

砂のせん断抵抗について

八 木 則 男

ON THE SHEARING RESISTANCE OF SAND

By Norio YAGI

Synopsis

In this paper, shearing resistance of sand is considered on the base that the resistance to dilatancy depends on the mean normal stress σ_m . The triaxial compression tests were carried out keeping σ_m constant. From these test, following results were obtained.

1) The smaller the mean normal stress σ_m is, the larger the stress ratio $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_m$ at failure. One of the reason of this fact is that $d(\Delta V/V)/d\gamma$ at failure is larger at smaller σ_m , ($\Delta V/V$: volume change, γ : shear strain).

2) The relationship between $\sin \varphi$ and $d(\Delta V/V)/d\gamma$ may be represented by straight line.

3) The shearing resistance of sand mobilized with shear strain is not only affected by the mean normal stress and the void ratio but also by strain or stress history.

1. ま え が き

基礎地盤の沈下や地盤内の変形、土圧などの計算には静的な釣り合い式の他に土の応力・変形関係が必要である。したがって砂地盤の場合には、変形とともにどのように砂がせん断抵抗を発揮するか、砂の圧縮性はどうかを調べることは砂の応力・変形関係を求めるうえに必要なである。ここでは砂のせん断による抵抗について考えてみる。

砂のせん断抵抗は従来から粒子間の摩擦抵抗とせん断時に生ずる体積変化（ダイレイタンス）に必要な仕事による抵抗とに分けられると考えられてきた。これまでに破壊時における上記の2種の抵抗を考えて、体積変化にともなうせん断抵抗の値を与える式が Bishop¹⁾, Newland と Allely²⁾, Ladanyi³⁾, Rowe⁴⁾ などによって提案されてきた。

ここでは Ladanyi の考え方、すなわち体積変化にともなうせん断抵抗は平均垂直応力 σ_m に比例するという考え方に従って両せん断抵抗について考察した。したがって、平均垂直応力を一定にしたせん断試験を行ない、その結果に基づいて、ひずみとともに発揮されるせん断抵抗について考察したものである。

2. 実験装置と供試体

試験機は N. G. I. 型の三軸試験機で、ひずみ制御式のものを用いた。平均垂直応力を一定にするには、軸方向の力をブルーリングから読みとり、刻々ひずみとともに変化する供試体の断面積に応じた軸差応力を 0.005 kg/cm^2 づつ計算して、それに対応する側圧を段階的に手動ピストンで水銀柱をみながら調節した。

従来用いていた供試体は高さや直径の比が2:1より高さが大きい円柱形のものであったが、端面の摩擦のために変形が一様に生じなかった。ここでは高さ5cm、直径5cmでその比が1:1の円柱形供試体を用いた。そして Fig. 1 に示すように、ゴム膜とアルミフイルの間にシリコングリースをぬったものをペデ

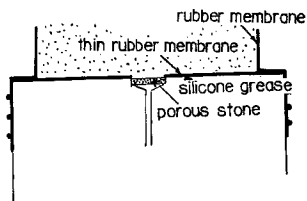


Fig. 1

スタルおよび载荷キャップと供試体の間に入れてその間の摩擦を除いた。その結果供試体の変形は上下方向に一樣に生じた。したがってペDESTALおよび载荷キャップの直径は 6 cm とした。

試料としては豊浦の標準砂を用い比較的密な完全飽和の供試体とした。

なお軸方向の変形速度は 10%/hour で砂質土に対する試験としては比較的緩速である。それは平均垂直応力を一定にするためである。

3. ゴムスリーブの砂粒子間の間げきへの貫入量の推定

供試体を包んでいるゴムスリーブは側圧が変化すると砂粒子間の間げき中に入り出す。これを *membrane misfit* と呼んでいる。したがって体積変化を供試体からの排水量から求める場合にはこの *membrane misfit* によって、真の体積変化と違った値を測定している。したがって平均垂直応力を一定にするような側圧 σ_3 が変化するせん断試験においては、この量を補正しなければならない。供試体内から排水される見かけの体積変化 ΔV_a は砂の体積に比例する真の砂の圧縮または膨張量 ΔV と砂とゴムスリーブの接触面積に比例するゴムスリーブの貫入量 ΔV_m との合計である。ゆえに、*membrane misfit* の量を求めるには、砂とゴムスリーブとの接触面積を変えずに砂の体積だけを変えて三軸試験機で等方圧縮を行ない、供試体からの排水量を測定することによって求めることができる。すなわち、見かけの体積変化 ΔV_a と砂の体積との関係から、砂の体積がゼロにおける見かけの体積変化を外挿によって求めるとそれが *membrane misfit* の量となる。

