

メソスケールからみたガラス系

大阪大学大学院 理学研究科 吉野 元¹

ガラス転移温度以下で起こる様々な興味深い現象、例えばエイジング効果、rejuvenation(若返り)-memory(記憶)効果などはどのようなメカニズムで起こっているのだろうか？こうした現象は巨視的な観測量に現れているのだが、巨視的な量はより小さなスケールで起こっているであろう様々な事象を平均化してしまったものしか見せてくれない。本稿では、統計力学的な手法で、準巨視的、メソスコピックなスケールにおいて、ガラス系で何が起こっているかを直接調べる試みの一つについて議論する。

1 はじめに：ガラス転移温度以下の世界

1.1 巨視的な観測

ガラス転移についての長い研究の歴史の中で、ガラス転移温度より低温の世界を直接研究することは最近まで比較的まれであった。ガラス転移温度以下では、巨視的なガラス系はどんなに長時間緩和させても系全体は決して平衡状態にはならず、非平衡状態にある。平衡状態の場合に比べ、何に注目してよいのかが明らかでないこと、方法論が確立していないこと、などが足踏みの主な理由であったと思われる²。ところが近年、この非平衡状態を特徴づけるために適切な巨視的物理量が何であるかの理解が理論的にも進み、ガラス転移温度以下に踏み込んで行く研究が活発になってきた。

1つのアプローチは、ランダムな初期条件からの緩和現象に着目したもので、一般にエイジング(aging)と呼ばれる。まず系をガラス転移温度以上の高温から転移温度以下にある時刻 $t = 0$ で急冷させたり、あるいはシアなど外力を掛けて系を一度流動化させてから外力を切ってランダムな初期状態を作る。その後、系を緩和(aging)させつつ、系の動的性質、例えばある周波数 ω での交流線形感受率 χ_ω の変化を経過時間(待ち時間) t_w のあらわな関数として調べるというものである³。高分子ガラスの分野では1970年代から系統的な実験が行われ[1]⁴、それがスピングラスでの

¹E-mail: yoshino@ess.sci.osaka-u.ac.jp

²例外的なのはスピングラス[2, 3]で、スピングラス相の「平衡状態」に関する研究を精力的に行う理論グループが1970年代からあり、多くの興味深い結果が平均場理論[4]、現象論的スケーリング(droplet)理論[5]、計算機シミュレーション[6]などによって得られている。平衡状態の知見は非平衡状態を理解するためにすぐに役立つとは限ないが、様々な示唆を与える。スピングラス[2, 3]は、フラストレート磁性体の一つで、磁性原子のスピンの間に強磁性、反強磁性相互作用が入り交じって複雑な競合(フラストレーション)を繰り広げ、平衡状態、非平衡状態ともにしばしば直感を裏切るような非自明な性質を示す。

³方法論として、ガラス系以外では、スピノダル分解などにおける秩序形成過程の研究[8]に近いと言えるかもしれない。ただし、スピノダル分解の秩序化など大きく違うのは系のフーリエ変換をとっても有意な情報は取れないことである。

⁴[1]では、チーズのエイジングまで調べられている！

実験を触発した [7]。理論家が多くが注目するようになったのは 1990 年代に入ってからであった [9, 10]。

エイジングと対をなす、もう一つの標準的なアプローチは、系にシアなどの外場を掛け続けることによって系を「少し流動化」させて非平衡定常状態を作り出し、そのレオロジー特性などを調べるといものである。

さらに、rejuvenation-memory 効果という現象 [7, 12] が発見され、注目されている。上述の標準的なエイジングの実験では、系の置かれている環境、例えば熱浴の温度、外場などは、 $t_w = 0$ 以降は一定に保たれる。これを少し変えて、ある待ち時間、例えば t_{w1} 後に系の熱浴の温度 T や外場 h を少し変えると、系の緩和が再初期化されて初期のランダムな初期状態に戻ってしまったように振る舞う現象が発見された。この現象は rejuvenation(若返り) と呼ばれる。中でも注目されたのは、スピングラスの場合、 t_{w1} で温度を「下げ」てもこの現象が起こるという、一見直観に反するような結果である。この場合、さらに、時間を t_{w2} だけ経過させた後、温度を元に戻すと、 t_{w1} まで緩和の「続き」が再開されるように見えるという、memory 効果が発見された。直感的には rejuvenation と memory は相容れない効果のように思われるので関心を呼んでいる。

1.2 動的平均場理論

1990 年代の後半に、スピングラスの動的平均場理論によって上のようなガラス相における非平衡状態、すなわちエイジングおよび弱く駆動された定常状態、についての解析的な理論が構築された [9, 10]。単に微視的なモデルが解けたという以上に、ガラス相における非平衡ダイナミクスに対する基本的な見方を提示したという意味でインパクトがあった。⁵

エイジングの場合、2つの時刻 t_w と $t = t_w + \tau$ の間の、例えば (スピングラスならば) 磁化 $m(t)$ の自己相関関数 $C(t, t_w) = m(t)m(t_w)$ が注目すべき量の一つである。もう一つはこれに共役な線形応答関数 $R(t, t_w) = \delta m(t)/\delta h(t_w)$ である。一つの標準的な実験方法として、待ち時間 t_w 後に外場 h を掛け始め、それから磁化 $m(t)$ を時間 t の経過とともに観測しつつける、というものがあるが⁶、このとき観測される磁化 $m(t)$ は線形応答の範囲内で $m(t) = h \int_{t_w}^t dt' R(t, t')$ と表せる。

後述するように、シアなど弱い外力で駆動する場合もこの2つの量を平行して、独立に調べべきである。

エイジングの場合、相関関数 $C(t, t_w)$ と応答関数 $R(t, t_w)$ は共に2つの時刻 $t = t_w + \tau$ と t_w の関数で、大きくわけて「準平衡領域」 $\tau \ll t_w$ と「エイジング領域」 $\tau \gg t_w$ で振る舞いが大きく異なる。

まず、「準平衡領域」ではこれらの量は時間差 τ の関数となっていて、時間についての並進対称性 time translational invariance (TTI) が成り立つ。平衡極限は τ を固定して $t_w \rightarrow \infty$ 極限を取って、 $C(\tau) \equiv \lim_{t_w \rightarrow \infty} C(\tau + t_w, t_w)$ のように定義でき、Edwards-Anderson の秩序パラメータ [11] を

⁵ 平均場理論が現実の全ての現象を説明することはあり得ないが、目をつけるべき重要な巨視的物理量が何であるかを明らかにしてしまう。その意味で、Edwards-Anderson[11] がガラス系の静的な秩序パラメータである Edwards-Anderson (EA) 秩序パラメータ q_{EA} を平均場理論を用いて発見したことに匹敵する成果であった。

⁶ zero field cooling (ZFC) と呼ばれる。

q_{EA} とすると $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) = q_{EA}$ である。大雑把に言って、準平衡領域の緩和は、 $C(t_w, t_w) = 1$ から⁷ q_{EA} までの緩和である。準平衡領域では、動的な揺動散逸定理 fluctuation dissipation theorem (FDT) $R(t, t') = (1/T)\partial C(t, t')/\partial t'$ がなりたつ。ここで T は熱浴の温度である。以下ボルツマン定数 k_B は簡単のため 1 とおく。

