\mathbf{X}, f_X)$ に対して関数 $\varphi_i := \varphi_i^X : X \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\varphi_i := \chi_i \circ f_X,$$

で、また rational morphism $\gamma_X : X \rightarrow T$ を

$$\gamma_X := \text{proj}_T \circ f_X : X \rightarrow B^- \rightarrow T, \quad (2.3)$$

で定義する (proj_T は canonical projection). 今、関数 φ_i は X 上で恒等的に 0 でないとする。このとき、morphism $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ を

$$e_i^c(x) := x_i \left(\frac{c-1}{\varphi_i(x)} \right) (x). \quad (2.4)$$

とすると、次を得る：

Theorem 2.6 ([1]). (X, f_X) を *unipotent G -crystal* とする。任意の $i \in I$ に対して関数 φ_i は X 上で恒等的に 0 でないとする。このとき、*rational morphisms* $\gamma_X : X \rightarrow T$ と $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ を上のように定義すると $(X, \gamma_X, \{e_i\}_{i \in I})$ は *geometric G -crystal* の構造を持つ。

3 Crystal structure on Schubert varieties

前節と同様に G は Kac-Moody group, $B^\pm = U^\pm T$ (resp. $U^\pm$) は Borel (resp. unipotent) subgroups, W は Weyl group とする。次の Bruhat/Birkhoff decomposition は有名：

Proposition 3.1 ([9],[12],[17]). *We have*

$$G = \bigcup_{w \in W} B^+ \bar{w} B^+ = \bigcup_{w \in W} U^+ \bar{w} B^+ \quad (\text{Bruhat decomposition}), \quad (3.1)$$

$$G = \bigcup_{w \in W} B^- \bar{w} B^+ = \bigcup_{w \in W} U^- \bar{w} B^+ \quad (\text{Birkhoff decomposition}). \quad (3.2)$$

$J \subset I$ に対して $W_J := \langle s_i | i \in J \rangle$ を対応する W の subgroup とする。 $P_J := B^+ W_J B^+$ とおき $J \subset I$ に付随した G の (standard) *parabolic subgroup* と呼ぶ。 W^J を W/W_J の minimal coset representative の集合とする。このとき parabolic Bruhat/Birkhoff decompositions を得る：

Proposition 3.2 ([9],[12],[17]). $J \subset I$ に対して W_J と W^J を上のものとする、

$$G = \bigcup_{w^* \in W^J} U^+ \bar{w}^* P_J = \bigcup_{w^* \in W^J} U^- \bar{w}^* P_J.$$

さて、 $\Lambda \in P_+$ (P_+ : dominant integral weight の集合) に対して $L(\Lambda)$ を highest weight λ の integral highest weight simple module とし、その projective space を $\mathbb{P}(\Lambda) := (L(\Lambda) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ とかく。 $v_\Lambda \in \mathbb{P}(\Lambda)$ を $L(\lambda)$ の highest weight vector を含む line とし $X(\Lambda) := G \cdot v_\Lambda \subset \mathbb{P}(\Lambda)$ (flag variety) とおく。 $J_\Lambda := \{i \in I | \langle h_i, \Lambda \rangle = 0\}$ とすると、 P_{J_Λ} は v_Λ の stabilizer なので 次を得る

Proposition 3.3 ([12],[17]).

$$\begin{aligned} \rho : G/P_{J_\Lambda} &= \bigcup_{w \in W^{J_\Lambda}} U^\pm \bar{w} P_{J_\Lambda} / P_{J_\Lambda} && \xrightarrow{\sim} X(\Lambda) \\ &g \cdot P_{J_\Lambda} && \mapsto g \cdot v_\Lambda \end{aligned}$$

Definition 3.4. 上の $\rho(U^+ \bar{w} P_{J_\Lambda} / P_{J_\Lambda})$ (resp. $\rho(U^- \bar{w} P_{J_\Lambda} / P_{J_\Lambda})$) を $X(\Lambda)_w$ (resp. $X(\Lambda)^w$) とかき *finite* (resp. *co-finite*) *Schubert cell* と呼び、その Zariski closure を $\bar{X}(\Lambda)_w$ と記し (resp. $\bar{X}(\Lambda)^w$) *finite* (resp. *co-finite*) *Schubert variety* と呼ぶ。

次の closure relations が成り立つ：

$$\bar{X}(\Lambda)_w = \bigsqcup_{y \leq w, y \in W^{J_\Lambda}} X(\Lambda)_y, \quad \bar{X}(\Lambda)^w = \bigsqcup_{y \geq w, y \in W^{J_\Lambda}} X(\Lambda)^y. \quad (3.3)$$

ここで $X(\Lambda)_w$ に unipotent crystal の構造を入れる。 $X(\Lambda)_w$ の定義より Schubert cell $X(\Lambda)_w$ は U -variety である。

次に U -morphism $X(\Lambda)_w \rightarrow B^-$ を構成する： $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} \in W$ を reduced expression とし $U_w = U \cap \bar{w} U^- \bar{w}^{-1}$, $U^w = U \cap \bar{w} U \bar{w}^{-1}$ とおく。

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \dots, \beta_k = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}),$$

とすると

$$U_w := U_{\beta_1} \cdot U_{\beta_2} \cdots U_{\beta_k} \cong U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \cdots \times U_{\beta_k} \cong \mathbb{C}^k$$