その一方法として Fig. 2 に示すように供試体と同じ高さの真鍮の円柱を供試体中に同心円状に挿入して水圧による等方圧縮試験を行なった。なおゴムスリーブの厚さは 0.15 mm である。 σ_m が一定の試験では周圧 σ_3 は主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の増加とともに減少するので、 $\sigma_3 = 2.5 \text{ kg/cm}^2$ から周圧を減少させたとき

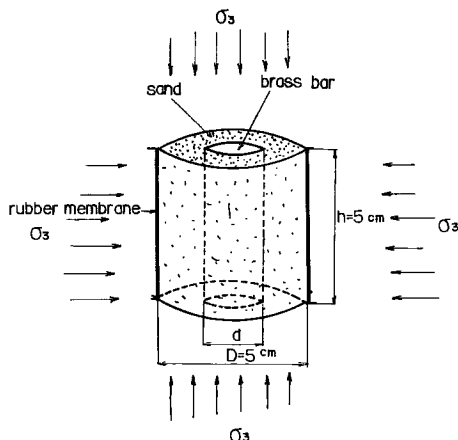


Fig. 2

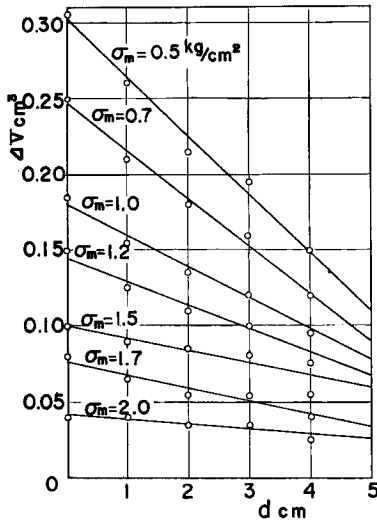


Fig. 3 Relationship between amount of drainage from specimen and diameter of brass bar in specimen.

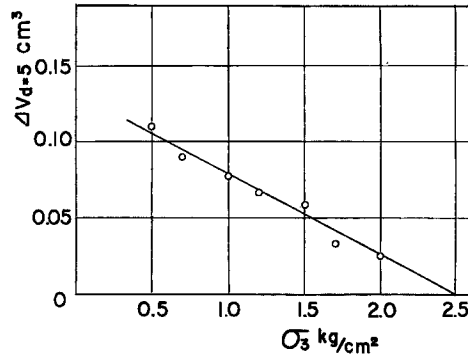


Fig. 4 Relationship between amount of drainage from specimen due to penetration of rubber membrane and allround pressure.

の membrane misfit の量を求めた。その結果、見かけの体積変化 ΔV_a と真鍮の直径 d の関係を示すと Fig. 3 のようになり、直線関係が得られる。この直線を外挿して $d=5$ cm (供試体直径と等しい。砂の体積はゼロ) と ΔV_a のきの値を周圧 σ_3 に対してプロットすると Fig. 4 のようになり、 $\sigma_3 \leq 2.5$ kg/cm² では直線関係が得られる。以後のデータはこの直線を用いて補正したものである。

4. 実験結果と考察

豊浦の標準砂に対して、 σ_m を 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 kg/cm² を一定にした 5 種の三軸試験を行なった。著者は以前に応力制御式で σ_m を一定にしたせん断試験を行なったが⁵⁾、応力制御のため、破壊点付近より以下のひずみしか求められなかった。ここでは、ひずみ制御のため、変形に対して体積変化が生じなくなる限界状態まで変形を与えることができた。

得られた主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ とせん断ひずみ γ の関係を Fig. 5 に示す。ここに γ は対数ひずみである。また図中に示すように、初期間げき比 e_0 は各 σ_m に対してほぼ同じであるが、 $\sigma_m = 0.5$ kg/cm² の場合は e_0 がやや大きい。また $\sigma_m = 2.0$ kg/cm² の曲線の形が他のものと比べて、異なっているが、これは試供体がせん断中に偏心したためである。同じ γ に対する $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の大きさはほぼ σ_m に比例しているが、 $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_m$ の大きさは σ_m が小さいほどやや大きい。この一原因としてつぎに述べるように、 σ_m が小さいほど $d(\Delta V/V)/d\gamma$ が大きいことが考えられる。また $(\sigma_1 - \sigma_3)$ とダイレイタンスによる体積変化 $(\Delta V/V)_d$ との関係を示すと Fig. 6 になり、 $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_m$ と $(\Delta V/V)_d$ の関係は σ_m の大きさにかかわらず同じ曲線上にあることは前の報告⁵⁾と同じである。

