

自動制御における絶対安定について

東北大学理学部 吉 沢 太 郎

自動制御における絶対安定の問題は 1944 年に、Lur'e と Postnikov により初めて系統立てて研究された。それ以来非常に多くの論文が現われた。その研究においては、Liapunov の second method が普遍的に用いられ、Liapunov の second method のあらゆる可能性が利用され、1950 年代の終りには、このあらゆる可能性が使いはたされた感があり、絶対安定に対する研究は一時それ程抬発でなくなり始めた。しかし 1959 年に Popov が新しい研究方法を展開した。その結果また新しい、興味深い研究が行われ、著しい成果が得られている。例えば Kalman, Yakubovitch, Aizerman 等で、正数微分方程式に対しては Halanay, Popov 等の研究がある。

現在、絶対安定性に関する主な研究分野は大きくわけて

- (a) Liapunov の second method による研究 (その後の Liapunov の second method の進展により、現在この方法による可能性はさらに広げられた)。
- (b) Popov の frequency response function を用いる研究
- (c) 上述の 2 つの研究における相互関係

詳細については

S. Lefschetz: Stability of nonlinear control systems,
Academic Press.

A.M.Aizerman and F.R.Gantmacher: Absolute stability of
regulator systems, Holden-Day, Inc.

を参照。

ここで、 x, b, c を n -vector, A を $n \times n$ constant matrix,

σ, ξ, ρ を scalar とし、vector, matrix の transpose は肩に " ' " をつけて表わすことにして、

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\ \frac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\ \sigma = c'x - \rho\xi \end{cases}$$

または

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\ \xi = \phi(\sigma) \\ \sigma = c'x \end{cases}$$

で表現される dynamic process を考察する。通常 (1) の場合は indirect control, (2) の場合は direct control と呼ばれるもので、direct control と indirect control は technical な特性すなわち、amplifier, servo-motor の存在しないか、存在するかによる control system の分類に関したもので、数学的には、indirect control を direct control の particular case として取り扱うことができる。

$\phi(\sigma)$ は control system における characteristic function

とよばれ、すべての σ に対して定義され、piecewise continuous,
 $\phi(0) = 0$ かつ additional condition を満たすものとする。ここで
 は簡明のため

(i) $\phi(\sigma)$ はすべての σ に対して continuous で、 $\phi(0) = 0$
 とし、additional condition としては、いろいろな場合が考えられる。
 その一つの場合は

(ii) $0 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k$, k : finite positive number または infinity.

$k = \infty$ のときはこの条件は $0 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma}$ または $\sigma\phi(\sigma) \geq 0$ で表わされる。
 また任意の real number $k_1, k_2 (k_1 < k_2)$ に対して

$$k_1 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k_2$$

の場合は、 $\phi_1(\sigma) = \phi(\sigma) - k_1\sigma$ とすれば、 $0 \leq \frac{\phi_1(\sigma)}{\sigma} \leq k_2 - k_1$ とな
 り (ii) の場合になる。

また特別な additional condition として、

$$(iii) \quad \sigma\phi(\sigma) > 0 \quad \text{for } \sigma \neq 0, \quad \int_0^{\infty} \phi(\sigma) d\sigma = \int_0^{-\infty} \phi(\sigma) d\sigma = \infty$$

が考えられる。

いま (2) における matrix A の characteristic root の一つが
 0 であるとする
 nonsingular linear transformation により (2) は

$$\frac{dz}{dt} = A_1^* z + s\xi, \quad \xi = \phi(\sigma), \quad \sigma = c^* z$$

に transform される。ここで A^* は第 n 列の要素はすべて 0 の行

列である。 c^* の第 n 番目の成分 c_n^* が 0 の場合は z の成分 $z_1, \dots, z_{n-1}$ までに対する system が得られ、この system は $z_1 = \dots = z_{n-1} = 0, z_n = \text{const.}$ という特別な解の族をもち、zero solution が asymptotically stable でないから我々の問題外になる。
 $c_n^* \neq 0$ ならば z_n は σ と $z_1, \dots, z_n$ で表わされるから結局、
 y, s, e を $(n-1)$ -vector, ρ を scalar, A_1 を $(n-1) \times (n-1)$ matrix として、(2) は

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_1 y + s\phi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} = e'y - \rho\phi(\sigma) \end{cases}$$

に transform される。(3) の代りに、しばしば u を $(n-1)$ -vector とし differential equation

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = A_1 u + s\xi \\ \frac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\ \sigma = e'u - \rho\xi \end{cases}$$