一方、「エイジング領域」 $\tau \gg t_w$ では TTI, FDT とともに破れている。ただし、そこには以下のような注目すべき規則性がある。まず、相関関数はエイジング領域で、 $C(t, t_w) \sim q_{EA} \tilde{C}(h(t)/h(t_w))$ のような、スケーリング則を示す。ここで $h(t)$ は時間 t の単調増加関数で、スケーリング関数 $\tilde{C}(y)$ は y の単調減少関数で $y \rightarrow \infty$ で 0 になる。これは実験で観測されるいわゆる待ち時間効果 (waiting time effect) をコンパクトに表している。つまり、待ち時間 t_w が長いほど、緩和が見かけ上遅くなるように見える [1, 7]。⁸ エイジング領域は $C = q_{EA}$ から 0 までの緩和である。同様のスケーリング則は応答関数 $R(t, t_w)$ についても成り立つ。

さらに、エイジング領域では、拡張された FDT $R(t, t') = \frac{1}{T_{\text{eff}}} \partial C(t, t')/\partial t'$ がなりたつ。ここで T_{eff} は有効温度と呼ばれるもので、あるパラメータ $X(T)$ を用いて $T_{\text{eff}} = T/X(T)$ と表せる。パラメータ $X(T)$ は、(熱浴の) 温度 T の単調増加関数で、後述の動的相転移温度 T_d 以下で $0 < X(T) < 1$ の範囲にある。したがって系は、「ゆっくりとした、温度の高い」熱浴を内蔵していることになる。この有効温度の物理的意味について活発な議論がされていて [13, 14, 15]、Edwards の粉体温度 [17] との関連も指摘 [16] されている。

2 つの時間の関数、例えば $A(t, t')$ があったとしよう。この関数の長時間極限の振る舞いを考えようとしたとき、2 つの時間 t と t' を無限大にもってゆくやり方は無数にある。上述のように、相関関数 $C(t, t')$ は準平衡領域で 1 から q_E まで、エイジング領域で q_{EA} から 0 まで緩和する、2 段階の振る舞いを示す。そこで動的平均場理論は、相関関数 $C(t, t')$ をある値 C に固定して $A(t, t')$ の長時間極限を考えるのが、有益だと教える。例えば FDT が破れているとき、 $R(t, t') = X(C(t, t'), t')/T \partial C(t, t')/\partial t'$ のように形式的に書く事はいつでもできるが、上のように C を固定して長時間極限をとると $X(C) = \lim_{t' \rightarrow \infty} X(C(t, t'), t')$ が定義できる。準平衡領域 $q_{EA} < C < 1$ で $X(C) = 1$ とすれば通常の FDT を含んだ形になる。

弱いシアなど外力で駆動して定常状態にした場合、TTI は当然なりたつ。一方、FDT の破れについては上と同じ一般化された FDT が成り立つことがわかっている。特に、上の有効温度が揺らぎの定理 (fluctuation theorem) に現れる”温度”になっている。[15]

平均場模型は大きく 2 つのグループにわけられる。1 つは Sherrington-Kirkpatrick (SK) 模型を代表とするもので、静的なガラス転移において連続的なレプリカ対称性の破れ full replica symmetry breaking (full RSB) を示すグループで、他方は 1 段階のレプリカ対称性 one step RSB (1 RSB) を示すグループである [4]。興味深いことに、FDT の破れをコントロールするパラメータ $X(C)$ は静的な転移でレプリカ対称性の破れをコントロールする Parisi の秩序パラメータ関数 $x(q)$ に極めて

⁷そうなるように規格化した

⁸実は極めて良く似たスケーリング則がスピノダル分解においても成り立ち、ドメインの長さを $L(t)$ として $C(t, t_w) \sim \tilde{C}(L(t)/L(t_w))$ となる [8]。後述の droplet 理論 [5] もこれと同様のスケーリング則を予想する。ただし、動的平均場理論における $h(t)$ をドメインの長さとして解釈することは難しい。

良く似た関数形をもっている。1RSB 系では $x(q)$ は $0 < q < q_{\text{EA}}$ である定数 $x(T)$ であるが、full RSB 系では連続的に変化する値をとる関数である。エイジング領域 $0 < C < q_{\text{EA}}$ での相関関数のスケーリング形について上述した $C(t, t_w) \sim q_{\text{EA}} \tilde{C}(h(t)/h(t_w))$ は、1RSB 系の場合である。full RSB 系の場合無限種類の $h(t)$ が必要になる。

構造ガラスなど、スピングラス以外のガラス系との密接な対応関係があるのは 1RSB 系の方である [18, 19, 10]。このグループの模型で動的相転移温度 T_d の上を調べると、モード結合理論と同じ相関関数の時間発展方程式が得られ、いわゆる α 緩和、 β 緩和の 2 段階緩和を示すことがわかる。 T_d はモード結合理論の臨界温度に対応し、そこでエルゴード性が破れる。 $T < T_d$ での準平衡領域、エイジング領域の 2 段階緩和は、この 2 段階緩和のなれの果てのようにも見える。静的な相転移温度 T_c はより低温にあり、後述のようにいわゆる Kauzmann 温度に対応し、 $0 < T < T_c$ でいわゆる構造エントロピー (complexity) が 0 になる。

上述したように動的平均場理論は、巨視的なガラス系の非平衡ダイナミクスにおける待ち時間依存性 (TTI の破れ) や有効温度の概念 (FDT の拡張) など基本的性質を明らかにし、注目された。ところが、モード結合理論と同じで、動的平均場理論には熱活性過程が入っていないため現実的でない、という批判がある⁹。また、後述の droplet 描像 [5] と比較すると、実空間でのイメージが掴みにくい。

1.3 メソスケール: droplet 仮説

スピングラスなどの系のメソスケールにおいて、droplet 励起とよばれるものがあると想定し、これが巨視的物理量の静的/動的性質までをも支配する、とする現象論的なスケーリング理論がある [5]。以下これを droplet 理論と呼ぶことにする。

Droplet 励起とは、例えば、スピングラスならば、ある大きさのクラスターが集団的にスピン反転する現象である。このクラスターの大きさ L は、原子間隔の程度の微視的スケール L_0 から巨視的スケールまでの中間的なさまざまな値、例えば $L_n = 2^n L_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)、をとりうる。それぞれのクラスター反転はエネルギー障壁を越える熱活性過程である、と仮定する。ここでエネルギー障壁の大きさは、ある指数 ψ を用いて $(L/L_0)^\psi$ のようにスケールする、と仮定される。その他、技巧的な考察を巧みにはさみつつ、この droplet と呼ばれる仮想的なメソスケールの object について様々な非自明な性質を予想する。