つぎにせん断ひずみ γ に対して体積変化 $(\Delta V/V)_d$ の関係は Fig. 7 である。前の報告では破壊ひずみ以下では γ と $(\Delta V/V)_d$ は直線関係であることを示したが、Fig. 7 の曲線は S 字形であり、 γ の小さい範囲では間げき比が小さいにもかかわらず γ に対する $(\Delta V/V)_d$ の増加の割合は小さい。ダイレイタンスの量を σ_m が一定のせん断試験において、 $d(\Delta V/V)_d/d\gamma$ で表わすと、 $d(\Delta V/V)_d/d\gamma$ は間げき比 e および σ_m の関数として考えられてきた。すなわち、 e が大きばとまた σ_m が大きいほど $d(\Delta V/V)_d/d\gamma$ は小さい。ただし ΔV は膨張を正としている。しかし Fig. 7 からわかるように、同一供試体による σ_m が一定で

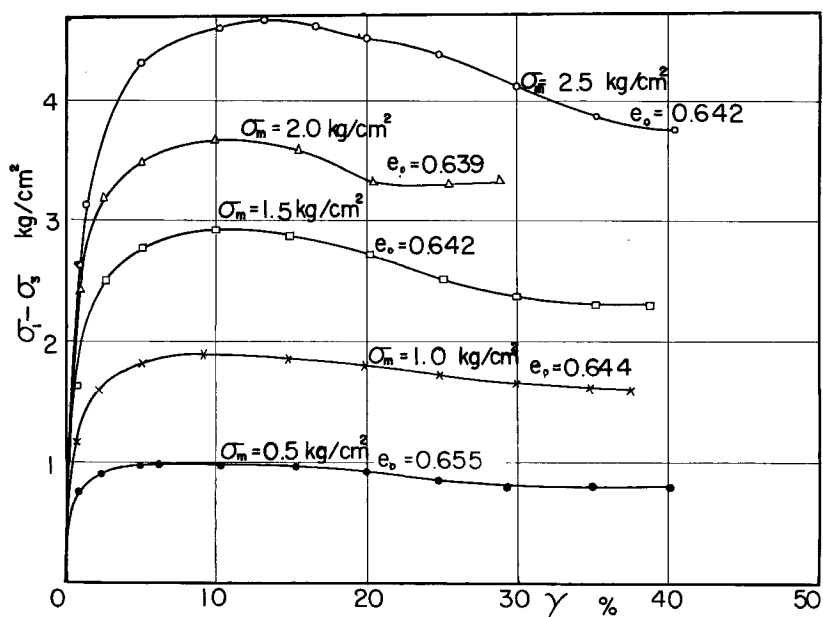
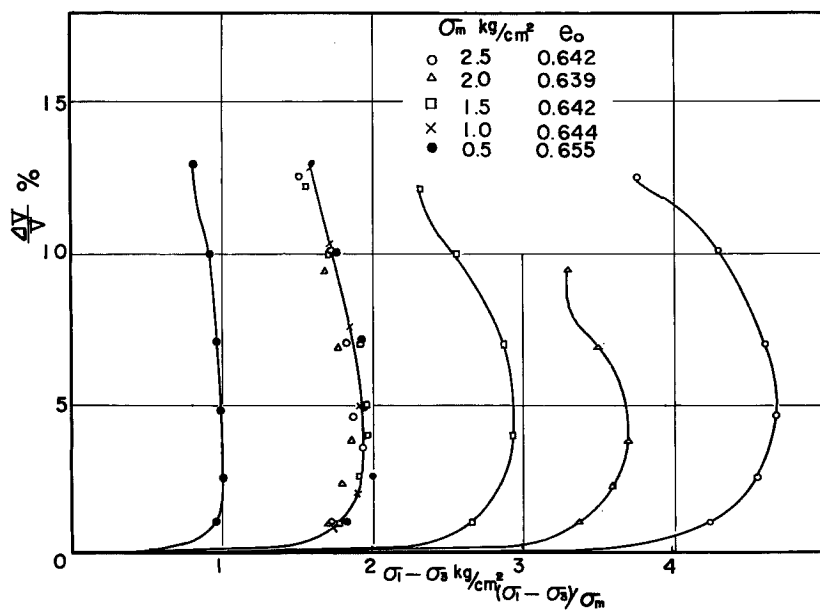


Fig. 5 Stress-strain curve.

Fig. 6 Relationship between deviator stress or stress ratio $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_m$ and volumetric change due to dilatancy.