すなわち (1) の形のもの考える。(4) において、 $(u, \xi) \rightarrow (y, \sigma)$ への変換

$$y = A_1 u + s\xi, \quad \sigma = e'u - \rho\xi$$

を行うと、(3) に transform される。もし

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & s \\ e' & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば (3) と (4) は equivalent である。しかし $\Delta \neq 0$ は (3) において $\phi(\sigma) = h\sigma$, ($h \neq 0$) のとき、すなわち

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_1 y + sh\sigma \\ \frac{d\sigma}{dt} = e'y - \rho h\sigma \end{cases}$$

の $y=0$, $\sigma = 0$ が asymptotically stable であるための必要条件である。 $\Delta = 0$ のときは asymptotic stability が成立しないから、我々の問題外になる。

また $\det A_1 \neq 0$ ならば (4) は nonsingular transformation

$$y = A_1 u + s\xi, \quad \xi = \xi$$

により

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_1 y + s\phi(\sigma) \\ \frac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\ \sigma = f'y - \gamma\xi \end{cases} \quad f: (n-1)\text{-vector}, \gamma: \text{scalar}$$

に transform される。したがって、 $\Delta \neq 0$, $\det A_1 \neq 0$ のとき (3), (4), (6) はすべて equivalent である。

(3), (4), (6) の linear term に対する characteristic equation は

$$\lambda \det(\lambda E - A_1) = 0$$

したがって、 $\det A_1 \neq 0$ ならば、 $\det(\lambda E - A_1) = 0$ は zero root を持つことはできない。よつて (6) の linear term に対する characteristic equation は simple zero root をもつ。

このようにして、もし A の characteristic root の一つが 0 ならば、system (2) は (3) または (4) に transform される。さらに zero root が simple zero root ならば (2) は (6) に transform される。

A の characteristic root がすべて negative real part をもつとき、 A は stable であると言われ、このような場合は system は principal case といわれる。 A のどの characteristic root も real part は正でない場合は、system は particular case と言われ、この特別な場合として、zero root をもち、他の characteristic root は negative real part を持つ場合は (3) または (4) により discuss される。この zero root が simple root の場合はまた (6) を利用することができる。

A_1 の characteristic root はすべて negative real part をもつ場合は、上述の如く (3), (4), (6) はすべて同値で、この場合が通常 indirect control の system とよばれるものである。

system (1), (2) と (i), (ii) または (i), (iii) をみたす

characteristic function $\phi(\sigma)$ の class に関する absolute stability について考えてみる。たとえば

与えられた k に対して、(i), (ii) をみたす任意の $\phi(\sigma)$ に対して (2) の zero solution が globally asymptotically stable であるとき、system (2) の class は absolutely stable であると言われる。

(ii) における条件 $0 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k$ は principal case においてのみ意味がある。実際 particular case において、 $\phi(\sigma) \equiv 0$ はこの条件を満たすが、この場合 zero solution は asymptotically stable でない。したがって particular case においては、

$$(7) \quad 0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k \quad (\sigma \neq 0)$$

または

$$(7') \quad \varepsilon \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k \quad (\sigma \neq 0), \quad \varepsilon : \text{arbitrary small} > 0.$$

自然な問題として、いわゆる Aizerman's conjecture がある。すなわちすべての linear characteristic function $\phi(\sigma) = h\sigma$, ($0 \leq h \leq k$) に対する system (2) の asymptotic stability から、system の absolute stability が得られないか。このような conjecture は一般に正しくないことは Pliss により 1958 年に示された。

ここで少し歴史的なことにふれると、1944年に Lur'e と Postnikov が $k = \infty$ の場合について考え、初めて、 x に関する 2 次形式と $\phi(\sigma)$ の積分を加えた形の Liapunov function を用いた。Lur'e はさらに resolving equation とよばれる連立方程式を考え、Liapunov func-

tion が必要な条件を満たすように附加すべき条件について考察した。その後特に Yakubovitch はこの方法をいわゆる indirect control において発展させた。1951年に Malkin は direct control を indirect control の particular case として、direct control system を取り扱い Lur'e が考えたような Liapunov function の system の解に沿つての derivative が negative definite になる条件を Sylvester criteria を直接適用することにより求めた。しかし1960年に Rozenvasser は Malkin の条件は indirect control の場合にのみ意味があり、direct control に対しては意味がないことを指摘した。ごく最近の著しい結果は、Kalman, Yakubovitch の研究で、それは Lur'e の resolving equation の方法と Popov の frequency の方法の間の関係を理解するのに非常に重要なものである。

Liapunov の second method を用いて absolute stability を論ずるのに基本になるのは次に述べる Barbaskin-Krasovskü の定理と、二次形式に対する Liapunov の定理である。