を得る ([17]). 分解 $U = U_w \cdot U^w$ から、次を得る：

Lemma 3.5. 任意の $u \in U$ と $w \in W$ に対して $u' \in U_w \cdot \bar{w}$ と $v \in U$ が一意に存在して $u\bar{w} = u'v$ をみたす。

この分解を使って、次の rational morphisms を得る：

$$\begin{aligned} p_w : U \cdot \bar{w} &\longrightarrow U_w \cdot \bar{w} \\ u\bar{w} &\longmapsto u' \\ p^w : U \cdot \bar{w} &\longrightarrow U \\ u\bar{w} &\longmapsto v \end{aligned}$$

さらに $U_w \cdot \bar{w}$ への U -action を

$$\begin{aligned} U \times U_w \cdot \bar{w} &\longrightarrow U_w \cdot \bar{w} \\ (x, u\bar{w}) &\longmapsto x(u\bar{w}) := p_w(xu\bar{w}) = xu\bar{w} \cdot p^w(xu\bar{w})^{-1} \end{aligned}$$

とすると

Lemma 3.6. $x \in U$ と $u\bar{w} \in U_w \bar{w}$ について

$$\alpha_{B^-}(x, \pi^-(u\bar{w})) = \pi^-(x(u\bar{w})).$$

が成り立つ。

この Lemma より

$$\zeta : X(\Lambda)_w \xrightarrow{\sim} U_w \bar{w} \quad (w \in W^{J_\Lambda} \quad \Lambda \in P_+).$$

という同型は U -morphism. そこで、rational morphism $f_w : X(\Lambda)_w \rightarrow B^-$ を $f_w = \pi^- \circ \zeta$ とおくと

Theorem 3.7. $\Lambda \in P_+$, $w \in W^{J_\Lambda}$ に対して $f_w : X(\Lambda)_w \rightarrow B^-$ を上で定義したものとすると、pair $(X(\Lambda)_w, f_w)$ は unipotent G -crystal.

$X(\Lambda)_w \hookrightarrow \bar{X}(\Lambda)_w$ は open embedding よって birational isomorphism である。 $\omega : \bar{X}(\Lambda)_w \rightarrow X(\Lambda)_w$ を inverse birational isomorphism とすると $\bar{f}_w := f_w \circ \omega : \bar{X}(\Lambda)_w \rightarrow B^-$ は U -morphism となり

Corollary 3.8. pair $(\bar{X}(\Lambda)_w, \bar{f}_w)$ は unipotent G -crystal.

Remark. $w \leq w'$ に対して closed embedding $\bar{X}(\Lambda)_w \hookrightarrow \bar{X}(\Lambda)_{w'}$ ([17])、さらに isomorphism

$$X(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{w \in W^{J_\Lambda}} \bar{X}(\Lambda)_w.$$

が存在する。しかし、一般にこの direct limit を用いても $X(\Lambda)$ 上に unipotent crystal structure を入れることはできない。なぜなら、 $y < w$ に対して rational morphism $\bar{f}_w : \bar{X}(\Lambda)_w \rightarrow B^-$ は $\bar{X}(\Lambda)_y$ 上では定義できないからである。

さて、Schubert cell (resp. variety) $X(\Lambda)_w$ (resp. $\bar{X}(\Lambda)_w$) が unipotent crystal の構造をもったので上の議論より geometric crystal の構造を入れることができる。

$w \in W$ に対して $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ を reduced expression とし

$$I(w) := \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

とおく。(これは、reduced expression によらない)。すると、次が成り立つ：

$i \in I(w)$ ならば、関数 $\varphi_i : X(\Lambda)_w \rightarrow \mathbb{C}$ は恒等的に 0 ではない。

Theorem 2.6 より

Theorem 3.9. $w \in W$ に対して $I = I(w)$ とすると、Schubert cell $X(\Lambda)_w$ (resp. variety $\bar{X}(\Lambda)_w$) 上に次のようにして geometric G -crystal structure 入れられる (see (2.3) and (2.4))

$$\gamma_w := \text{proj}_T \circ f_w \quad (\text{resp. } \bar{\gamma}_w := \text{proj}_T \circ \bar{f}_w), \quad e_i^c(x) = x_i \left(\frac{c-1}{\varphi_i(x)} \right) (x),$$

ここで、 $\text{proj}_T : B^- = U^- T \rightarrow T$.

この induced geometric crystal を $(X(\Lambda)_w, \gamma_w, \{c_i\}_{i \in I})$ (resp. $(\bar{X}(\Lambda)_w, \bar{\gamma}_w, \{c_i\}_{i \in I})$) と書くこととすると、 $(X(\Lambda)_w, \gamma_w, \{c_i\}_{i \in I})$ は次の意味で B^- の中で実現される：

Proposition 3.10. $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ に対して,

$$B_w^- := \{Y_w(c_1, \dots, c_k) := y_{i_1}(\frac{1}{c_1})\alpha_{i_1}^\vee(c_{i_1}) \cdots y_{i_k}(\frac{1}{c_k})\alpha_{i_k}^\vee(c_{i_k}) \in B^- | c_i \in \mathbb{C}^\times\}.$$

とおき、 U -actions を

$$u(Y_w(c_1, \dots, c_k)) := \pi^-(u \cdot Y_w(c_1, \dots, c_k)) \quad (u \in U).$$

で定義すると、 $X(\Lambda)_w$ と B_w^- は f により *birationally equivalent* となり、さらに *unipotent crystal/ induced geometric crystal* としても同型となる。