平均場理論と並んでこの現象論も、ガラス系の巨視的性質に関し、様々な興味深い予言をして

⁹この理論では系のサイズ (スピン数など) N を、最初から無限大にとっている。そうしないとある有限の緩和時間 $\tau(N)$ があって、それよりも長時間側ではエイジングは終了してしまうため、現実の巨視的なガラス系も、巨視的に大きいからこそエイジングが実験室の時間スケールでは止まらずに続くのである。さて、その状況では、平均場理論においては、全てのエネルギー障壁の大きさは無限大に発散してしまい、いわゆる熱活性型のダイナミクスは禁止される。従って、エネルギーの極小状態の間をホッピングしてゆくことによるスローダイナミクスが起こっているわけではない。逆にスローダイナミクスの起源は熱活性過程に限ったことではなく、位相空間が無限大次元 (よく漫画的に描く 1 次元ではなく) であるということに起因する自明でないスローダイナミクスの機構があるのだという積極的な反論もある [21]。平均場模型で熱活性過程を積極的に調べることは、 N を有限にすることによって原理的には可能である [22]。Bouchaud の trap model [23] は、位相空間での熱活性過程を仮定した平均場的 (1 粒子描像) な現象論的模型である。小田垣らの trapping-diffusion 模型 [24] はこれに似ているが、実空間での描像になっている。

いる。ダイナミクスに関しては、特にエイジングにおける種々のスケーリング則を導くことができる。エイジングは、ある意味でスピノダル分解の場合と同様に、ある種の(ガラス的な)空間秩序、すなわちあるランダムなスピンの凍結パターン、が時間 t とともに長さスケール $L(t)$ までひろがってゆく、として理解される。この過程は熱活性による droplet の反転によっているので、ドメインの長さ $L(t)$ の成長則は、 $L(t) \sim L_0[\log(t/t_0)]^{1/\psi}$ のように予想される。エイジングにおいて、2つの時間 t_w と t の関数となっている物理量は、一般に $L(t_w)$ と $L(t)$ を変数とするスケーリング関数によって表される。ドメインの成長則 $L(t)$ 、それを変数とした種々の物理量のスケーリング則については、シミュレーションによる詳しい検証がされ、ある程度支持されている [25]。

また、第2種超伝導体での vortex glass における輸送現象についてもスケーリング理論が展開されている [26]。

Droplet 現象論の導く予想の中で、特筆されるものの一つはカオス効果と呼ばれる現象であり、実験的に観測される rejuvenation(若返り)効果 [12] のメカニズムの主要な候補の一つである。カオス効果とは、スピングラスなどのガラス系の熱平衡状態が、温度や外場の変化など、環境のパラメータを変化させる摂動に対して繊細に反応し、無限小のパラメータ変化でも大域的にまったく異なったものに遷移しまう、ということである。droplet 理論 [5] によると、カオス指数 ζ とよばれる特徴的な指数があり、摂動の強さ δ (例えば温度変化の程度 ΔT や外場の変化の程度 δh) に依存したオーバーラップ長と呼ばれる特徴的な長さ

$$L_c(\delta) \sim \delta^{-1/\zeta} L_0 \quad (1)$$

があって、 $L_c(\delta)$ よりも大きな droplet 励起が起こっていくことによって全く異なった平衡状態(スピン系ならば、典型的なスピン配位のパターン)が形成される。言い替えると、ある与えられたスケール L では

$$\delta_s \sim (L/L_0)^{-\zeta} \quad (2)$$

程度の δ の変化で droplet の反転を次々に起こしてゆくことができる。様々な摂動に対するカオス効果が考えられるが、カオス効果はいくつかのユニバーサリティに分類され、同じユニバーサリティの中ではカオス指数 ζ は共通である。現在、この予言を検証する、研究が活発に行われ、支持する結果が得られつつある [27, 28]。また、rejuvenation(若返り)が上述のカオス効果によることを想定した場合、ある程度実験データを整合的に説明できることが示されている [29]。

Rejuvenation がカオス効果によるものとする、一方の memory 効果が説明できないように一見思われ、カオス効果は存在しない、あるいは存在しても rejuvenation とは無関係だろうとする考え方がある [12]。これに対して、非常に強いカオス効果があっても系の長波長の mode を通じて memory を動的に埋め込み/読み出しができることが示されている [30]。この動的 memory 効果の機構については、詳しい実験的検証 [31] によってある程度支持する結果が得られている。

Droplet 現象論はスピングラスとそれに関連する系で、現象論としてある程度成功していると見ることもできるが、様々な課題を抱えている。¹⁰ また、平均場理論のように微視的模型から順番

¹⁰ 例えば、詳しい数値解析の結果 [25]、前述の ZFC(Zero Field Cooling) のエイジングにおいて、線形応答の磁化

に計算してゆけば誰もが同じ結果にたどり着ける、というものではなく、かなりアクロバティックな推論を次々に受け入れることが求められる。そのため、誰もがすぐに納得できるものとは言いがたく、さらに徹底的な検証が必要とされる。特に、これまで行われてきた巨視的観測量を通じての「間接的」検証だけでなく、想定されているメソスコピックなスケールでの droplet の性質を直接的に検証することが求められている。また構造ガラスや、コロイド系など、より広範囲のガラス系についてどのように展開できるのか、良くわかっていない¹¹。

Droplet 現象論によれば、平均場模型が厳密になる無限大次元を除いて、レプリカ対称性の破れ (RSB) は起こらない [5]。関連して、Ising スピングラスの場合で言えば、磁場中相転移は有限次元では起こらないと予想され、最近の数値計算はこれを支持している [32]。そのためしばしば平均場理論と対極的な理論として位置づけられる。しかし、droplet 現象論の導く描像は、平均場理論と対応させると決してレプリカ対称 (RS) 解に近いわけではなく、むしろ RSB 解に近い。本稿で後で議論するようにメソスコピックなスケールを考えると、想像以上に深く対応している¹²。

Droplet のような、メソスケールにおける物理現象を、現象論に頼らず、直接解析する方法があれば非常に有益であろう。我々は、次節で具体的に紹介するように、メソスケールのガラス系の静的な外場応答には、平均場模型、有限次元の系を含めて良く似た階段的な応答が見られることに注目した。これは上記のカオス効果をメソスケールで見たものに他ならない。続く節 3 では、系のサイズ N が「有限」の平均場模型に基づいてこの現象を解析的に調べた最近の我々の結果 [37, 43] を紹介する。これまで、上記のカオス効果について平均場理論から何が言えるのか、判然としていなかったが、 N 有限の視点からみると、droplet 現象論の予想するカオス効果と本質的に同じものが平均場模型にも存在し、レプリカ対称性の破れと密接に関係することが明らかになる。

2 メソスケールでの階段的応答

スピン間の相互作用におけるフラストレーション、原子の運動を妨げる動的なフラストレーションなど、ガラス系の物理において本質的な役割を果たしている (と信じられている) フラストレーションに起因する現象を直接観察できるのはメソスケールであると考えられる。前節で review した巨視的 (熱力学的) 物理量では、これらが平均化された姿しか観察できない。本稿では以降、メソスケールでの外場に対する静的応答を統計力学的に解析する試みを議論する。

メソスコピック系の電気伝導度には magnetic fingerprint 磁気指紋と呼ばれる性質がある。電気伝導度が外部磁場の強さに依存して不規則に振動するが、そのパターンは個々のサンプルに固