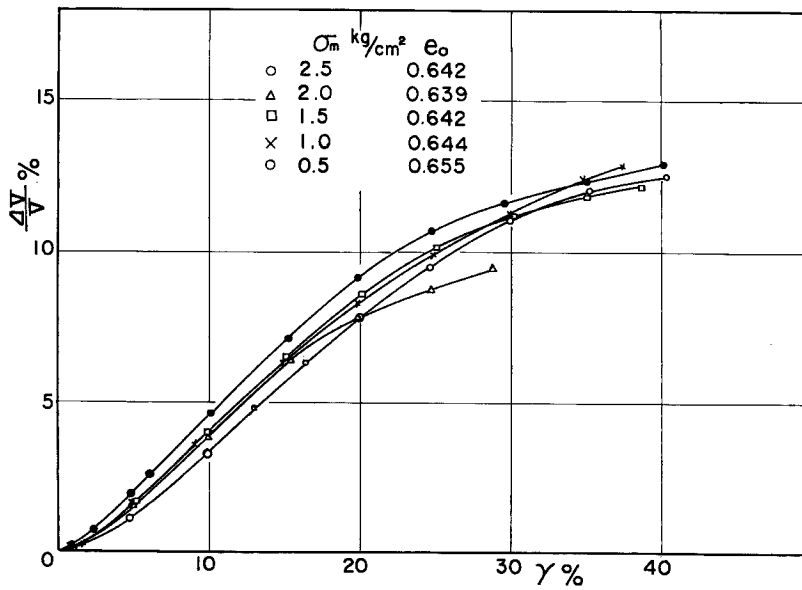


Fig. 7 Relationship between shear strain and volumetric change due to dilatancy.

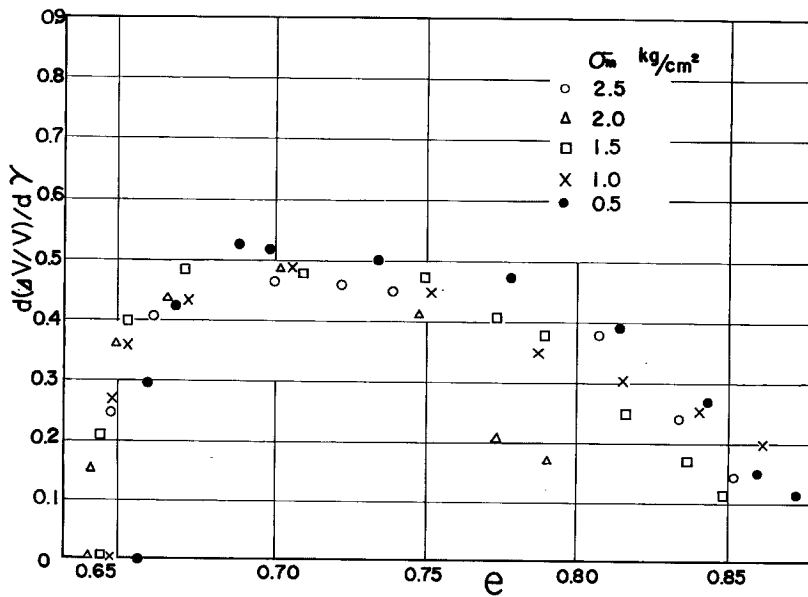
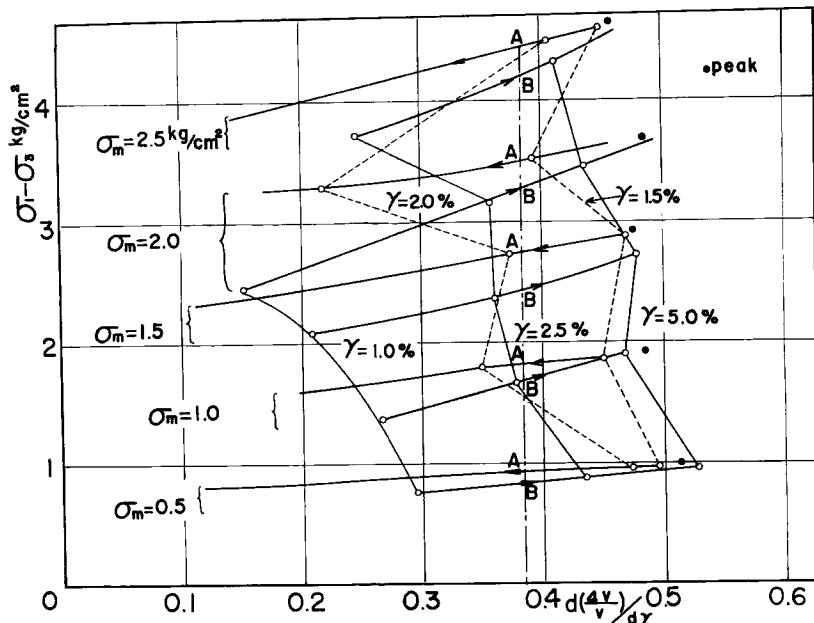


Fig. 8 Relationship between void ratio and $d(\Delta V/V)/d\gamma$.