Example 3.11. $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ の場合に具体例を見て見よう。 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ とし $\tilde{w} = s_1 s_2 \cdots s_n \in W$ に対して $I = I(\tilde{w})$ が成り立ち

$$\pi^-(x_1(c_1)\bar{s}_1 x_2(c_2)\bar{s}_2 \cdots x_n(c_n)\bar{s}_n) = y_1(\frac{1}{c_1})\alpha_1^\vee(c_1) y_2(\frac{1}{c_2})\alpha_2^\vee(c_2) \cdots y_n(\frac{1}{c_n})\alpha_n^\vee(c_n).$$

となる。ここで、 $c_i = a_1 a_2 \cdots a_i$ である。 $y_i(a) = I_n + a E_{i+1, i}$ とおくと

$$f_{\tilde{w}}(X(\Lambda)_{\tilde{w}}) = \left\{ u(a) := \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & 1 & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & a_n \\ & & & & & 1 & \frac{1}{a_1 \cdots a_n} \end{pmatrix} ; a_i \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

ここで、 $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$, $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$ である。実は、 $\varphi_i(u(a)) = \frac{1}{a_i}$ であるので

$$e_i^c(u(a)) = x_i(a_i(c-1)) \cdot u(a) \cdot x_i(a_{i+1}(c^{-1}-1)) = u(a_1, \dots, ca_i, c^{-1}a_{i+1}, \dots, a_{n+1}).$$

さらに、次を得る：

$$\gamma_{\tilde{w}}(x_1(c_1)\bar{s}_1 x_2(c_2)\bar{s}_2 \cdots x_n(c_n)\bar{s}_n) = \alpha_1^\vee(c_1)\alpha_2^\vee(c_2) \cdots \alpha_n^\vee(c_n).$$

4 Tropicalization of Crystals

geometric crystals 上の positive structure と ultra-discretization/tropicalizations について解説する。 ([1]).

T を algebraic torus/ $\mathbb{C}$, $X^*(T)$ (resp. $X_*(T)$) を lattice of characters (resp. co-characters) とする。 $R := \mathbb{C}[[c]][c^{-1}]$, $L(T) := \{\phi \in \text{Hom}(O_T, R)\}$ (O_T : ring of regular functions on T) とおく。 discrete valuation

$$\begin{aligned} v: R \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{n > -\infty} a_n c^n &\mapsto -\min\{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

をとり、任意の $\phi \in L(T)$ について $\deg_T(\phi) := v \circ \phi|_{X^*(T)}$ とする。 $f_1, f_2 \in R \setminus \{0\}$ に対して $v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2)$, であるので $\deg_T(\phi)$ は $X_*(T) = \text{Hom}(X^*(T), \mathbb{Z})$ の元と見なされ、よって、 $\deg_T$ は $\deg_T : L(T) \rightarrow X_*(T)$ とみなせる。任意の $\lambda^\vee \in X_*(T)$ に対して $L_{\lambda^\vee}(T) := \deg_T^{-1}(\lambda^\vee) \subset L(T)$ と定義すると $\deg_T^{-1}(\lambda^\vee)$ は irreducible pro- $\mathbb{C}$ variety structure を持ち $L(T) = \bigsqcup_{\lambda^\vee \in X_*(T)} L_{\lambda^\vee}(T)$ なので irreducible component の集合 $\pi_0(L(T)) = \{L_{\lambda^\vee}(T) | \lambda^\vee \in X_*(T)\}$ は $X_*(T)$ と同一視される。

もうすこし、具体的にいうと $T = (\mathbb{C}^\times)^l$ として $L(T)$ と $(R^\times)^l$ を同一視すると $\lambda^\vee(c) = (c^{m_1}, c^{m_2}, \dots, c^{m_l})$ に対して $(m_j \in \mathbb{Z})$,

$$L_{\lambda^\vee}(T) = \left\{ \left(b_1 c^{-m_1} + \sum_{n > -m_1} a_n c^n, \dots, b_l c^{-m_l} + \sum_{n > -m_l} a_n c^n \right) : b_1, \dots, b_l \neq 0 \right\}.$$

$f : T \rightarrow T'$ を 2 つの algebraic tori の間の rational morphism とすると、 f は rational morphism $\tilde{f} : L(T) \rightarrow L(T')$ および $\text{map } \pi_0(\tilde{f}) : \pi_0(L(T)) \rightarrow \pi_0(L(T'))$, を induce する。

rational function $f(c) \in \mathbb{C}(c)$ ($f \neq 0$) が *positive* とは f が 2 つの正係数多項式の商としてあらわされること。

$f_1, f_2 \in \mathbb{C}(c) (\subset R)$ が positive ならば

$$v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2), \quad (4.1)$$

$$v\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = v(f_1) - v(f_2), \quad (4.2)$$

$$v(f_1 + f_2) = \max(v(f_1), v(f_2)). \quad (4.3)$$

が成り立つ。これを、一般化したものが次：

Definition 4.1 ([1]). 2 つの algebraic tori の間の rational morphism $f : T \rightarrow T'$ が *positive* とは、次がみたされること、

- (i) 任意の co-character $\lambda^\vee : \mathbb{C}^\times \rightarrow T$ について $\lambda^\vee$ の image が $\text{dom}(f)$ に入る。
- (ii) 任意の co-character $\lambda^\vee : \mathbb{C}^\times \rightarrow T$ と任意の character $\mu : T' \rightarrow \mathbb{C}^\times$ について $\mu \circ f \circ \lambda^\vee$ が positive rational function である。