$m(t)/h$ のとる値が、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{w \rightarrow \infty} m(t)$ と $\lim_{w \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} m(t)$ の 2 つの極限で異なることが強く示唆された。これは動的平均場理論 [9, 10] の予言するところであるが、標準的な droplet 現象論 [5] では説明できない。なお、この非可換性は、実験で観測される ZFC と FC (Field Cooling) 磁化の差としてスピングラス系一般で見えるもので、実験家がまず調べる性質である [3]。droplet 現象論では transient な効果として説明するが、上記の数値計算の結果はこれを支持しない。なお、上記の性質は線形応答に関するもので、磁場中でスピングラスが存在するか否か、という後述の問題とは一応独立している。

¹¹ただし、Moore らは [33] 構造ガラスと、磁場中に置かれたスピングラス [5, 32] との類似性を指摘し、Droplet 現象論に基づいた議論を展開している。

¹²不正確な言い方だが、レプリカ対称性が「まったく」破れていない、というよりも、「ぎりぎり」破れていないと言っても良いかもしれない [34, 27]。有限サイズ (メソスケール) では有限温度での RSB が起こっていることとほぼ同じで、熱力学極限で $T = 0$ の RSB に対応する、とも言える。

有で、再現性があるというものである。類似した現象がガラス状態にある有限サイズの系の外場に対する静的応答に見られ、いくつかの数値解析に基づく報告 [35, 36, 37] があるのでまず紹介する。また関連する実験 [38] について後で議論する。

2.1 スピングラス平均場模型

図 1 a) はスピングラスの平均場模型である Sherrington-Kirkpatrick (SK) 模型のあるサンプルでの磁化 m の磁場 h に対する応答である [35]。b) は最近我々が調べたその拡張版である $p = 3$ 体相互作用の模型の場合である [37]。これらの系のハミルトニアンは

$$H = - \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} J_{i_1, \dots, i_p} S_{i_1} \dots S_{i_p} - h \sum_i S_i \quad [J_{i_1 i_2 \dots i_p} J_{j_1 j_2 \dots j_p}]_{\text{av}} = \delta_{(i_1 i_2 \dots i_p), (j_1 j_2 \dots j_p)} J \sqrt{\frac{p!}{2N^{p-1}}} \quad (3)$$

と表せる。SK 模型は $p = 2$ の場合である。 N 個のイジングスピン $S_i = \pm 1$ ($i = 1 \dots N$) の間の相互作用ボンド $J_{i_1, \dots, i_p}$ は、平均 0、分散 $J \sqrt{\frac{p!}{2N^{p-1}}}$ の、互いに無相関な、正負ランダムな値をとっている。ある J_{ij} の組を決めると、1つのスピングラスの「サンプル」が決まる。以降、 $[\dots]_{\text{av}}$ はサンプルについての平均を表し、熱平均は $\langle \dots \rangle$ と表す。図 1 a), b) は、小さなある特定のサンプルでの、ガラス転移温度以下での、磁化 $m = (1/N) \sum_i \langle s_i \rangle$ の磁場 h 依存性である。

SK 模型 ($p = 2$) は連続的なレプリカ対称性の破れ (full RSB) のみを示すのに対し、 $p > 2$ では 1 段階の RSB (1RSB) の相を持つ¹³。 $p \rightarrow \infty$ の極限は Derrida の random energy model (REM) と等価な模型になることが知られている [39]。

見て明らかなように、磁場 h の関数として階段的な応答が次々に現れている。そのパターンは周期的ではなく、不規則性をもっている。異なるサンプルで測定すると、異なったパターンが得られる。磁化 m は熱力学量なので、定義によって自己平均的で、 $N \rightarrow \infty$ ではサンプルによらない曲線 (図の破線) に収束するはずである。どのようにその極限につながっているのでしょうか？

これらの系は多数の準安定状態を持っている。したがって予想されるのは、磁場の変化によって、準安定状態の自由エネルギーのレベル交差が起こって 1 次転移的なものがおこっているのではないか、ということである。しかし、 $N \rightarrow \infty$ では上記の理由によって階段は、表面上、姿を消してしまう筈である。そのようなものをしっかりと捉えるためにはどうすれば良いのであろうか？これらの間に答えるのが本稿の目標である。

2.2 Directed polymer in random media

図 1 c) は、directed polymer in random media (DPRM) [40, 41] と呼ばれる、ランダム媒質中の弾性紐の模型¹⁴のあるサンプルでの外場に対する応答を示したものである [36]。この系のハミル

¹³ $2 < p < \infty$ では、より低温側でさらに full RSB への転移がある

¹⁴ ここではスカラー場 ($N = 1$) をもつ「紐」($d = 1$) を例として用いたが、ランダム媒質中の弾性多様体の問題はより高次元 $d > 1$ のベクトル場 $N > 1$ に容易に一般化される。例えば、超伝導体の磁束格子ガラスならば $d = 3$ の系を考える事になる [26] ¹⁵ $N \rightarrow \infty$ 極限で、Gaussian Variational Method とよばれる平均場理論 [47] が厳密になり、スピングラス模型と同様、ガラス相は RSB を示す。

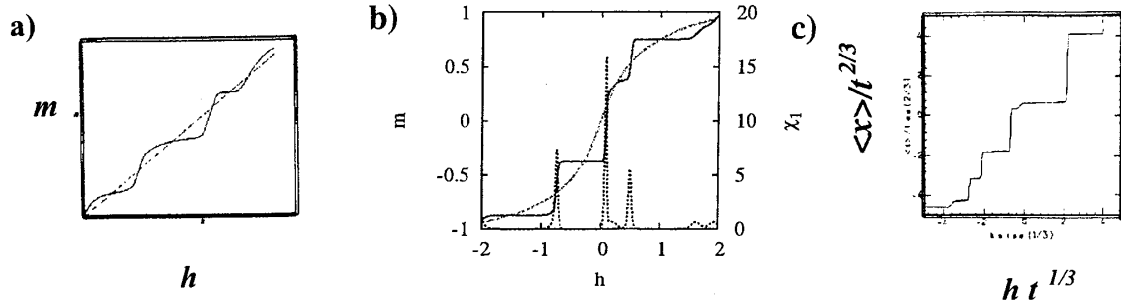


図 1: 有限サイズの系でみられる階段的応答 a) SK 模型のある小さなサンプル (スピン数 $N = 16$) での磁化 m の磁場 h に対する応答 [35]). 分配関数の exact enumeration による計算。破線はサンプル平均したものである。b) $p = 3$ 体相互作用模型のサンプル ($N = 16$) での同様の計算 [37]。スパイク状の線は線形帯磁率 χ_1 である。c) directed polymer in random media (DPRM) での弾性紐の tilt field h に対する応答 [36]。正方格子に定義した模型での転送行列法による計算。長さ $t = 1023$ の紐の一端を $x(0) = 0$ のように固定し、図はもう一方の端の位置 $\langle x(t) \rangle_h$ を示している。巨視的傾きは $\langle x(t) \rangle_h / t$ で与えられる。

トニアンは連続極限では

$$H_{[V,\phi]} = \int_0^t dz \left[\frac{\kappa}{2} \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + V(x(z), z) - h \frac{dx(z)}{dz} \right] \quad (4)$$