Theorem 1. autonomous system

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = F(x)$$

において $F(x)$ は $\|x\| < \infty$ で連続、 $F(0) \equiv 0$. 次の条件を満たす連続微分可能な scalar function $V(x)$ が $\|x\| < \infty$ で存在するとする。その条件は

- 1° $V(x)$ は positive definite
- 2° $\|x\| \rightarrow \infty$ のとき $V(x) \rightarrow \infty$
- 3° $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(x) \leq -c(\|x\|), \quad c(r): \text{positive definite}$

このとき (8) の zero solution は globally asymptotically stable (asymptotically stable in the large) である。

一般に P を $n \times n$ matrix, $P = P'$ とするとき二次形式 $x'Px$ が positive definite ならば $P > 0$ で表わす。また $n \times n$ matrix Q のすべての characteristic root が negative real part を持つとき、 Q は stable であるといわれる。

Theorem 2. A が $n \times n$ stable matrix のとき、任意の $n \times n$ symmetric matrix C に対し、 $B = B'$, $A'B + BA = -C$ なる $n \times n$ matrix B が一意的に存在する。さらに $C > 0$ ならば $B > 0$ である。

ここで行列 M の determinant についての、ある関係式を lemma として述べておく。

Lemma 1. M を $(n+1) \times (n+1)$ matrix とし、

$$M = \begin{pmatrix} N & p \\ q' & \alpha \end{pmatrix}$$

とする。ここに N は nonsingular $n \times n$ matrix, p, q は n -vector, α は scalar とする。すると

$$\det M = (\alpha - q'N^{-1}p)\det N$$

これはつぎのようにして証明される。

$$\begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & p \\ q' & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & N^{-1}p \\ q' & \alpha \end{pmatrix}$$

一方

$$\begin{vmatrix} E & N^{-1}p \\ q' & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & N^{-1}p \\ 0 & \alpha - q'N^{-1}p \end{vmatrix} = \alpha - q'N^{-1}p$$

したがって

$$\begin{vmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N & p \\ q' & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - q' N^{-1} p$$

$$\begin{vmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det N^{-1} = \frac{1}{\det N} \quad \text{であるから}$$

$$\det M = (\alpha - q' N^{-1} p) \det N$$

が得られる。この関係は N, R をそれぞれ $n \times n, s \times s$ matrix, P, Q を $n \times s$ matrix, N は nonsingular のとき

$$\begin{vmatrix} N & P \\ Q' & R \end{vmatrix} = \det(R - Q' N^{-1} P) \det N$$

と拡張できる。

まず system (2) の particular case すなわち indirect control

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + b\xi \\ \frac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\ \sigma = c'u - \rho\xi \end{cases} \quad A: \text{stable}, \phi(\sigma) \text{ は (i), (iii) をみたす}$$

について考える。 system (4) について述べたように変換

$$(10) \quad x = Au + b\xi, \quad \sigma = c'u - \rho\xi$$

により (u, ξ) より (x, σ) に変換すると

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} = c'x - \rho\phi(\sigma) \end{cases}$$

まえに述べたように、 $\Delta = \begin{vmatrix} A & b \\ c' & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$ は $\phi(\sigma) = h\sigma$, ($h \neq 0$) のときの asymptotic stability の必要条件、いかえれば変換 (10) が nonsingular であるための必要十分条件である。いまの場合 A は stable であるから $\det A \neq 0$. よつて Lemma 1 の関係により

$$(12) \quad \rho \neq -c'A^{-1}b$$

(12) は $x = 0, \sigma = 0$ が (11) の唯一つの critical point であるための必要十分条件である。

任意の $C > 0$ に対して、 A は stable だから Theorem 2 により、 $A'B + BA = -C$ かつ $B > 0$ なる matrix B が存在する。この B に対して

$$(13) \quad V(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma$$

を考えると、 V は x, σ に関して positive definite, $\|x\| + |\sigma| \rightarrow \infty$ ならば $V \rightarrow \infty$. (11) の解に沿つての derivative を計算すれば

$$(14) \quad \begin{cases} -\dot{V} = x'Cx + \rho\phi^2(\sigma) + 2\phi(\sigma)d'x, \\ d = -(Bb + \frac{1}{2}c) \end{cases}$$

したがつて $\dot{V}$ が negative definite ならば Theorem 1 により $x = 0, \sigma = 0$ は globally asymptotically stable になる。 $-\dot{V}$

が positive definite になるための必要十分条件は Sylvester inequality により、 $C > 0$ であるから

$$\begin{vmatrix} C & d \\ d' & \rho \end{vmatrix} > 0$$

$\det C > 0$ であるから Lemma 1 の関係により

$$(15) \quad \rho > (Bb + \frac{1}{2}c)'C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}c)$$