$\mathcal{T}_+$ を object が algebraic torus, arrow が positive rational morphism である category とすると、次の functor を得る：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{UD} : & \mathcal{T}_+ & \longrightarrow \text{Set} \\ & T & \longmapsto X_*(T) \\ & (f : T \rightarrow T') & \longmapsto (\deg(f) : X_*(T) \rightarrow X_*(T')) \end{array}$$

Definition 4.2 ([1]). $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ を geometric pre-crystal とし、 T を algebraic torus $\theta : T \rightarrow X$ を birational isomorphism とする。 θ が χ 上の *positive structure* とは、次をみたすこと：

- (i) the rational morphism $\gamma \circ \theta : T' \rightarrow T$ は positive.
(ii) 任意の $i \in I$ に対して rational morphism $e_{i,\theta} : \mathbb{C}^\times \times T' \rightarrow T'$

$$e_{i,\theta}(c, t) := \theta^{-1} \circ e_i^c \circ \theta(t)$$

は positive.

functor $\mathcal{UD}$ を positive rational morphism $e_{i,\theta} : \mathbb{C}^\times \times T' \rightarrow T'$ と $\gamma \circ \theta : T' \rightarrow T$ に適用してみると

$$\tilde{e}_i := \mathcal{UD}(e_{i,\theta}) : \mathbb{Z} \times X_*(T) \rightarrow X_*(T)$$

$$\tilde{\gamma} := \mathcal{UD}(\gamma \circ \theta) : X_*(T') \rightarrow X_*(T).$$

を得る。

geometric pre-crystal $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ 上に与えられた positive structure $\theta : T' \rightarrow X$ に対して triplet $(X_*(T'), \tilde{\gamma}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in I})$ は pre-crystal structure (see [1, 2.2]) を持つことが知られている。次が成り立つ：

Theorem 4.3. *geometric crystal $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ と positive structure $\theta : T' \rightarrow X$ について pre-crystal $\mathcal{UD}_{\theta, T'}(\chi) = (X_*(T'), \tilde{\gamma}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in I})$ は free W -crystal (see [1, 2.2]) である。*

この functor $\mathcal{UD}$ を “ultra-discretization” と呼ぶ。これは [1] において “tropicalization” とよばれていたものである。ここでは、“tropicalization” は [1] における inverse tropicalization を意味するものとする。詳しく言うと、object B in $\mathfrak{Set}$ に対して crystal として $\mathcal{UD}(T) \cong B$ となる object T in $\mathcal{T}_+$ が存在するとき T を B の tropicalization という。

ここで geometric crystal B_w^- 上に、ある positive structure を入れ ($I = I(w)$, and $w \in W^{J_\Lambda}$) それがある Kashiwara’s crystal の (Langlands dual) の tropicalization であることを見てみよう。

まず、crystal B_i について復習する： $i \in I$ に対して、 B_i は次で定義される (see e.g.[6])

$$B_i := \{(x)_i \mid x \in \mathbb{Z}\},$$

$$\tilde{e}_i(x)_i = (x+1)_i, \tilde{f}_i(x)_i = (x-1)_i, \tilde{e}_j(x)_i = \tilde{f}_j(x)_i = 0 \ (i \neq j)$$

$$wt(x)_i = x\alpha_i, \varepsilon_i(x)_i = -x, \varphi_i(x)_i = x, \varepsilon_j(x)_i = \varphi_j(x)_i = -\infty \ (i \neq j).$$

さて $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k} \in W$ と $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in R(w)$ に対して morphism $\theta_{\mathbf{i}} : (\mathbb{C}^\times)^k \rightarrow B_w^-$ を

$$\theta_{\mathbf{i}}(c_1, c_2, \dots, c_k) := y_{i_1} \left(\frac{1}{c_1} \right) \alpha_{i_1}^\vee(c_1) \cdots y_{i_k} \left(\frac{1}{c_k} \right) \alpha_{i_k}^\vee(c_k) \quad (4.4)$$

で定義する。次の結果は reductive case については [1, Theorem 2.11] で与えられている。ここでは Kac-Moody case も含む。

- Proposition 4.4.** (i) 任意の $\mathbf{i} \in R(w)$ ($w \in W$) と morphism $\theta_{\mathbf{i}}$ は geometric crystal B_w^- 上の positive structure.
(ii) Geometric crystal B_w^- は positive structure $\theta_{\mathbf{i}}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ に関して crystal $B_{i_1} \otimes B_{i_2} \otimes \dots \otimes B_{i_k}$ の Langlands dual の tropicalization.