と表せる。ここでは弾性紐は z 軸上のスカラー場 $x(z)$ で表しているが、例えば、2次元強磁性体の界面や、2次元超伝導体の面内に束縛された磁束 [26] に相当する。 $V(x, z)$ はこの弾性紐に働く弱い、空間的に無相関のランダムピン止めポテンシャルで $\langle V(x, z) V(x', z') \rangle_{\text{av}} = 2D \delta(x - x') \delta(z - z')$ とする。 $V(x, z)$ を決めると、一つの DPRM のサンプルが決まる。この系 ($d = 1, N = 1$) は有限温度では常にガラス状態にある [45]。図 1 c) は、弾性紐を「傾ける」外場 tilt field h に対する系の応答を示したもので、SK 模型の場合と同様、明らかに階段的である。statistical tilt symmetry と呼ばれる対称性 [46, 41] により、ランダム平均した応答は h に対して線形になる。 $t \rightarrow \infty$ で、巨視的な傾き $\langle x(t) \rangle_h / t$ はサンプルによらずそこに収束するはずである。

図 2 に示したのは、あるサンプルにおける統計的な重みの分布の温度変化の様子である。各温度で、幾つかの準安定状態があることがわかる。Droplet 現象論的に言い直すと [5]、基底状態に対応する経路と、それをある長さにわたって遷移させた droplet 励起に対応する経路がある。各準安定状態 (経路) はある有限の太さを持っているように見える。これはエネルギー的に近い近傍の経路を含んだ局所的な熱揺らぎを表している¹⁶。温度変化とともに、支配的な経路が交代しているのがわかる。これは、各経路の周りの局所的な揺らぎによる (局所的な) エントロピーが、経路ごとに違っていて、温度を上げてゆくと、(エネルギー, エントロピー) が (高, 高) の経路に付随した自由エネルギーが、(低, 低) の経路に付随した自由エネルギーよりも低くなるレベル交差が起こっている事を示唆している。これは DPRM における温度カオス効果をメソスケールから観察したことに他ならない。この温度カオス効果は解析的/数値的に詳しく調べられ、droplet 現象論のスケージング則 (Eq. (1) など) がよく成立していることがわかっている [27]。¹⁷

¹⁶ 下記の量子系との対応では、古典的な経路の周りの量子揺らぎに相当する。

¹⁷ この系の分配関数は経路積分で表示できる。レプリカ法を用い、 n 個のレプリカ系してランダム平均をとると、ハー

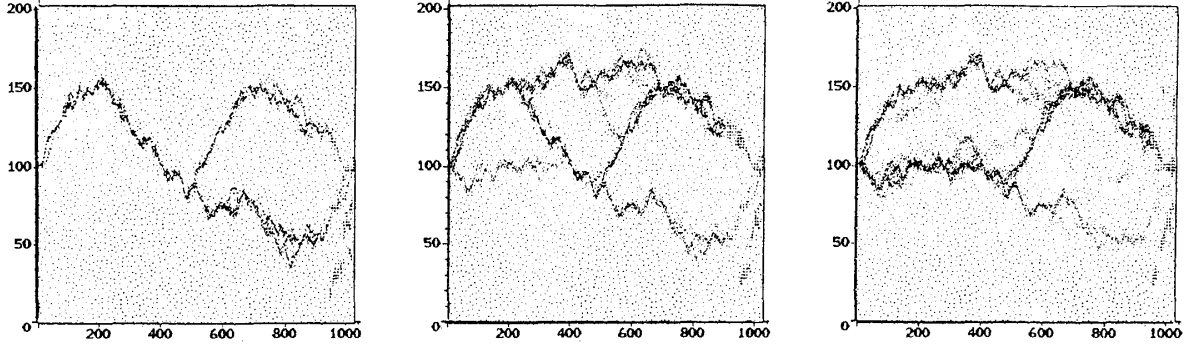


図 2: DPRM のあるサンプルにおける温度カオス効果の様子。2 次元格子の各格子点に $-1 < V < 1$ の値をとるランダムポテンシャルを定義し、SOS 模型 (solid-on-solid) 模型 (横軸 z に対し、変位は縦軸 x) によって格子紐を表す模型を用いている。 z 方向の長さ $N = 1000$ の系で、両端は $x = 100$ に固定している。転送行列法によって各格子点 (z, x) を紐が通っている確率密度 $P(z, x)$ を求め、その高低を白黒の濃淡で表している。各 z で $\sum_x P(z, x) = 1$ となるように規格化している。左から右へ、同じサンプルで温度が $T = 0.1, 0.3, 0.5$ の場合である。

2.3 階段的応答とそのサンプルゆらぎ

このような有限サイズにおける階段的応答はどのように特徴づけられるだろうか？今、ある外場 h に共役な示量変数 Y が階段的に応答するとしよう。我々は 3 つのスケール：階段の高さ δY 、階段の間隔 h_s 、また有限温度における階段の幅 h_w に注目した。(図 3 a)) これらの特徴的なスケールを捉えるためにどのような量を解析すべきであろうか？

ひとつ注目されるのは、図 1 b) のように、微係数が階段のところでスパイク的になっていることである。図 3 b) にあるように、線形感受率 χ_1 だけでなく、非線形感受率 $\chi_2, \chi_3, \dots$ も当然ながらスパイク的に振る舞う。これらの量は静的な揺動散逸 (FDT) の関係によって変数 Y の cumulant 相関関数 $\kappa_p(Y)$ と $\chi_k = (\beta^k/n!) \kappa_{k+1}(Y)$ のように関係づけられる。ここで cumulant 相関関数は $\kappa_2(Y) = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$, $\kappa_3(Y) = \langle Y^3 \rangle - 3 \langle Y^2 \rangle \langle Y \rangle + 2 \langle Y \rangle^3$, $\kappa_4(Y) = \langle Y^4 \rangle - 4 \langle Y \rangle \langle Y^3 \rangle + 6 \langle Y \rangle^2 \langle Y^2 \rangle - 3 \langle Y \rangle^4$.. などのように定義される。

今、ある特定のサンプルで観測を行っているとき、感受率が有意にあるかどうかは、測定している h 付近に「偶然」階段があるかどうか、によっていて、当然それはサンプルによる。階段の高さ δY 、階段の幅 h_w を用いると、階段のごく近傍では $\chi_k \sim \delta Y / (h_w)^k$ 程度の大きさを持つだろう。また階段が h_s 程度の間隔でランダムに並んでいるとすると、測定に用いている h が、階段付

ドコアの引力相互作用をする n 個のボーズ粒子の 1 次元量子系の経路積分表示 (t は虚時間) に帰着し、有用な情報が得られる [45]。レプリカ対称性は、ボーズ粒子の置換についての対称性に対応する。この 1 次元量子系の基底状態の波動関数は Bethe Ansatz を用いて厳密な形がわかっており、それは全ての粒子が参加する束縛状態になっており、レプリカ対称性は破れていない。Parisi はこれを幾つかのクラスターに分割し、それぞれのクラスター内で Bethe Ansatz 型の束縛状態が出来ているとし、それらの波動関数の直積で表した一つの全体の波動関数を構成してみた [34]。その結果、これも固有状態 (励起状態) になっていて、 $n \rightarrow 0$ 極限でそのエネルギーは基底状態に縮退することを見いだした。すなわち、レプリカ対称性は「ぎりぎり」破れていない。上記の温度カオス効果は、この RS 基底状態と RSB 励起状態のレベル交差と捉えられ、その考察から droplet 現象論と同じオーバーラップ長が導かれる [27]。