したがって $C > 0$, (12), (15) が成り立てば absolute stability が結論される。しかし一般に LaSalle により

$$\underline{A \text{ が stable, } C > 0 \text{ ならば } d'C^{-1}d \geq -c'A^{-1}b}$$

が成り立つことが示された。よつて $C > 0$ と (15) から当然 (12)

(さらに強い条件 $\rho > -c'A^{-1}b$) が成り立つ。よつて、

Theorem 3. system (9) は

$$(16) \quad C > 0, \quad \rho > (Bb + \frac{1}{2}c')'C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}c),$$

$$A'B + BA = -C$$

ならば absolutely stable である。

一方 Yacubovich は (14) が positive definite であるための必要十分条件は

$$\underline{C - gg' > 0 \text{ なる real vector } g = \frac{d}{\sqrt{\rho}} \text{ が存在する}}$$

であることを示した。これは条件 (16) と同値である。

また Theorem 3 の条件の下では $\phi(\sigma)$ の満たす条件 (iii) において integral が divergent である条件なしで、すなわちただ条件

$$\sigma\phi(\sigma) > 0 \quad \text{for } \sigma \neq 0$$

をみたす characteristic function に対して absolute stability が結論できることが LaSalle により示されている。

いま上述と同じような考察を direct control (2) すなわち

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} = c'Ax + c'b\phi(\sigma) \end{cases} \quad \begin{array}{l} A: \text{stable,} \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (iii) をみたす} \end{array}$$

に対して行ってみる。形としては system (11) と同じである。Liapunov function (13) を考えると、いまの場合は (14) の代りに

$$(18) \quad -\dot{V} = x'Cx - 2(Bb + \frac{1}{2}A'c)'x\phi(\sigma) - c'b\phi^2(\sigma)$$

したがって (15) に相当するものは

$$-c'b > (Bb + \frac{1}{2}A'c)'C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}A'c)$$

しかしこれは LaSalle の inequality により $-c'b > -c'b$ という矛盾をおこすから意味のないものになる。これは $\dot{V}$ は

$$(19) \quad \dot{V} = (2Bx + \phi(\sigma)c)'(Ax + b\phi(\sigma))$$

とも書けるから $\dot{V}$ が positive definite でないことがわかるから、このように direct control を indirect control の特別な形として、indirect control に対する結果をそのまま適用すると間違いがおこる。

system (2) に対して absolute stability が成り立つためには、

原点が唯一つの critical point でなくてはならない。すなわち

$$Ax + b\phi(\sigma) = Ax + b\phi(c'x) = 0$$

を満たすのは $x = 0$ だけでなくてはならない。そこで次のことを仮定する。

(a) $Ax + b\phi(c'x) = 0$ はすべての admissible function $\phi(\sigma)$ に対して $x = 0$ のみを解に持つ。

(b) ある $C > 0$ に対して, $-c'b = (Bb + \frac{1}{2}A'c)'c^{-1}(Bb + \frac{1}{2}A'c)$ すると $-\dot{V}$ は positive semi-definite で、 x, ϕ の $n+1$ 次元空間の一次元部分空間においてのみ $\dot{V} = 0$ である。なんとすれば

$$-\dot{V} = (x - c^{-1}d\phi)'C(x - c^{-1}d\phi), \quad d = Bb + \frac{1}{2}A'c$$

であるから $x - c^{-1}d\phi = 0$ に対して $\dot{V} = 0$ 。一方 (19) により

$Ax + b\phi = 0$ のとき $\dot{V} = 0$ であるから、 $Ax + b\phi = 0$ のときそしてそのときのみ $\dot{V} = 0$ したがって仮定 (a), (b) から $-\dot{V}$ は x に関して positive definite になる。よつて absolute stability が結論できる。条件 (a) は $c'A^{-1}b \geq 0$ と equivalent になる。それは

つぎのようにして示される。 $\phi(\sigma) = h\sigma$ ($h > 0$) に対しても $x = 0$

のみが解であるから $(A + hbc')x = 0$ よりすべての $h > 0$ に対して、

$A + hbc'$ が nonsingular でなくてはならない。逆にすべての $h > 0$

に対して $A + hbc'$ が nonsingular とする。ある x_0 に対して、

$Ax_0 + b(c'x_0) = 0$ とする。 $0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma}$ ($\sigma \neq 0$) であるから、ある

$h_0 > 0$ に対して $\phi(c'x_0) = h_0 c'x_0$ すなわち $(A + h_0 bc')x_0 = 0$

よつて $x_0 = 0$ が得られる。このことは条件 (a) と $A + hbc'$ がすべての

$h > 0$ に対して nonsingular であることは equivalent であ

ることを示している。一方 $(E + hbc'A^{-1})A = A + hbc'$, $\det(E + hbc'A^{-1}) = 1 + hc'A^{-1}b$