Proof. $\theta_{\mathbf{i}}$ が birational は明らかで、また、rational morphism $\gamma : B_w^- \rightarrow T$

$$\gamma \left(y_{i_1} \left(\frac{1}{c_1} \right) \alpha_{i_1}^\vee(c_1) \cdots y_{i_k} \left(\frac{1}{c_k} \right) \alpha_{i_k}^\vee(c_k) \right) = \alpha_{i_1}^\vee(c_1) \cdots \alpha_{i_k}^\vee(c_k),$$

について $\gamma \circ \theta_{\mathbf{i}}$ が positive も自明。 $e_{i, \theta_{\mathbf{i}}} : \mathbb{C}^\times \times T' \rightarrow T'$ が positive をいうために $e_{\mathbf{i}}^c$ の $Y_w(c_1, \dots, c_k)$ 上への具体的な作用をみると

$$e_{\mathbf{i}}^c(Y_w(c_1, \dots, c_k)) = x_i \left(\frac{c-1}{\varphi_i(Y_w(c_1, \dots, c_k))} (Y_w(c_1, \dots, c_k)) \right) =: Y_w(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k),$$

ここで

$$\mathcal{C}_j := c_j \cdot \frac{\sum_{1 \leq m \leq j, i_m = i} \frac{c}{c_1^{a_{i_1, i}} \cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1}, i}} c_m} + \sum_{j < m \leq k, i_m = i} \frac{1}{c_1^{a_{i_1, i}} \cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1}, i}} c_m}}{\sum_{1 \leq m < j, i_m = i} \frac{c}{c_1^{a_{i_1, i}} \cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1}, i}} c_m} + \sum_{j \leq m \leq k, i_m = i} \frac{1}{c_1^{a_{i_1, i}} \cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1}, i}} c_m}}. \quad (4.5)$$

を得る。これより、 $e_{i, \theta_{\mathbf{i}}}$ は positive. (i) はいえた。

(ii) 次に $\tilde{e}_{\mathbf{i}}^c$ の $B_{i_1} \otimes \dots \otimes B_{i_k}$ への作用をみると $b_{\mathbf{i}} = (b_1)_{i_1} \otimes \dots \otimes (b_k)_{i_k}$ ($\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, $b_j \in \mathbb{Z}$) に対して

$$\tilde{e}_{\mathbf{i}}^c(b_{\mathbf{i}}) = (\beta_1)_{i_1} \otimes \dots \otimes (\beta_k)_{i_k},$$

ここで

$$\beta_j = b_j + \max \left(\begin{array}{cc} \max_{\substack{1 \leq m \leq j, \\ i_m = i}} (c - b_m - \sum_{l < m} b_l a_{i, i_l}), & \max_{\substack{j < m \leq k, \\ i_m = i}} (-b_m - \sum_{l < m} b_l a_{i, i_l}) \end{array} \right) \\ - \max \left(\begin{array}{cc} \max_{\substack{1 \leq m < j, \\ i_m = i}} (c - b_m - \sum_{l < m} b_l a_{i, i_l}), & \max_{\substack{j \leq m \leq k, \\ i_m = i}} (-b_m - \sum_{l < m} b_l a_{i, i_l}) \end{array} \right) \quad (4.6)$$

ここで、(4.5) と (4.6) は tropicalization/ultra-discretization operations で対応してい

ることがわかる

$$\begin{array}{ccc}
 C_j & \xrightleftharpoons[\text{tropicalization}]{\text{ultra-discretization}} & \beta_j \\
 c_j & \longleftrightarrow & b_j \\
 x \cdot y & \longleftrightarrow & x + y \\
 \frac{x}{y} & \longleftrightarrow & x - y \\
 x + y & \longleftrightarrow & \max(x, y) \\
 a_{i,j} & \xrightarrow{\text{Langlands dual}} & a_{j,i}
 \end{array}$$

(ii) も OK.

□

(4.5), (4.6) と同様の公式は [2, 5.2.] で与えられている。

次は Proposition 4.4 と Lemma 2.3 からの自明な帰結であり crystal の立場からの証明については [6],[13] を参照。

Corollary 4.5. *crystal* $B_{i_1} \otimes \cdots \otimes B_{i_k}$ 上で $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{c_2} &= \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = 0, \\
 \tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_2} &= \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\
 \tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{c_2} &= \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -2, \\
 \tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{3c_1+c_2} \tilde{e}_j^{3c_1+2c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{c_2} &= \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{3c_1+2c_2} \tilde{e}_i^{3c_1+c_2} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_1} && \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -3.
 \end{aligned}$$

Remark. Example 3.11 で考えた例は上とは異なる positive structure である。つまり、 $c_i = a_1 a_2 \cdots a_i$ とすると

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta} : (\mathbb{C}^\times)^n &\longrightarrow B_{\tilde{w}}^- \\
 (a_1, \dots, a_n) &\mapsto y_1 \left(\frac{1}{c_1}\right) \alpha_1^\vee(c_1) \cdots y_n \left(\frac{1}{c_n}\right) \alpha_n^\vee(c_n),
 \end{aligned}$$

は positive structure. 実際、 e_i の作用は

$$e_i^c(Y_{\tilde{w}}(c_1, \dots, c_n)) = Y_{\tilde{w}}(c_1, \dots, c_{i-1}, cc_i, c_{i+1}, \dots, c_n),$$

で

$$e_{i,\tilde{\theta}}(c, (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})) = (a_1, \dots, ca_i, c^{-1}a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}),$$

を得る。 $(a_1 \cdots a_{n+1} = 1)$. この positive structure $\tilde{\theta}$ に関する geometric crystal $B_{\tilde{w}}^-$ の ultra-discretization は次のようになる： $\tilde{B} := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} | x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0\}$ とし、 $x := (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \tilde{B}$ に対して

$$\tilde{e}_i^c(x) = (x_1, \dots, x_i + c, x_{i+1} - c, \dots, x_{n+1}) \quad (c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

$\tilde{f}_i^c = \tilde{e}_i^{-c}$ と定義すると、 $\mathcal{UD}_{\tilde{\theta}, \mathbb{C}^n}(B_{\tilde{w}}^-, \gamma, \{c_i\})$ は crystal $\tilde{B}$ の Langlands dual に同型となる。この crystal $\tilde{B}$ は “symmetric tensor 表現” の crystal base のある種の極限とみ