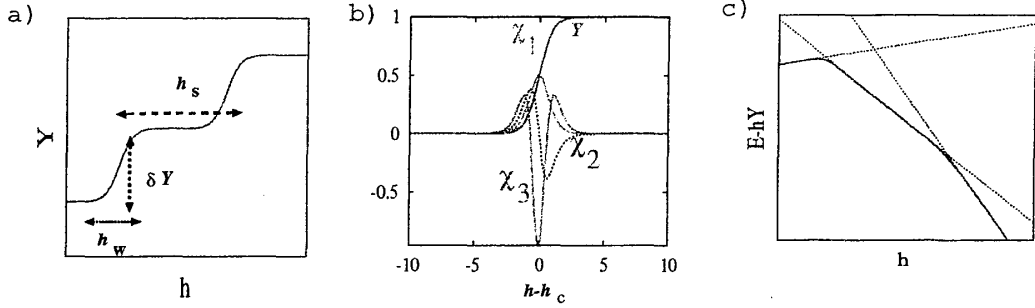


図 3: a) 階段の 3 つの特徴的なスケール b) 階段付近での線形、非線型感受率のふるまい c) a) のような階段的応答をもたらすレベル交差の例。この例では 3 つのレベルを考え、それぞれの $h = 0$ でのエネルギーを $E_1 < E_2 < E_3$ 、変数 Y の値を $Y_1 < Y_2 < Y_3$ とした。太線はある温度 T におけるこの系全体の自由エネルギーである。

近にある確率は h_w/h_s 程度となる。これらのことから、 χ_k の p 次のモーメントのサンプル平均は

$$[\chi_k^p]_{\text{av}} \sim \left(\frac{\delta Y}{(h_w)^k} \right)^p \frac{h_s}{h_w} \quad (5)$$

のようにスケールすると期待される。この関係式から、 $[\chi_k^p]_{\text{av}} \neq ([\chi_k]_{\text{av}})^p$ なので、FDT によってゆらぎから定義される感受率は熱力学的な感受率と異なり、自己平均的でないことが示唆される¹⁸。ここで注意すべきことは、FDT は自由エネルギー密度 (磁性体なら 1 スピンあたりの自由エネルギー) $f_N(h)$ が h について解析的であることを仮定し、外場の微小な変化 δh によって $f_N(h + \delta h)$ を Taylor 展開することによって得られる、ということである。一方、熱力学的な感受率は $\partial^n (\lim_{N \rightarrow \infty} f_N) / \partial h^n$ のように、熱力学極限を先にとった上での微係数である。 $[\chi_n^p]_{\text{av}} \neq ([\chi_n]_{\text{av}})^p$ は、 $\delta h \rightarrow 0$ と熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ が可換でないことを示唆している。

階段的応答は図 3 c) のように自由エネルギーの低い幾つかの状態がレベル交差を起こしていることに起因する可能性が強い。典型的な自由エネルギーギャップのスケールが ΔF_{typ} 、変数 Y の分散のスケールが ΔY とする。この場合、階段の幅 h_w 、間隔 h_s は

$$h_w \sim T/\Delta Y \quad h_s \sim \Delta F_{\text{typ}}/\Delta Y \quad (6)$$

したがってこれらの比は

$$\frac{h_w}{h_s} \sim \frac{T}{\Delta F_{\text{typ}}} \quad (7)$$

程度と推定される。

階段的応答がレベル交差によって起こるとすると、それは $T = 0$ ではなまりのない ($h_w = 0$) 理想的な階段関数 (の繰り返し) となるはずである。このとき、応答はもはや h の解析関数でなく

¹⁸SK 模型において、FDT で定義した線形磁化率が自己平均的でなく、階段的応答と関係することは推察されていた [35]。

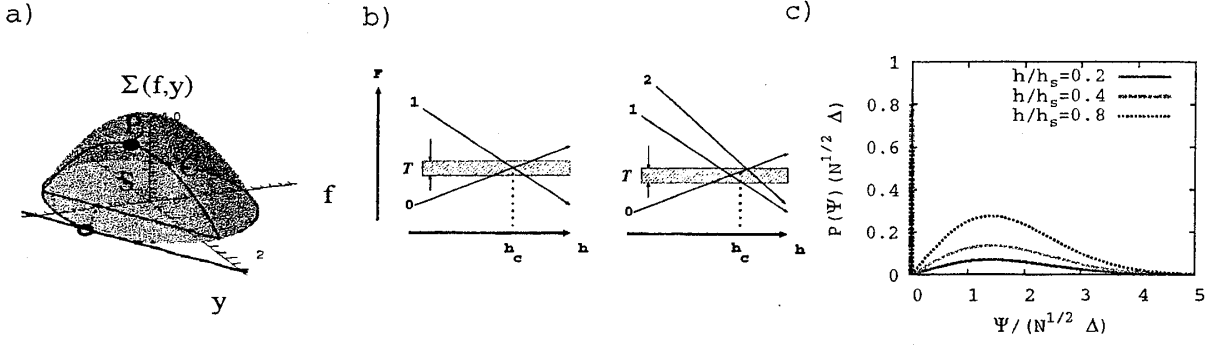


図 4: a) 一般化された complexity $\Sigma(f, y)$ [44, 43] b) ガラス相 $T < T_c(h)$ での例励起状態間のレベル交差 c) $T = 0$ での応答の変化分 ψ の分布関数。

なってしまうので、FDT は使えない。しかし、外場をある微少量 δh だけ増加させたとき、応答するサンプルがどの程度あるか、ということを実量的に評価できれば有益だろう。そこで $T = 0$ で外場を δh だけ変化させたときの Y の変化分 $\langle Y \rangle_{T=0, h+\delta h} - \langle Y \rangle_{T=0, h}$ の分布関数

$$P(\psi) = [\delta(\psi - (\langle Y \rangle_{T=0, h+\delta h} - \langle Y \rangle_{T=0, h}))]_{\text{av}} \quad (8)$$

も解析することにする。

3 平均場理論

前述したように、1 段階のレプリカ対称性の破れ (1RSB) を示す一群の平均場模型は、ガラス系に見られる特徴的な物理現象を実量的、半実量的に良く捉えていることがわかっている [18, 19, 10, 20]。これまでの研究は、巨視的なスケールを対象としているので当然ながら $N \rightarrow \infty$ での振るまいを解析している。これに対し、我々は N が 1 より十分に大きい有限の量である領域に興味があり、本節ではそこでの最近の我々の試み [37, 43] について紹介する。

3.1 準安定状態

1RSB を示す系、 p 体相互作用の平均場スピングラス模型 Eq. (3) で $p > 2$ の場合では、一般に、動的な相転移温度 T_d (mode coupling theory の T_c に相当 [18, 19, 10]) でエルゴード性が破れ、多数の準安定状態が出現する。これらは、ガラス系で inherent structure (IS) [42] と呼ばれるものに相当する。ある準安定状態 i の自由エネルギー密度 f の値を f_i 、外場 h に共役な変数 $y = -\partial f / \partial h|_T$ の値を y_i とする。温度 $T (< T_c) = 1/\beta$ 、外場 h のもとでの系の分配関数は形式的に

$$Z(T, h) = \sum_i e^{-\beta(f_i - h y_i)} \equiv \int df \int dy e^{N(\Sigma(f, y) - \beta(f - h y))} \quad (9)$$