よつて

$$\det(A + hbc') = (1 + hc'A^{-1}b) \det A$$

かつ $\det A \neq 0$ より $c'A^{-1}b \geq 0$ のときそのときのみすべての $h > 0$

に対して $\det(A + hbc') \neq 0$ であることがわかる。したがつて条件 (a)

と $c'A^{-1}b \geq 0$ の equivalent であることがわかる。以上のことから、

Theorem 4. 条件 (b) および $c'A^{-1}b \geq 0$ が成り立つならば、system. (17) は absolutely stable である。

また Aizerman, Gamtmacher は (18) の右辺に $\alpha\sigma\phi(\sigma)$ ($\alpha > 0$) を加えて、ひいて

$$\begin{aligned} -\dot{V} = & \{x'Cx - 2(Bb + \frac{1}{2}A'c + \frac{1}{2}\alpha c)'x\phi(\sigma) \\ & - c'b\phi^2(\sigma)\} + \alpha\sigma\phi(\sigma) \end{aligned}$$

を考え、これが x, ϕ に関して positive definite になる必要十分条件を (15) を得たと同様にして

$$(20) \quad -c'b > (Bb + \frac{1}{2}A'c + \frac{1}{2}\alpha c)'C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}A'c + \frac{1}{2}\alpha c)$$

を得た。

つぎに system (2) すなわち

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \sigma = c'x \end{cases} \quad \begin{array}{l} A: \text{stable,} \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (ii) をみたす} \end{array}$$

を考える。ここで Liapunov function として

$$(22) \quad V(x, \sigma) = x'Bx + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma \quad B > 0, \beta \geq 0$$

を考える。 $C > 0$ に対して B は $A'B + BA = -C$ を満たすものとする。

$\dot{V}$ を求めると

$$(23) \quad \dot{V} = -x'Cx + (2b'B + \beta c'A)x\phi(\sigma) + \beta c'b\phi^2(\sigma)$$

これが x, ϕ について positive definite にならないのは

$$\dot{V} = (2x'B + \beta\phi(\sigma)c')(Ax + b\phi(\sigma))$$

よりわかる。そこで $(\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma) \geq 0$ を加減して

$$\dot{V} = -S(x, \phi(\sigma)) - (\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma)$$

$$S(x, \phi(\sigma)) = -\dot{V} - (\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma)$$

$$= x'Cx - (2b'B + \beta c'A + c')x\phi(\sigma) + \phi^2(\sigma)\{\frac{1}{k} - \beta c'b\}$$

(Rozenwasser は $k = \infty$ の場合を考えた。この場合は $\sigma\phi(\sigma)$ を加減すればよい。したがって、もし $S(x, \phi)$ が positive definite ならば $v \leq -S(x, \phi)$ で Theorem 1 の条件をみたす。

$$\alpha' = b'B + \frac{1}{2}\beta c'A + \frac{1}{2}c', \quad r = \frac{1}{k} - \beta c'b, \quad y = \phi(\sigma)$$

とおくと

$$S(x, y) = x'Cx - 2d'xy + ry^2$$

したがって問題は $S(x, y)$ を x, y について positive definite にすることになる。

negative definite の derivative を持つ positive definite の Liapunov function V を作る上述の方法は S-method と言われる。

$r > 0$ のときは Sylvester inequality により (15) を導いたと同様にして $\begin{vmatrix} C & -\alpha \\ -\alpha' & r \end{vmatrix} > 0$ より $r > \alpha' C^{-1} \alpha$ が得られる。よつて、

$r > 0$ のとき $S(x, \phi(\sigma))$ が positive definite になるための必要十分条件は

$$(25) \quad \alpha' C^{-1} \alpha + \beta c' b < \frac{1}{k}$$

$r > 0$ の場合また別な方法として次の方法がある。 $S(x, y)$ はまた

$$(26) \quad S(x, y) = r(y - \frac{1}{r} \alpha' x)^2 + x' C x - \frac{1}{r} (\alpha' x)^2$$

と書ける。これよりわかるように $S(x, y)$ が positive definite になるための必要十分条件は

$$(27) \quad x' C x - \frac{1}{r} (\alpha' x)^2 = x' (C - \frac{1}{r} \alpha \alpha') x = x' Q x$$