5 Tropical Braid-type isomorphisms

最後に tropicalization/ultra-discretization の応用として [14] の braid-type isomorphism の新しい証明を与える。そのために "tropical braid-type isomorphism" を与える。

Proposition 5.1. 次の等式が成り立つ：

(i) *Type A₂*:

$$\begin{aligned} & y_i\left(\frac{1}{c_1}\right)\alpha_i^\vee(c_1)y_j\left(\frac{1}{c_2}\right)\alpha_j^\vee(c_2)y_i\left(\frac{1}{c_3}\right)\alpha_i^\vee(c_3) \\ &= y_j\left(\frac{c_1}{c_1c_3+c_2}\right)\alpha_j^\vee\left(\frac{c_1c_3+c_2}{c_1}\right)y_i\left(\frac{1}{c_1c_3}\right)\alpha_i^\vee(c_1c_3)y_j\left(\frac{c_1c_3+c_2}{c_1c_2}\right)\alpha_j^\vee\left(\frac{c_1c_2}{c_1c_3+c_2}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

(ii) *Type B₂* ($\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -2, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1$):

$$\begin{aligned} & y_i\left(\frac{1}{c_1}\right)\alpha_i^\vee(c_1)y_j\left(\frac{1}{c_2}\right)\alpha_j^\vee(c_2)y_i\left(\frac{1}{c_3}\right)\alpha_i^\vee(c_3)y_j\left(\frac{1}{c_4}\right)\alpha_j^\vee(c_4) \\ &= y_j\left(\frac{1}{d_1}\right)\alpha_j^\vee(d_1)y_i\left(\frac{1}{d_2}\right)\alpha_i^\vee(d_2)y_j\left(\frac{1}{d_3}\right)\alpha_j^\vee(d_3)y_i\left(\frac{1}{d_4}\right)\alpha_i^\vee(d_4), \end{aligned}$$

$$\text{ここで } d_1 = c_4 + \frac{1}{c_2} \left(c_3 + \frac{c_2}{c_1} \right)^2, \quad d_2 = c_1c_4 + c_3 + \frac{c_1c_3^2}{c_2}, \quad (5.2)$$

$$d_3 = \frac{1}{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3^2c_4} \left(c_3 + \frac{c_2}{c_1} \right)^2}, \quad d_4 = \frac{1}{\frac{c_4}{c_3} + \frac{c_3}{c_2} + \frac{1}{c_1}}. \quad (5.3)$$

(iii) *Type G₂* ($\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -3, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1$):

$$\begin{aligned} & y_i\left(\frac{1}{c_1}\right)\alpha_i^\vee(c_1)y_j\left(\frac{1}{c_2}\right)\alpha_j^\vee(c_2)y_i\left(\frac{1}{c_3}\right)\alpha_i^\vee(c_3)y_j\left(\frac{1}{c_4}\right)\alpha_j^\vee(c_4)y_i\left(\frac{1}{c_5}\right)\alpha_i^\vee(c_5)y_j\left(\frac{1}{c_6}\right)\alpha_j^\vee(c_6) \\ &= y_j\left(\frac{1}{d_1}\right)\alpha_j^\vee(d_1)y_i\left(\frac{1}{d_2}\right)\alpha_i^\vee(d_2)y_j\left(\frac{1}{d_3}\right)\alpha_j^\vee(d_3)y_i\left(\frac{1}{d_4}\right)\alpha_i^\vee(d_4)y_j\left(\frac{1}{d_5}\right)\alpha_j^\vee(d_5)y_i\left(\frac{1}{d_6}\right)\alpha_i^\vee(d_6), \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、

$$d_1 = \frac{1}{c_2^2} \left(c_3 + \frac{c_2}{c_1} \right)^3 + \frac{1}{c_4} \left(c_5 + \frac{c_4}{c_3} \right)^3 + \frac{2c_4}{c_2} + \frac{3c_4}{c_1c_3} + \frac{3c_5}{c_1} + \frac{3c_3c_5}{c_2} + c_6, \quad (5.5)$$

$$d_2 = \frac{c_1}{c_4} \left(c_5 + \frac{c_4}{c_3} \right)^3 + \frac{c_1c_3}{c_2^3} \left(c_3 + \frac{c_2}{c_1} \right)^3 + \frac{3c_1c_3c_5}{c_2} + \frac{2c_1c_4}{c_2} + \frac{2c_4}{c_3} + c_1c_6 + 2c_5, \quad (5.6)$$

$$d_5 = \frac{1}{\frac{1}{c_6} \left(\frac{1}{c_4} \left(c_5 + \frac{c_4}{c_3} \right)^2 + \frac{c_3}{c_2} + \frac{1}{c_1} \right)^3 + \frac{c_6}{c_4} + \frac{3c_3c_5}{c_2c_4} + \frac{3c_5}{c_1c_4} + \frac{3}{c_1c_3} + \frac{2}{c_2}}, \quad (5.7)$$

$$d_6 = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{c_3}{c_2} + \frac{1}{c_4} \left(c_5 + \frac{c_4}{c_3} \right)^2 + \frac{c_6}{c_5}}, \quad d_3 = \frac{c_2c_4c_6}{d_1d_5}, \quad d_4 = \frac{c_1c_3c_5}{d_2d_6} \quad (5.8)$$