Fig. 9 Relationship between $d(\Delta V/V)/d\gamma$ and deviator stress.

の排水せん断の過程においては $d(\Delta V/V)/d\gamma$ は e や σ_m だけの関数ではない。このことを調べるため、せん断過程における e に対して $d(\Delta V/V)/d\gamma$ を示すと Fig. 8 のようになる。排水試験においては、砂の体積は γ の増加とともに膨張を続けるから、(ただし初期間げき比が限界間げき比よりも小さい) γ とともに e は連続的に増加する。したがって、以上のことから $d(\Delta V/V)/d\gamma$ は γ の関数となっていることがわかる。ゆえに $d(\Delta V/V)/d\gamma$ はめずみの履歴によって影響を受ける。これは粒子配列などの砂の構造によるものと思われるが、これについては後述する。

ダイレイタンスによるせん断抵抗を調べるために、主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ と $d(\Delta V/V)/d\gamma$ の関係を示したのが Fig. 9 である。各 σ_m に対して2本の曲線が描れているが、矢印の方向にせん断が進んでいることを示している。また黒点は Fig. 5 の応力・ひずみ曲線の最大値を示している。この図からわかることは $d(\Delta V/V)/d\gamma$ と $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の最大値が一致しているのではなく、 $d(\Delta V/V)/d\gamma$ が最大になったのちに $(\sigma_1 - \sigma_3)$ が最大になっている。したがって従来はダイレイタンスによるせん断抵抗よりも粒子間摩擦によるせん断抵抗の方が小さなひずみでその最大値を発揮すると考えられてきたが、実験結果はその逆を示している。これに対する説明としてつぎのことが考えられる。砂粒子間の平面的なすべり抵抗が全粒子間接点で変形の開始と同時に抵抗を示すならば、非常に小さなせん断変形で粒子間摩擦によるせん断抵抗は発揮されるであろう。例えば Fig. 10 (a) に示すような同じ大きさの球が規則的な配列をした場合の応力・変形関係は Fig. 10 (b) のようになり、ほとんど変形を生じないで全せん断抵抗が発揮される。しかし一般には砂粒子の形および集合体の配列は不規則であって、各接点間で発揮する摩擦抵抗もひずみに対しておくれを生ずる。

Fig. 9 において各 σ_m に対する曲線を結んでいる線が引かれているが、これは等ひずみ線を表わしている。同じひずみでは $d(\Delta V/V)/d\gamma$ の値は σ_m が小さいほど大きいことを示している。また $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の最大値における $d(\Delta V/V)/d\gamma$ も σ_m が小さいほど大きい。この事実は前述した $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_m$ の大きさが σ_m が小さくなるほど大きくなる一つの理由である。

Fig. 9 とは同様な図であるが、 $d(\Delta V/V)/d\gamma$ の変化によって内部摩擦角がいかに変化するかを調べるた

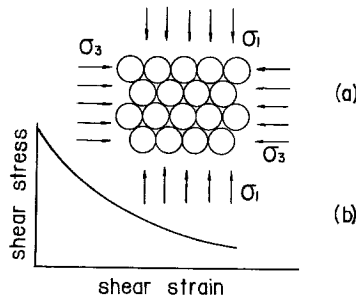
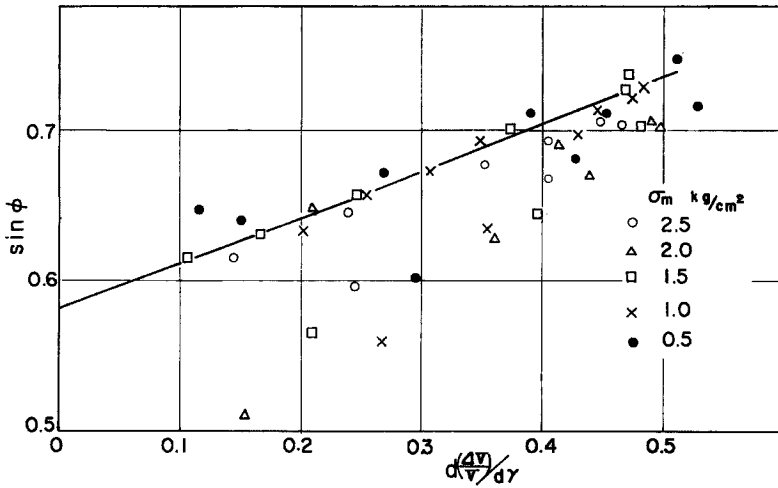


Fig. 10

Fig. 11 Relationship between $d(\Delta V/V)/d\gamma$ and $\sin \phi$.