のように表せる。ここで $\Sigma(f, y) \equiv (1/N) \log \sum_i \delta(f - f_i) \delta(y - y_i)$ は complexity と呼ばれる量である。通常、自由エネルギー密度 f に関する状態密度の対数を N で割ったもの $\Sigma(f)$ を考えるが、ここでは y も含めた 2 変数に一般化したものを導入している [44, 37, 43]。

個々の準安定状態は、TAP(Thouless-Anderson-Palmer) 方程式 [4] と呼ばれる状態方程式の解として具体的に得られる。例えば、Derrida の random energy model (REM) [39] は p -spin glass 模型 Eq. (3) の $p \rightarrow \infty$ 極限に相当するが、その complexity は

$$\Sigma(f, y) = -\frac{f^2}{2} - \frac{y^2}{2\Delta^2} + O(y^4) \quad (\Sigma > 0) \quad (10)$$

のように得られ、図 4 a) のようにお椀を伏せた形になっている [44, 43]。ここで y は 1 スピンあたりの磁化に相当する。REM 以外の一般には f_i や y_i は (T, h) に依存し、従って $\Sigma(f, y)$ も (T, h) に依存する。しかし詳細を除いて、図 4 a) のような形は一般の 1RSB 系に当てはまると考えて良い。微視的な粒子模型から inherent structure の complexity を計算する方法もある [20]。

3.2 巨視的な状態

メソスケールを議論する前に、この系の熱力学的な性質をまとめておこう。与えられた (T, h) で熱平衡状態は Eq. (9) の積分の鞍点 (f^*, y^*) で指定されるが、それは図 4 a) で次のように定まる。与えられた f' について $f' = f - hy$ 一定の平面 S と Σ の交わる曲線 C 上で Σ が最大になる点 $P = P(f')$ が定義できる。 f' 方向の接線の傾きが逆温度に等しくなる $\beta = \partial\Sigma/\partial f'|_{f'=f^*}$ ような点 $P(f' = f^*)$ を探すとそこが求める鞍点 (f^*, y^*) であり、系の(構造)エントロピーは $S = N\Sigma(f^*, y^*)$ となる。

ある外場 h のもとで温度を下げてゆくとある温度 $T_c(h)$ で鞍点は $\Sigma = 0$ 平面まで降り、それ以上動かなくなり、 $T < T_c(h)$ では構造エントロピーが 0、つまり静的な意味でのガラス相になる。この温度 $T_c(h)$ はいわゆる Kauzmann 温度に相当する。

$T_c(h)$ 以下のガラス相で、外場 h を変化させると熱平衡状態 (f^*, y^*) は図 4 a) のお椀のふち ($\Sigma = 0$) にそって変化する。このとき、メソスコピックなスケールでは何が起きているのだろうか? $T < T_c(h)$ では $\Sigma = 0$ であり、熱平衡状態に寄与する準安定状態の数はぐっと限られ、自由エネルギー f_i が非常に低い少数個の状態が系を支配しているだろう。このとき、図 4 b) のように外場 h の変化によって低励起状態の間でレベル交差が起これば、それに伴って変数 Y が階段的に変化すると想像される。これを、2.3 節の議論をヒントにしながら具体的に解析してゆく。

3.3 線形、非線型感受率のサンプルゆらぎの解析

レプリカ法を用いると、 k 次の(非)線形感受率 χ_k の p 次のモーメントのサンプル平均は、系の分配関数を $Z = Z(T, h)$ として、

$$[\chi_k^p]_{\text{av}} = \beta^{kp} \lim_{n_1, n_2, \dots, n_p \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial(\beta\delta h_1)^k} \frac{\partial^k}{\partial(\beta\delta h_2)^k} \cdots \frac{\partial^k}{\partial(\beta\delta h_p)^k} \frac{[Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} \cdots Z_p^{n_p}]_{\text{av}}}{n_1 n_2 \cdots n_p} \Big|_{\delta h=0} \quad (11)$$

から計算できる [43]。1RSB 解を用いると $p \rightarrow \infty$ 模型 (REM) の場合、generating functional は

$$[Z_1^{n_1} \cdots Z_p^{n_p}]_{\text{av}} \propto \sum_{\text{SP}} \exp \left[N(\Delta_{\text{eff}}^2) \frac{h}{T_c(h)} \sum_{r=1}^p \beta\delta h_r + \frac{N(\Delta_{\text{eff}}^2)}{2} \sum_{r,s=1}^p \beta\delta h_r \beta\delta h_s \sum_{\alpha=(r,1)}^{(r,n_r)} \sum_{\beta=(s,1)}^{(s,n_s)} \delta_{i_\alpha, i_\beta} \right] \quad (12)$$

のように表せる。¹⁹ここで p 個のレプリカのグループがあり、 l 番目のグループに属する n_l 個のレプリカを $(l, 1), (l, 2), \dots, (l, n_l)$ とラベルしている。 $\sum_{\text{SP}}$ は全ての 1RSB 解についての和であり、一つの 1RSB 解は、すべてのレプリカを m 個ずつのクラスターにわけ一つの分け方である。²⁰ $m = 1$ ならばレプリカ対称性は破れていないが、1 でなければ破れていることになる。 $\delta_{i_\alpha, i_\beta}$ はレプリカ α と β が同じクラスターに入っていれば 1、そうでなければ 0 を取る演算子である。

具体的に計算を実行すると [43]、次のような結果を得る。

$$[\chi_k^p]_{\text{av}} = \beta^{kp} \left[(N \Delta_{\text{eff}}^2)^{k/2} \right]^p f_{(k,p)}(m) \quad f_{(k,p)}(m) = c_{(k,p),1} m + c_{(k,p),2} m^2 + \dots \quad m = \frac{T}{T_c(h)} \quad (13)$$

十分低温では $f_{(k,p)}(m) \simeq c_{(k,p)}(T/T_c(h))$ となる。また m の多項式 $f_{(k,p)}(m)$ は因数分解すると $1 - m$ という項を持つ。従って $T \rightarrow T_c^-(h)$ でこのような強い異常は消失する。

上の結果は温度 T についての級数展開、すなわち低温展開の形になっていることが注目される。実際、これと係数を含めて正確に一致する結果が独立に低温展開によって得られ、物理的な意味が明確になる [43]。その概略を以下に説明する。

ガラス相 $T < T_c(h)$ では complexity $\Sigma(f, y)$ のお椀 (図 4 a)) のふち近傍の準安定状態が支配的に寄与する。簡単のために $h = 0$ 近傍の場合を考えると、Eq. (10) から、ふち ($\Sigma = 0$) 近傍で $\Sigma(f, y) = (f - f^*)/T_c - y^2/(2\Delta^2) + O((f - f^*)^2)$ である。これから、図 4 b) のような基底状態と第 1 励起状態との自由エネルギー差は指数分布

$$P(\Delta F) = (1/T_c) \exp(-\Delta F/T_c) \quad (14)$$

となることが示され [43]、 ΔF は典型的には T_c 程度であることがわかる。一方、変数 Y の値の差 δY は分散 $\Delta\sqrt{N}$ のガウス分布である。