Proof. 証明には、よく知られた次の関係式を用いる。 □

Lemma 5.2. (i) *Type A_2* :

$$y_i(a)y_j(b) = y_{\alpha_i+\alpha_j}(ab)y_j(b)y_i(a). \quad (5.9)$$

(ii) *Type B_2* ($\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -2, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1$) :

$$y_i(a)y_j(b) = y_{2\alpha_i+\alpha_j}(a^2b)y_{\alpha_i+\alpha_j}(ab)y_j(b)y_i(a), \quad (5.10)$$

$$y_i(a)y_{\alpha_i+\alpha_j}(b) = y_{2\alpha_i+\alpha_j}(2ab)y_{\alpha_i+\alpha_j}(b)y_i(a). \quad (5.11)$$

(iii) *Type G_2* ($\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -3, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1$) :

$$y_i(a)y_j(b) = y_{3\alpha_i+2\alpha_j}(a^3b^2)y_{3\alpha_i+\alpha_j}(a^3b)y_{2\alpha_i+\alpha_j}(a^2b)y_{\alpha_i+\alpha_j}(ab)y_j(b)y_i(a), \quad (5.12)$$

$$y_{\alpha_i+\alpha_j}(a)y_{2\alpha_i+\alpha_j}(b) = y_{3\alpha_i+2\alpha_j}(3ab)y_{2\alpha_i+\alpha_j}(b)y_{\alpha_i+\alpha_j}(a), \quad (5.13)$$

$$y_j(a)y_{3\alpha_i+\alpha_j}(b) = y_{3\alpha_i+2\alpha_j}(-ab)y_{3\alpha_i+\alpha_j}(b)y_j(a). \quad (5.14)$$

Proposition 5.1 により各 d_j は c_j たちの positive rational function であることがわかる。すると、

$$(c_1, c_2, \dots) \mapsto y_j\left(\frac{1}{d_1}\right)\alpha_j^\vee(d_1)y_i\left(\frac{1}{d_2}\right)\alpha_i^\vee(d_2)\cdots$$

は $B_{w_0}^-$ 上の positive structures を与えていることがわかる (w_0 は A_2, B_2, G_2 の Weyl group の longest element). すると この positive structure の ultra-discretization が いわゆる braid-type isomorphism([14]) を与える :

Proposition 5.3 ([14]). (i) If $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{(0)} : B_i \otimes B_i &\xrightarrow{\sim} B_j \otimes B_i \\ (x)_i \otimes (y)_j &\mapsto (y)_j \otimes (x)_i. \end{aligned}$$

(ii) If $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1$,

$$\phi_{ij}^{(1)} : B_i \otimes B_j \otimes B_i \xrightarrow{\sim} B_j \otimes B_i \otimes B_j,$$

$$(z_1)_i \otimes (z_2)_j \otimes (z_3)_i \mapsto (\max(z_3, z_2 - z_1))_j \otimes (z_1 + z_3)_i \otimes (-\max(-z_1, z_3 - z_2))_j, \quad (5.15)$$

(iii) If $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -2$,

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{(2)} : B_i \otimes B_j \otimes B_i \otimes B_j &\xrightarrow{\sim} B_j \otimes B_i \otimes B_j \otimes B_i, \\ (z_1)_i \otimes (z_2)_j \otimes (z_3)_i \otimes (z_4)_j &\mapsto (Z_1)_j \otimes (Z_2)_i \otimes (Z_3)_j \otimes (Z_4)_i \\ \begin{cases} Z_1 = \max(z_4, z_2 - 2z_1, 2z_3 - z_2) \\ Z_2 = \max(z_1 + z_4, z_3, z_1 - z_2 + 2z_3) \\ Z_3 = -\max(-z_2, -z_4 - 2z_1, -2z_2 + 2z_3 - z_4) \\ Z_4 = -\max(-z_3 + z_4, -z_1, z_3 - z_2) \end{cases} & \quad (5.16) \end{aligned}$$

(iv) If $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1$, $\langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -3$,

$$\phi_{ij}^{(3)} : B_i \otimes B_j \otimes B_i \otimes B_j \otimes B_i \otimes B_j \xrightarrow{\sim} B_j \otimes B_i \otimes B_j \otimes B_i \otimes B_j \otimes B_i$$

$$(z_1)_i \otimes (z_2)_j \otimes (z_3)_i \otimes (z_4)_j \otimes (z_5)_i \otimes (z_6)_j \\ \mapsto (Z_1)_j \otimes (Z_2)_i \otimes (Z_3)_j \otimes (Z_4)_i \otimes (Z_5)_j \otimes (Z_6)_i,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \max(z_6, 3z_5 - z_4, -3z_3 + 2z_4, -2z_2 + 3z_3, -3z_1 + z_2) \\ Z_2 = \max(z_1 + z_6, z_1 - z_4 + 3z_5, z_1 - 3z_3 + 2z_4, z_1 - 2z_2 + 3z_3, -z_1 + z_3) \\ Z_3 = z_2 + z_4 + z_6 - Z_1 - Z_5, \\ Z_4 = z_1 + z_3 + z_5 - Z_2 - Z_6, \\ Z_5 = -\max(-z_4 + z_6, -3z_4 + 6z_5 - z_6, -6z_3 + 3z_4 - z_6, \\ \quad -3z_2 + 3z_3 - z_6, -3z_1 - z_6) \\ Z_6 = -\max(-z_1, -z_2 + z_3, -z_4 + 2z_5, -2z_3 + z_4, -z_5 + z_6) \end{array} \right. \quad (5.17)$$