めに、 $d(\Delta V/V)/d\gamma$ と $\sin \phi$ の関係を示すと Fig. 11 のようになる。この図においても同じ $d(\Delta V/V)/d\gamma$ に対して内部摩擦角 ϕ は σ_m が小さいほど大きくなっている。しかし σ_m による $\sin \phi$ の値の差はわずかであるので、それらを σ_m に対して同じであるとみなす。そして $\sin \phi$ が最大値に達したのちのひずみに対しては粒子間摩擦による抵抗は一定の値を示すと仮定すると、 $\sin \phi$ が最大値以後の $\sin \phi$ と $d(\Delta V/V)/d\gamma$ の関係は、 σ_m が一定のせん断試験であると、Fig. 11 に示すように直線関係となり、 $d(\Delta V/V)/d\gamma$ の 1 の変化に対して $\sin \phi$ は約 0.33 の変化を示す。一般にダイレイタンスによるせん断抵抗を内部摩擦角に換算することは困難であるが、上記のような考えに基づき σ_m を一定にしたせん断試験を行なうことによって、ダイレイタンスによるせん断抵抗を $\sin \phi$ に換算することができる。

Fig. 11 に示す直線を外挿して $\sin \phi$ 軸と交わる点え求めると、その値は $d(\Delta V/V)/d\gamma = 0$ 、約 0.58 である。この値は、すなわちダイレイタンスによる抵抗がゼロのときの値であるから、粒子間摩擦に相当するせん断抵抗と考えてよい。したがって粒子間摩擦によるせん断抵抗角を ϕ_f とすると $\sin \phi_f = 0.58$ で $\phi_f = 35^\circ$ となる。

このような ϕ_f の値または粒子間摩擦による主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ を求めるために種々のダイレイタンスに対する補正式が提案されている。ここではつぎの 3 式によって ϕ_f の値を計算して実験結果と比較した。

Bishop の式¹⁾

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{dW_f}{d\varepsilon_1} + \sigma_3 \frac{d\left(\frac{dV}{V}\right)}{d\varepsilon_1}$$

ここに W_f は破壊時における粒子間摩擦のためについやされるエネルギーであり, ε_1 は最大主ひずみである。

Newland と Allely の式²⁾

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_3}} \left(\frac{d\left(\frac{dV}{V}\right)}{d\varepsilon_1} \right)_{max}}{1 + \frac{\sigma_{1max}}{\sigma_3} + \left(\frac{d\left(\frac{dV}{V}\right)}{d\varepsilon_1} \right)_{max}}$$

$$\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_3} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi_f}{2} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{\sigma_{R'}}{\sigma_3} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi_f}{2} \right)$$

ここに $\sigma_{R'}$ は破壊時に $\theta=0$ としたときの粒子間摩擦を発揮するために必要な σ_{1max} の 1 部分である。また θ は, ダイレイタンシーのためにせん断力の方向と砂粒子の変位の方向が一致せず, せん断力の方向と粒子の変位の方向との角度を示している。

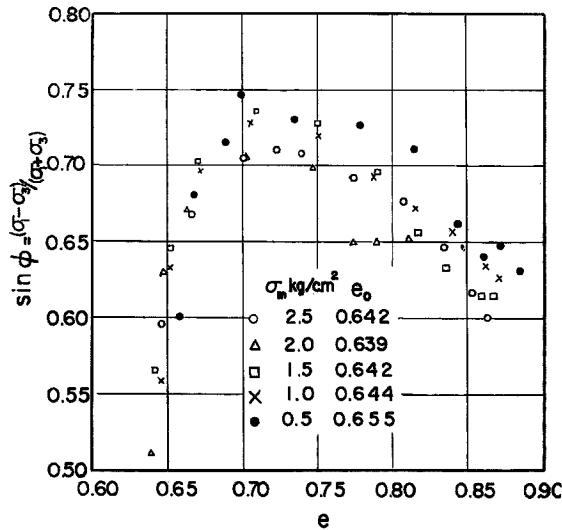
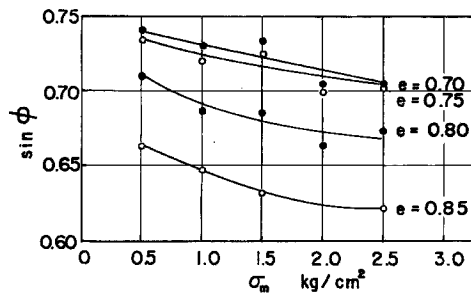
Ladanyi の式³⁾

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{3}{2} \frac{dW_f}{d\gamma} + \frac{3}{2} \sigma_m \frac{d\left(\frac{dV}{V}\right)_d}{d\gamma}$$