が positive definite になることである。 $C - \frac{1}{r} \alpha \alpha' = Q$ より

$$(28) \quad C = Q + \frac{1}{r} \alpha \alpha'$$

Theorem 2 における C を Q および $\alpha \alpha'$ とした場合に得られる行列をそれぞれ D, F とする。すなわち

$$A'D + DA = -Q, \quad A'F + FA = -\alpha \alpha'$$

$A'B + BA = -C$ であるから (28) により $D = B - \frac{1}{r} F$ が得られる。

$$Db = Bb - \frac{1}{r} Fb, \quad Bb = \alpha - \frac{1}{2} \beta A'c - \frac{1}{2} c$$

であるから

$$(29) \quad \alpha = \frac{1}{r} Fb + \frac{1}{2} \beta A'c + \frac{1}{2} c Db$$

もし、 $Q > 0$ を (29) が real solution $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を持つように選らぶことができると、 C を (28) により定義すれば $\frac{1}{r} \alpha \alpha'$ は positive semi-definite であるから $C > 0$ 。これに対して B を定義する。すると $\beta \geq 0$, $r = \frac{1}{k} - \beta c'b > 0$ なる β に対する Liapunov function (22) は system (21) の absolute stability をあたえる。

$r = 0$ のとき、すなわち $\frac{1}{k} - \beta c'b = 0$ のときは

$$S(x, y) = x' C x - 2 \alpha' x y$$

は x, y について positive definite にならない。しかし $\alpha = 0$ ならば x について positive definite になりうる。このときは

$$S(x, y) = x' C x, \quad \dot{y} = -x' C x - \left(\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k} \right) \phi(\sigma)$$

この場合も、まえと同様にして $u = (u_1, \dots, u_n)$ に対し

$$C = Q + uu', \quad Q > 0$$

$$A'B + BA = -C, \quad A'D + DA = -Q, \quad A'F + FA = -uu'$$

とすれば $B = D + F$ したがって (29) に相当するものは

$$(30) \quad Fb + \frac{1}{2} \beta A'c + \frac{1}{2} c + Db = 0$$

となる。(29), (30) は $\alpha = \sqrt{r} u$ とすれば一つの式

$$\sqrt{r} u = Fb + \frac{1}{2}\beta A'c + \frac{1}{2}c + Db$$

で表わされる。これが Lur'e の resolving equation とよばれるものである。

以上述べたことはまとめると

Theorem 5. resolving equation が real solution を持つように β を選らぶことができると、system (21) に対して

$$V = x'Bx + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma, \quad \beta \geq 0, \quad B > 0$$

の形の Liapunov function が存在し、したがって system (21) は、absolutely stable である。

ここで興味ある結果は、

Theorem 6. (Pliss)

$$V = x'Bx + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma, \quad B > 0, \quad \beta \geq 0 \text{ given}$$

が system (21) に対する Liapunov function であるためには、任意の linear characteristic $\phi(\sigma) = h\sigma$ ($0 \leq h \leq k$) に対して V が

- 1° V は x について positive definite
- 2° $\|x\| \rightarrow \infty$ のとき $V \rightarrow \infty$
- 3° $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + b\phi(\sigma)) \leq -c(\|x\|), \quad c(r): \text{positive definite}$

をみたすことが必要である。もしこれらの条件がすべての linear characteristic $\phi(\sigma) = h\sigma$ ($0 \leq h \leq k$) に対して満たされるならば、

これらの条件はまた任意の nonlinear characteristic $\phi(\sigma)$ ($0 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k$) に対しても満たされる。このことは $k = \infty$ のときも成り立つ。

(23) から明かに $\dot{V}$ の definiteness は linear characteristic のみで定められねばならない。それは $\phi(\sigma)$ の任意の値は $0 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k$ により $\phi(\sigma) = h_0 \sigma$ ($0 \leq h_0 \leq k$) であるから、この事実により上の定理が成り立つことがわかる。

つぎに Popov による frequency method について少しふれておく。
system (2) すなわち

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\ \xi = \phi(\sigma) \\ \sigma = c'x \end{cases} \quad \begin{array}{l} A: \text{stable,} \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (ii) をみたす} \end{array}$$

を考える。E を unit matrix とし、matrix $\lambda E - A$ を A_λ で表わす。operator $\frac{d}{dt}$ を p で表わすと (31) は

$$px - Ax = b\xi, \quad c'x - \sigma = 0$$

p を形式的に一つの number として、

$$(32) \quad \begin{cases} (pE - A)x = b\xi \\ c'x - \sigma = 0 \end{cases}$$

より $-\sigma$ を解く。 $\begin{vmatrix} A_p & 0 \\ c' & 1 \end{vmatrix} = \det A_p$ であるから p が A の characteristic root でないときは

$$\det A_p \neq 0,$$

$$-\sigma = \frac{\begin{vmatrix} A_p & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}}{\det A_p} \xi$$