$\phi_{ij}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) を *braid-type isomorphism* と呼ぶ。

Proof. さて、(5.1) において $\frac{c_1 c_3 + c_2}{c_1}$, $c_1 c_3$, $\frac{c_1 c_2}{c_1 c_3 + c_2}$ の ultra-discretizations は

$$\begin{aligned} v\left(\frac{c_1 c_3 + c_2}{c_1}\right) &= \max(v(c_1) + v(c_3), v(c_2)) - v(c_1) = \max(v(c_3), v(c_2) - v(c_1)), \\ v(c_1 c_3) &= v(c_1) + v(c_3), \\ v\left(\frac{c_1 c_2}{c_1 c_3 + c_2}\right) &= v(c_1) + v(c_2) - \max(v(c_1) + v(c_3), v(c_2)) = -\max(v(c_3) - v(c_2), -v(c_1)) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $v(c_i)$ を z_i とすると (5.15) を得る。

同様にして、(5.2) and (5.3) において d_i の ultra-discretization を考えると (5.16) を得る。Proposition 5.3 (iii) において $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1$, $\langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -2$ としているが、これは Proposition 5.1 (ii) の Langlands dual である。

最後に G_2 -case であるが、この場合には少し注意が必要である。(5.17) において例えば $v(d_1)$ は

$$v(d_1) = \max(-2z_2 + 3z_3, -3z_1 + z_2, 3z_5 - z_4, -3z_3 + 2z_4, z_6, \\ z_4 - z_2, z_4 - z_1 - z_3, z_5 - z_1, z_3 + z_5 - z_2) \quad (v(c_j) = z_j), \quad (5.18)$$

となるが、これは (5.17) における Z_1 とは見かけが異なる。しかし、次のことに注意すれば、実は一致していることがわかる：

$m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$ と $t_1 + \dots + t_k = 1$ をみたす $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して

$$\max\left(m_1, \dots, m_k, \sum_{j=1}^k t_j m_j\right) = \max(m_1, \dots, m_k)$$

実際、(5.18) において

$$\begin{aligned} z_4 - z_2 &= \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_4, & z_4 - z_1 - z_3 &= \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{2}A_4, \\ z_5 - z_1 &= \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{6}A_4, & z_3 + z_5 - z_2 &= \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{6}A_4, \end{aligned}$$

ここで $A_1 := -2z_2 + 3z_3$, $A_2 := -3z_1 + z_2$, $A_3 := 3z_5 - z_4$, $A_4 := -3z_3 + 2z_4$ である。よって、 $Z_1 = v(d_1)$ となり、他のものも同様の考察により得られる。 $\square$

参考文献

- [1] Berenstein A. and Kazhdan D., Geometric crystals and Unipotent crystals, math.QA/9912105.
- [2] Berenstein A. and Zelevinsky A., Tensor product multiplicities, Canonical bases and Totally positive varieties, *Invent.Math.*, **143**, 77–128 (2001).
- [3] Hatayama G., Hikami K., Inoue R., Kuniba A., Takagi T. and Tokihiro T., The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors, *Journal of Mathematical Physics*, **42** 274–308, (2001).
- [4] Hatayama G., Kuniba A., Okado M., Takagi T. and Yamada Y., Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases, *Contemporary Mathematics* **297**, 151–182, (2002).
- [5] Kac V.G., Infinite dimensional Lie algebras 3rd ed., Cambridge University Press.
- [6] Kashiwara M., Crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula. *Duke Math. J.* **71** (3), 839–858 (1993).
- [7] Kuniba A., Okado M., Takagi T. and Yamada Y., Geometric crystal and tropical R for $D(1)_n$, math.QA/0208239.
- [8] Kumar S., Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting, *Invent.Math.*, **89**, 395–423, (1987).
- [9] Kumar S., Kac-Moody groups, their Flag varieties and Representation Theory, *Progress in Mathematics* 204, Birkhauser Boston, 2002.
- [10] Kac V.G. and Peterson D.H., Regular functions on certain infinite-dimensional groups; in “Arithmetic and Geometry”(Artin M., Tate J., eds), 141–166, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1983).
- [11] Kac V.G. and Peterson D.H., Defining relations of certain infinite dimensional groups, *Société Mathématique de France, Astérisque, hors série*, 1985, p.165–208.
- [12] Peterson D.H., and Kac V.G., Infinite flag varieties and conjugacy theorems, *Proc.Nat.Acad.Sci.USA*, **80**, 1778–1782, (1983).
- [13] Naito S. and Sagaki D., Crystal Basis Elements of an Extremal Weight Module Fixed by a Diagram Automorphism, 第5回「代数群と量子群の表現論」研究集会報告集 (2002).
- [14] Nakashima T., Polyhedral Realizations of Crystal Bases and Braid-type Isomorphisms. *Contemporary Mathematics* **248**, 419–435 (1999).

- [15] Nakashima T., Geometric Crystals on Schubert Varieties, (preprint), math.QA/0303087.
- [16] Okado M., 幾何クリスタルとトロピカル R, 第 5 回「代数群と量子群の表現論」研究集会報告集 (2002).
- [17] Slodowy P., On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, Can.Math.Soc.Conf.Proc. on 'Algebraic geometry' (Vancouver) **6**, 405–442, (1986).