ここで Ladanyi の式はダイレイタンシー補正項の応力は σ_m であり, ここでの試験は σ_m が一定であるため, 問題はないが, 他の式は最小主応力 σ_3 が入っているので, ここでの計算は破壊時において行なった。また元来これらの式は破壊時に対して導びかれたものであり, 破壊のしゅん間においては σ_m が一定の試験においても σ_3 のひずみに対する微分がゼロとなるので, Bishop の式および Newland と Allely の式も用いることができる。また Bishop の式および Ladanyi の式で計算される粒子間摩擦による主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ の φ_f への換算については種々の議論はあるが, ここでは破壊面に作用している垂直応力は $(\sigma_1 + \sigma_3) \cos^2 \varphi$ であるとして (この値は粒子間摩擦の抵抗による応力とダイレイタンシーによる抵抗の応力とが含まれている), $\sin \varphi_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_f / (\sigma_1 + \sigma_3)$ で計算した。

計算結果によると各 σ_m に対する φ_f の平均値は Bishop の式では $\varphi_f = 36^\circ$, Newland と Allely の式では $\varphi_f = 32^\circ$, Ladanyi の式では $\varphi_f = 29^\circ$ となる。この結果からダイレイタンシーの補正量を比較すると, Bishop の式ではやや小さく Newland と Allely および Ladanyi の式では大きいように思われる。すなわち, Ladanyi の式から求めた φ_f の値は小さい。 $d(dV/V)_d/d\gamma$ がゼロであるような限界状態では当然各式とも $\varphi_f = 35^\circ$ となるが, その値に至る過程では, Bishop の式では破壊ひずみで φ_f が最大値を示し, その後 γ の進行とともにほとんど値は変化しない。他の 2 式では $\gamma = 40\%$ の限界状態に至るまで φ_f は徐々に増加することが予測される。このように各式において補正量の値には相当の開きがあり, どの式が最も妥当であるかは断定できない。またこれらの式は三軸試験における応力条件によっても式の妥当性が異なってくると思われる。しかしここでの実験結果から判断する限りにおいては Bishop の式が最も近い値を与えるようである。

つぎに間げき比 e の変化に対して $\sin \varphi$ の値をプロットすると Fig. 12 のようになり, 同じ e に対して, $\sin \varphi$ の値は σ_m の小さいほど大きい。これを示すために e をパラメーターに $\sin \varphi$ と σ_m の関係を示すと Fig. 13 のようになる。ここに e は 0.7 より大きな範囲であり, したがって $\sin \varphi$ が最大値に達した後ひずみに対応するものである。そして e が大きくなるほど $\sin \varphi$ におよぼす σ_m の影響は大きくなる。また Fig. 8 における $d(dV/V)_d/d\gamma = 0$, Fig. 13 の $\sin \varphi = 0.58$ における e の値を外挿して求めると 0.87

Fig. 12 Relationship between void ratio and $\sin \phi$.Fig. 13 Relationship between mean normal stress and $\sin \phi$.

～0.91の範囲になり、やはり σ_m が小さいほど e は大きくなる。これはこの状態における間げき比を限界間げき比とすると他の方法⁶⁾によって求められた限界間げき比と同様な傾向を示すことを表わしている。

最後にひずみとともに発揮されるせん断抵抗がひずみ履歴や応力履歴にどのように影響されるかを調べるためにつぎのような3種類の供試体について $\sigma_m = 2.5 \text{ kg/cm}^2$ を一定にした三軸せん断試験を行なった。

(1) $\sigma_3 = 2.5 \text{ kg/cm}^2$ の周圧で等方圧縮し、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ を増加させて任意のひずみ（ただし破壊ひずみよりやや小さい）を与えたのち $(\sigma_1 - \sigma_3)$ を取り除く。そのときの残留ひずみ γ_0 は6.2%，間げき比 e_0 は0.668であった。

(2) $\sigma_3 = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ で圧縮し、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ を増加させて(1)と同じ大きさのひずみを与えたのち $(\sigma_1 - \sigma_3)$ を取り除き、つづいて $\sigma_3 = 2.5 \text{ kg/cm}^2$ で等方圧縮をする。そのときの残留ひずみ $\gamma_0 = 6.5\%$ ，間げき比 e_0 は0.668で(3)の供試体とほぼ同じである。

(3) (2)と同様であるが $\sigma_3 = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ のときに与えたひずみが破壊ひずみを越えたもので、残留ひずみ γ_0 は14.6%，間げき比 e_0 は0.739であった。

これらの試験の結果の応力・ひずみ関係を研すと Fig. 14 である。図には前に行なったひずみ履歴のないときの $\sigma_m = 2.5 \text{ kg/cm}^2$ の曲線も合せて描いてある。これらの結果によると、ひずみ履歴を受けた供試体の方が初期間げき比が大きいにもかかわらず同じひずみの増加に対しては大きなせん断抵抗を示してい