$\det A_p$ は p の n 次多項式、 $\begin{vmatrix} A_p & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}$ は p の $m(m < n)$ 次の多項式である。

$$\frac{\begin{vmatrix} A_p & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}}{\det A_p} = W(p) \quad \text{とおくと} \quad -\sigma = W(p)\xi$$

$W(p)$ は system の linear part の transfer function とよばれる。 ω を real number, $i = \sqrt{-1}$ として $W(i\omega) = \frac{\begin{vmatrix} A_{i\omega} & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}}{\det A_{i\omega}}$ は system の linear part の frequency response といわれる。

A は stable であるから $\det A_{i\omega} \neq 0$. Lemma 1 の関係式により

$$\begin{vmatrix} A_{i\omega} & b \\ c' & 0 \end{vmatrix} = (-c'A_{i\omega}^{-1}b) \det A_{i\omega}$$

であるから

$$(33) \quad W(i\omega) = -c'A_{i\omega}^{-1}b.$$

つぎに system (1) について考察する。 A は stable で、 $\phi(\sigma)$ は (i), (iii) をみたすとする。 $\det A \neq 0$ であるから (1) は (6) の形に変換される。文字を書きかえて変換された式を

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \frac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\ \sigma = c'x - \gamma\xi \end{cases} \quad \begin{array}{l} A: \text{stable,} \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (iii) をみたす} \end{array}$$

とする。 $\gamma = 0$ のときは direct control になるから $\gamma \neq 0$ とする。(12) を導いたときと同じ理由で $\gamma > 0$ が必要条件であること

がわかる。 $\gamma > 0$ であるから (34) は変換

$$x = x, \quad \sigma = c'x - \gamma\xi$$

により equivalent system

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} = c'Ax - \rho\phi(\sigma) \\ \rho = \gamma - c'b \end{cases} \quad \begin{array}{l} A: \text{stable,} \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (iii) をみたす} \end{array}$$

に transform される。このときは

$$\begin{aligned} -\sigma &= \frac{\begin{vmatrix} A_p & b \\ c'A & \rho \end{vmatrix}}{p \cdot \det A_p} & W(i\omega) &= \frac{\begin{vmatrix} A_{i\omega} & b \\ c'A & \rho \end{vmatrix}}{i\omega \cdot \det A_{i\omega}} \\ \begin{vmatrix} i\omega E - A & b \\ c'A & \gamma - c'b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} i\omega E - A & 0 \\ c'A & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i\omega E - A & b \\ c'A & -c'b \end{vmatrix} \\ &= \gamma \det A_{i\omega} + \begin{vmatrix} i\omega E - A & b \\ i\omega c' & 0 \end{vmatrix} \\ &= \gamma \det A_{i\omega} + (-i\omega c'A_{i\omega}^{-1} b) \det A_{i\omega} \end{aligned}$$

したがって

$$(36) \quad W(i\omega) = -c'A_{i\omega}^{-1} b + \frac{\gamma}{i\omega}$$

frequency response はまた次のようにして定義される。system の linear part すなわち $\frac{dx}{dt} = Ax$ の fundamental matrix e^{At} に対して

$$v(t) = c'e^{At}b$$

とし、 $v(t)$ の Fourier transform

$$F(v) = N(i\omega) = -c' \int_0^\infty e^{-A_{i\omega}t} dt \cdot b$$

を考えると

$$N(i\omega) = -c'A_{i\omega}^{-1}[e^{-A_{i\omega}t}]_0^\infty b = -c'A_{i\omega}^{-1}b$$

よつて $W(i\omega) = N(i\omega) + \frac{\gamma}{i\omega}$ で定義される。

ここで Popov の定理を述べておく。

Theorem 7. system (31) の absolute stability に対する十分条件は、すべての $\omega \geq 0$ に対して

$$(37) \quad \operatorname{Re}(1 + i\omega q)W(i\omega) + \frac{1}{k} > 0$$

が成り立つ finite real number が存在することである。

$k = \infty$ の場合は、ある $q \geq 0$ とすべての $\omega \geq 0$ に対し

$$(38) \quad \operatorname{Re}(1 + i\omega q)W(i\omega) > 0$$

さらに、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} i\omega W(i\omega) \neq 0$$

ならば system (31) は absolutely stable である。

Theorem 8. system (34) の absolute stability に対する十分条件は、 $\gamma > 0$ で、ある $q \geq 0$ およびすべての real ω に対して、

$$(39) \quad \operatorname{Re}(1 + i\omega q)W(i\omega) \geq 0$$

が成り立つことである。

Popov はまた system (2) において、 A が2つの zero character-

istic root をもつ場合に彼の方法を適用した。また Popov の方法は functional-differential equation に Halanay により適用された。

