

線形セル環について

東洋大学工学部 佐藤 忠一

1. まえがき

セル構造オートマトンにおいて、セルの状態数が有限の場合「並列写像が単射であることとそれが逆変換を持つこととは等価である。その結果、並列写像が単射ならばそれは全射である。」ということが知られている。しかし、セルの状態数が無限の場合には、もはや上記の関係は一般には成り立たない。

文献[4]において線形セル構造オートマトンにおけるセルの状態集合として無限環の場合を論じている。単にセルの状態数を無限にしたのでは、線形セル構造オートマトンの持つ豊かな代数構造が失われてしまう。そこで、どのような環ならば有限状態と同じような議論ができるかという意味で、線形セル環なる新しい環が導入された。

可換環 R が線形セル環になるためには、 R の素イデアルの分布が問題となる。有限環と異なり無限環の場合、その素イデアルも一般に無限個あらわれる。そのために何らかの topology 的な取り扱いが必要になる。 R のすべての素イデアルの集合を $\text{Spec}(R)$ で表すと $\text{Spec}(R)$ には Zariski 位相とよばれる位相が定まるが、この位相は線形セル構造オートマトンにおける局所関数の単射性・全射性を論じる際にすでに現われていたものである。

本論文では、Zariski 位相を用いて線形セル構造オートマトン、線形セル環を論じる。最後に線形セル環の行列環への一つの応用を述べる。

2. 準備

R 上の線形セル構造オートマトンとは (Z^k, R, N, f) で与えられ, Z は整数の集合, Z^k は k 次元セル空間, R は環で各セルが取り得る状態の集合を表す。 N は Z^k の有限部分集合で $N = \{v_1, \dots, v_n\}$, N は近傍を表す。 f は $R^n \rightarrow R$ なる線形写像で $f = \sum a_j x_j$ である。 f はスコープ幅 n の線形局所関数と呼ばれる。 Z^k から R への写像を様相という。様相の集合を $C(R)$ で表す。 f に対して, $f^\infty: C(R) \rightarrow (R)$ を次のように定める。 $u, w \in C(R)$ および $r \in Z^k$ に対して

$$f^\infty(u) = w \iff w(r) = \sum a_j u(r+v_j)$$

ここで, $r+v_1, \dots, r+v_n$ なる n 個のセルはセル r の近傍と呼ばれる。 f^∞ を線形並列写像という。

f^∞ が $C(R)$ 上で単射のとき f は R 上で単射といい, f^∞ が $C(R)$ 上で全射のとき f は R 上で全射という。また, f^∞ が $C(R)$ 上で逆変換を持つとき f は R 上で逆変換を持つという。

3. Zariski 位相

R を環 (単位元 1 を有する可換環) とする。 R の素イデアルの全体 (ただし, R 自身をのぞく) の集合を $\text{Spec}(R)$ で表す。

S を R の任意の部分集合とし,

$$V(S) = \{p \in \text{Spec}(R) \mid S \subseteq p\}$$

$$D(S) = \text{Spec}(R) - V(S)$$

とする。また, R の部分集合 S によって生成される R のイデアルを α とする。このとき $V(S) = V(\alpha) = V(\text{rad } \alpha)$ が成り立つ。したがって, $D(S) = D(\alpha) = D(\text{rad } \alpha)$ が成り立つ。

次の命題 1 は $V(S)$ 全体を考え 各 $V(S)$ を閉集合と考えることにより, 空間 $\text{Spec}(R)$ に位相を定義する。このことは命題 2 で示すように $D(S)$ を開集合と考えることにより, 空間 $\text{Spec}(R)$ に位相を定義するということと全く同じことである。

命題 1 [5] 次の (1) ~ (4) が成り立つ。

- (1) $\text{Spec}(R) = V(\{0\})$
- (2) $\emptyset = V(\{1\})$
- (3) 有限個の $V(S_1), V(S_2), \dots, V(S_m)$ が与えられているとする。このとき, $\bigcup_{i=1}^m V(S_i) = V(S)$ をみたす R の部分集合 S が存在する。
- (4) 有限または無限個の $V(S_i); i \in I$ が与えられているとする。このとき, $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$ が成り立つ。