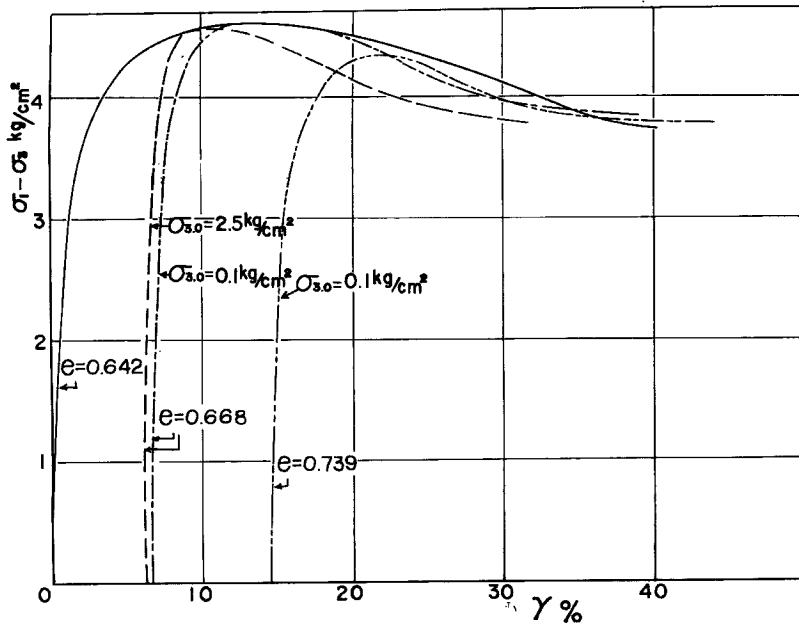


Fig. 14 Stress-strain curve.

る。すなわち Fig. 14 の曲線の勾配はひずみ履歴の影響が現れている。また(1)および(2)の供試体はほとんどひずみ履歴が同じであるが、小さな応力によって受けたひずみ履歴の方が履歴の影響が小さい。応力の履歴もまた応力・ひずみ関係に影響している。すなわち、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ の大きなところで(2)の供試体の方が勾配がゆるやかになっている。しかしひずみ履歴が破壊ひずみ以下であると強度には影響を与えない。すなわち強度はひずみ履歴を受けないものと同じである。一方ひずみ履歴の大きさが破壊ひずみを越えたものに対しては初期の勾配は大きくなるが、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ が大きくなるとひずみ履歴が破壊ひずみよりも小さいものと比べて急激に勾配がゆるくなる。また破壊強度もひずみ履歴のないものよりも小さくなる。

これらのひずみ履歴によって応力・ひずみ曲線の勾配が急になる現象は前述した各粒子間の摩擦抵抗のひずみによる発揮のおくれがひずみ履歴によって少くなるからであると思われる。Fig. 10 (a) のような全粒子間接点の摩擦抵抗が同時に発揮する場合には Fig. 10 (b) のように (せん断応力)/(せん断ひずみ) の値は無限大に近くなる。したがって、このような現象を考えるにはひずみ履歴による粒子配列構造について調べなければならない。

5. あとがき

平均垂直応力 σ_m を一定にしたせん断試験を実施して、ダイレイタンスによるせん断抵抗がに左右されるとすれば、ダイレイタンスによるせん断抵抗の内部摩擦角への採算を実験的に行なうことができた。またひずみとともに発揮されるせん断抵抗は σ_m や間げき比のみならずひずみ履歴の影響を受けることが判明した。したがって砂質土の変形特性を考える場合には、砂粒子の配列構造などの構造的性についても粘性土と同様に調べなければならない。今後はこのような砂の状態を考慮した変形特性について研究を進めたい。

参 考 文 献

- 1) Bishop, A. W.: Correspondence, Geotechnique, Vol. 4, 1954, pp.43~45.
- 2) Newland, P. L. and B. H. Allely: Volume Change in Drained Triaxial Test on Granular

- Materials, Geotechnique, Vol. 7, 1957, pp.17~34.
- 3) Ladanyi, B. : Etude des relations entre les contraintes et les deformations lors du cisaillement des sols pulverulents, Bll. Ann. Trav. Pulbs. Belg., 1960, pp.241~270.
 - 4) Rowe, P. W. : The Stress Dilatancy Relations for Static Equilibrium of Assembly of Particle in Contact, Proc. Royal Society, London, Series A, 1961, pp.500~527.
 - 5) 村山朔郎・八木則男：砂の変形特性について，京都大学防災研究所年報，第7号，1964，pp.24~38.
 - 6) Taylor, D. W. : Fundamentals of Soil Mechanics, Wiley, New York, 1948, pp.354~358.