いずれの場合にも Popov の method には Fourier transformation が用いられるが証明は可成り elementary である。

たとえば条件 (39) の幾何学的意味はつぎのようである。

$$c'A_i^{-1}\omega b + \frac{Y}{i\omega} = s_1(\omega) + i\omega s_2(\omega)$$

とおくと、 $W(p)$ が p の rational function であるから $s_1(\omega)$, $s_2(\omega)$ は ω の real rational function である。すると (39) は

$$s_1(\omega) - q\omega s_2(\omega) \geq 0$$

real xy-plane 上で、直線 $L: x - qy = 0$ を考える。すると (39) は curve $: x = s_1(\omega), y = \omega s_2(\omega)$ は直線 L の下にあることを示している。

最後に Liapunov function と Popov の条件について述べておく。

まず Popov は次の定理を示した。

Theorem 9. もし system (34) の absolute stability が x, σ の quadratic form と $\beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma$ の和の形の Liapunov function $v(x, \sigma)$ により定められるならば、(39) をみたすような $q \geq 0$ が存在する。

また system (31) に対してはつぎのことが証明される。

Theorem 10. Popov の条件 (37) は S-method により作ることができる。

$$V = x'Bx + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma$$

の形の Liapunov function が存在するための必要十分条件である。

ここでごく最近の Kalman, Yacubovich の研究について述べておく。差える system は (35) である。Liapunov function として

$$(40) \quad V(x, \sigma) = x' B x + \alpha (\sigma - c' x)^2 + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma$$

を考えると $\dot{V}$ は

$$(41) \quad -\dot{V} = x' C x + \beta \rho \phi^2(\sigma) + 2d_0' x \phi(\sigma) + 2\alpha \gamma \sigma \phi(\sigma)$$

$$d_0 = -Bb - \left(\frac{1}{2}BA'c + \alpha\gamma c\right)$$

Popov の inequality (39) は Kalman によりつぎのように modify された。すなわち

$$(42) \quad P(\alpha, \beta, \omega) = \beta\gamma + \operatorname{Re}\{(2\alpha\gamma + i\omega\beta)(-c'A_i^{-1}\omega b)\} \geq 0$$

for all real ω and some pair α, β such that

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$$

明かに $\alpha \neq 0$ に対しては (39) が成り立つ限り equivalent になる。

A を stable matrix, $D > 0$ を symmetric matrix, $b \neq 0$, k を vector, $\tau \geq 0$, $\epsilon > 0$ を scalar とすれば、system

$$(43) \quad A'B + BA = -qq' - \epsilon D, \quad -Bb - k = \sqrt{\tau} q$$

の solution $B > 0$, q (vector) が存在するための必要十分条件は ϵ が十分小さくて

$$(44) \quad \tau + 2\operatorname{Re}(-k'A_{i\omega}^{-1}b) > 0$$

がすべての real ω に対して満たされることである。

$k = -Bb - d_0 = \frac{1}{2}BA'c + \alpha\gamma c$ とし (44) の左辺で、 $\tau = \beta\rho = \beta(\gamma - c'b)$ とおくと

$$(45) \quad +2\operatorname{Re}\left\{-\left(\frac{1}{2}\beta c'A + \alpha\gamma c'\right)A_i^{-1}\omega b\right\} = \tau + 2\operatorname{Re}(-k'A_i^{-1}\omega b)$$

$$\left(\frac{1}{2}\beta c'A + \alpha\gamma c'\right)A_i^{-1}\omega b = \frac{1}{2}\beta c'(i\omega E - A_i\omega)A_i^{-1}\omega b + \alpha\gamma c'A_i^{-1}\omega b, \quad \rho = \gamma - c'b$$

であるから

$$(46) \quad \tau + 2\operatorname{Re}(-k'A_i^{-1}\omega b) = P(\alpha, \beta, \omega)$$

が得られる。

するとつぎの定理が成り立つ。

Theorem 11. (40), (41) の V および $-\dot{V}$ がともにすべての x, σ と admissible ϕ に対して positive definite であるための必要十分条件は (44) および

$$(47) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0 \\ (b) \quad & \tau > 0 \text{ or } \tau = 0, d_0 = 0, \alpha > 0 \end{aligned}$$

が成り立つことである。これらの性質が成り立つときは system (34) は absolutely stable である。

この問題を考えるときは、一般性を失うことなしに、pair (A, b) に対する complete controllability と pair (c', A) に対する complete observability を仮定してよい。complete controllability に対する必要十分条件は、すべての t に対して $u'e^{At}b = 0$ になる vector u は $u = 0$ に限ることである。

complete controllability の必要十分条件よりわかるように、complete controllability と transfor function $W(p)$ と関係づけることができる。complete observability に対しても同様である。