命題 2 [5] 次の (1) ~ (4) が成り立つ。

- (1) $\emptyset = D(\{0\})$
- (2) $\text{Spec}(R) = D(\{1\})$
- (3) 有限個の $D(S_1), D(S_2), \dots, D(S_m)$ が与えられているとする。このとき, $\bigcap_{i=1}^m D(S_i) = D(S)$ をみたす R の部分集合 S が存在する。
- (4) 有限または無限個の $D(S_i); i \in I$ が与えられているとする。このとき, $\bigcup_{i \in I} D(S_i) = D(\bigcup_{i \in I} S_i)$ が成り立つ。

$a \in R$ に対して, $D(a)$ が開集合のベースになっていることが命題 2 の (4) よりわかる。

二つの可換環 R_1, R_2 に対して $h: R_1 \rightarrow R_2$ なる環準同型写像が与えられているとき, $h.: \text{Spec}(R_2) \rightarrow \text{Spec}(R_1)$ なる写像が次のようにして自然に定義される。この $h.$ を h の同伴写像という。

$$h.(p_2) = p_1 \iff h^{-1}(p_2) = p_1$$

ここで $p_1 \in \text{Spec}(R_1), p_2 \in \text{Spec}(R_2)$ である。

このとき $h.^{-1}(D(a)) = D(h(a))$ が成り立つ。

したがって, $h.$ は連続写像になる。それ故, R_1 と R_2 が同型ならば $\text{Spec}(R_1)$ と $\text{Spec}(R_2)$ は同相である。しかし, その逆は成り立たない。

次の定理 1 は Zariski 位相の立場から、線形局所関数の単射性全射性について述べたものである。

定理 1 R を $\text{Spec}(R)$ が有限集合 かつ $\dim R = 0$ の可換環とする。 $f = \sum a_i x_i$ を R 上の線形局所関数とする。

このとき、次の各命題が成り立つ。

(1) f は R 上で全射である $\iff \cup D(a_j) = \text{Spec}(R)$ 。

(2) f は R 上で単射である $\iff \cup D(a_j)$ は $\text{Spec}(R)$ の分割。

系 1 I を R の任意イデアルとすると、次の各命題が成り立つ

(1) f が R 上で全射ならば f は R/I 上でも全射である。

(2) f が R 上で単射ならば f は R/I 上でも単射である。

(証明) $h: R \rightarrow R/I$ とする。 h^{-1} の連続性と定理 1 より成立。

系 2 J を R のすべての素イデアルの共通集合とし、 $I \subseteq J$ なる任意の J に対して、次の各命題が成り立つ。

(1) f が R 上で全射である $\iff f$ は R/I 上で全射である。

$\iff f$ は R/J 上で全射である。

(2) f が R 上で単射である $\iff f$ は R/I 上で単射である。

$\iff f$ は R/J 上で単射である。

(証明) $\text{Spec}(R)$, $\text{Spec}(R/I)$ および $\text{Spec}(R/J)$ はすべて同相となり、定理 1 より成り立つ。

注 1 $\text{Spec}(R)$ が有限集合で、かつ $\dim R = 0$ なる可換環のクラスは可換なアルティン環のクラスを真に含む。

補題 1 $a, b \in R$ に対して、次の (1) ~ (3) が成り立つ。

(1) $D(a+b) \subseteq D(a) \cup D(b)$

(2) $D(a) \cap D(b) = \emptyset$ ならば $D(a+b) = D(a) \cup D(b)$

(3) $D(a \cdot b) = D(a) \cap D(b)$

系 3 R を定理 1 で述べた環とすると、 R 上の線形局所関数 $f = \sum a_j x_j$ が単射になるための必要かつ十分条件は $\sum a_j$ が R の単元で、かつ $i \neq j$ ならば $a_i \cdot a_j$ はべき零元となることである。

(証明) 定理 1 と補題 1 より成り立つ。

定義 1 R 上の線形局所関数 f に対してある二つの係数を加えてスコープ幅を一つ縮めることを縮約という。

定理 2 R を定理 1 で述べた環とすると、 R 上の単射である線形局所関数は縮約に関して閉じている。

(証明) 定理 1 と補題 1 より成り立つ。

4. 線形セル環

定義 2 環 R がセル環とは R 上のすべてのセル構造オートマトンの並列写像が単射ならばそれは逆変換を持つときにいう。また, R が線形セル環とは R 上のすべての線形セル構造オートマトンの並列写像が単射ならばそれは逆変換を持つときにいう。従って, セル環は線形セル環である。以下では R は単位元を持つ可換環を表す。

定理 3 R のすべての素イデアルの共通集合を J で表す。この時次の各命題はすべて等価である。

- (1) R は線形セル環である。
- (2) R/J は線形セル環である。
- (3) $I \subseteq J$ なる任意のイデアル I に対して, R/I は線形セル環である。

系 4 $h: R_1 \rightarrow R_2$ を上への準同型写像とする。 $\text{Spec}(R_1)$ と $\text{Spec}(R_2)$ が同相のとき, R_1 と R_2 のうちどちらか一方が線形セル環ならば他方もそうである。

系 5 R が唯一の素イデアルを持てば R は線形セル環である。

系 6 R が $|\text{Spec}(R)| = 1$ を満足するとき, R と同相な可換環は線形セル環である。

注 2 Z_m を m 法とする剰余環とし, F を任意の可換体とする。このとき, $\text{Spec}(Z_2) \simeq \text{Spec}(Z_4) \simeq \text{Spec}(F)$ が成り立つ。

注 3 $\text{Spec}(R) = \{p_1, p_2\}$ とする。(ただし, $p_1 \subsetneq p_2$) このとき, $\text{Spec}(R) \not\simeq \text{Spec}(Z_6)$

定理 4 R_1 が $|\text{Spec}(R_1)| \leq 2$ を満足し, R_1 と R_2 が同相のとき, いずれか一方が線形セル環ならば他方もそうである。

定理 5 各 R_i が線形セル環ならば直積環 $\prod R_i$ もそうである。

系 7 各 R_i が $|\text{Spec}(R_i)| = 1$ のとき, 直積環 $\prod R_i$ は線形セル環である。

注 4 線形セル環のクラスはネーター環のクラスに含まれない。

次に線形セル環の行列環への応用を述べる。

R が単位元 1 を持つ線形セル環の場合，可換・非可換を問わず 1 スコープの線形局所関数において，次の性質が成り立つ。

性質 1 $f = ax$ に対して，次の各命題はすべて等価である。

- (1) f は R 上で逆変換を持つ。
- (2) f は R 上で単射である。
- (3) f は R 上で全射である。

定理 6 可換体 F 上の n 次の行列環 $M_n(F)$ は線形セル環である。

定理 7 $M_n(F)$ 上の線形局所関数 f に対して，次の各命題が成り立つ。ここで $V_n(F)$ は可換体 F 上の n 次元ベクトル空間。

- (1) f は $M_n(F)$ 上で逆変換を持つ $\Leftrightarrow f$ は $V_n(F)$ 上で逆変換を持つ。
- (2) f は $M_n(F)$ 上で単射である $\Leftrightarrow f$ は $V_n(F)$ 上で単射である。
- (3) f は $M_n(F)$ 上で全射である $\Leftrightarrow f$ は $V_n(F)$ 上で全射である。

系 8 V を可換体上の有限次元ベクトル空間とし， A を V から自分自身への線形変換の行列表現とする。このとき次の各命題はすべて等価である。

- (1) A は正則行列である。
- (2) A は単射である。
- (3) A は全射である。

(証明) 性質 1，定理 6，定理 7 より成り立つ。

参考文献

1. G.A.Hedlund, Endmorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems, Math. Systems Theory 3 1969
2. D.Richadson, Tessellations with local transformations, J. Com. System Sci 5 1972
3. 佐藤忠一, 線形セル構造オートマトンの代数的アプローチ I, II 数理解析研究所講究録 458 1982, 522 1984
4. 佐藤忠一, 無限環上の線形セル構造オートマトン, 科研費総合研究 A 「セル構造に基づく高度並列情報処理システムに関する総合的研究 A」 1990
5. 成田正雄, 代数的入門, 共立全書