これらの情報をもとに、図 4 b) に示したレベル交差を考えると、2.3 節で議論した階段的応答の特徴的な 3 つのスケール (図 3 a)) は

$$\delta Y \sim \Delta\sqrt{N} \quad h_w \sim T/\sqrt{N} \quad h_s \sim T_c/\sqrt{N} \quad (15)$$

であると推定される。これと Eq. (13) を併せると、十分低温 $T/T_c(h) \ll 1$ で予想されたスケーリング則 Eq. (5) (これに Eq. (6) の関係を用いたもの) が確かになりたっていることがわかる。

基底状態、励起状態の自由エネルギー差が T 程度に近づくと感受率が有意になる。図 4 b) の左図のような 2-level model で $T/T_c(h)$ の項が得られ、第 2 励起状態まで含めた 3-level model では $(T/T_c(h))^2$ まで正確な結果が得られることが実際に確かめられる [43]。このことは、例えば 3-level

¹⁹ Generating functional Eq. (12) は TAP 描像に基づく、complexity を用いた分配関数の表式 Eq. (9) を経由して、またこれを仮定しないで微視的な hamiltonian (例えば Eq. (3)) を基にしたカノニカルアンサンブルの分配関数から直接計算できる [37, 43]。 Δ_{eff} は外場 h に依存する。REM 以外の一般の系 (たとえば $p < \infty$) では、 $y_i = \chi_i h + O(h^2)$ のように個々の準安定状態自体も応答し、generating functional にはそのような "local" な応答に関する項が追加される。しかし、後者は本稿で議論する階段的応答には本質的な役割を果たさない。

²⁰ $\sum_{\text{SP}}$ は Parisi 行列 [4] に対して可能な全ての置換についての和、とも言える。熱力学量を計算する場合には、意識されないことであるが、Parisi 行列で表されるのは 1 つの RSB 解にすぎず、その任意の置換によって得られるもの全てが同じ統計的重みを持つ解である。これは hamiltonian 自体はレプリカ対称性を持っていることによる。磁場 0 のもとでの強磁性体で、正/負の磁化を持つ状態が同じ重みを持つことと同じである。

model では、図 4 b) の右図にあるように、3つのレベルが偶然温度 T 程度の幅に近づく、というまれなイベントを拾うことができる、ということを反映している。

上の結果から k 次の非線形感受率のオーダーは予想 Eq. (5) の通り、 $\chi_k \sim h_w^{-k}$ であり、外場を δh だけ変化させてときの応答 ΔY を FDT に基づいて δh で展開することは、

$$\Delta Y = N \sum_n \chi_n \delta h^n = N \sum_n c_n \left(\frac{\delta h}{h_w} \right)^n \quad (16)$$

のように $\delta h/h_w$ を微量量と見なして展開することだということがわかる。ここで δh をスケールしているのは階段の幅 h_w で、これは熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で 0 になる。すなわち、熱力学極限では FDT によって展開できる幅が 0 になってしまう。またこれは $T \rightarrow 0$ の極限でも 0 になり、FDT による展開は不可能になる。

3.4 $T = 0$ での応答の分布関数

$T = 0$ では、個々のサンプルにおける応答は非解析的になるが、微小な外場の変化 δh での応答の増分 $\psi = (\langle Y \rangle_{T=0, h+\delta h} - \langle Y \rangle_{T=0, h})$ の分布関数 Eq. (8) を、低温展開およびレプリカ法によって調べることができる。上記の 2-level model で調べるとその分布関数は

$$\begin{aligned} P(\psi) &= \tilde{p} \left(\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\Delta\sqrt{N}}, \frac{\delta h}{h_s} \right) \frac{1}{\Delta\sqrt{N}} \\ \tilde{p} \left(\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\Delta\sqrt{N}}, \frac{\delta h}{h_s} \right) &= \delta(\tilde{\psi}) \left(1 - \frac{\delta h}{h_s} \right) + \frac{\delta h}{h_s} \frac{e^{-\frac{\tilde{\psi}^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}} \tilde{\psi} + O \left(\frac{\delta h}{h_s} \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

のように求められる。ここで δh をスケールしているものは

$$h_s = T_c / (\Delta\sqrt{N}) \quad (18)$$

である。この分布関数を図示したのが図 4 c) である。同様に 3-level model を調べると $O(\delta h/h_s)$ までは一致する結果が得られる。このことから、 n -level model で $O(\delta h/h_s)^{n-1}$ まで正確な結果が得られると予想される。

上の結果 Eq. (17) で次のことが観察される。まず、スケールされた応答 $\tilde{\psi}$ が表れているが、 ψ をスケールしているのは予想された階段の典型的な高さ $\Delta Y = \Delta\sqrt{N}$ (Eq. (15)) である。また、分布関数は、基本的に $\psi = 0$ にあるデルタ関数と、 ΔY 程度のところにあって ΔY 程度の広がりをもつ独立した山からなることがわかる。後者の強度が $\delta h/h_s$ とともに増加してゆく。この結果から、 $\delta h/h_s$ が小さいときはほとんどのサンプルが応答せず、 h/h_s 程度の割合で存在するごくまれなサンプルにおいて階段の閾値 h_c が測定に用いている外場 h にたまたま近く (図 4 b))、微小な変化 δh で閾値を越えて ΔY 程度の高さの階段的応答を示す、と理解される。上の結果も、2.3 節で議論した階段的応答の特徴的なスケール h_s が Eq. (15) であることを支持している。

この分布関数、従ってその全てのモーメント $[\langle \psi^p \rangle]_{\text{av}}$ は $\delta h/h_s$ の級数で表せることが注目される。 h_s は h_w と同様、 $N \rightarrow \infty$ で 0 になってしまう (Eq. (15))。したがって、この分布関数も FDT による展開 Eq. (16) と同じようにメソスケールでの応答を表している。

メソスケールでの応答についての級数展開として $\delta h/h_w$ によるもの (FDT) と $\delta h/h_s$ によるもの、という2種類の異なるものが得られたことは $\delta h \rightarrow 0$ の極限と $T \rightarrow 0$ の極限が可換でないことを示唆している。²¹ 上の結果 Eq. (17) は、レプリカ法での generating functional Eq. (12) から導くことができるが [43]、そのとき注意することは $m = T/T_c \rightarrow 0$ の極限を先にとることである。

上の結果から階段の間隔 h_s は $N \rightarrow \infty$ で0になることが結論される。つまり、有限の外場の変化によって、無限回のレベル交差が起こる。1RSB 模型では一つ一つの準安定状態は互いに全く無相関である [18, 19, 10]。したがって、droplet 現象論が予想する Eq. (2) と同様のカオス効果が 1RSB 系で起こることが示された。この対応関係についてはさらに次に議論する。熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ では Y の外場に対する応答が、サンプルに依存しない滑らかな関数に収束する (図 1) が、その背景にこのカオス効果が隠れているということは興味深い。

3.5 Droplet 現象論との対応

これまで、1RSB の平均場模型の枠組の中で、メソスケールにおけるガラス系階段的応答について論じてきた。得られた線形、非線型感受率のサンプルゆらぎに関するスケーリング則 Eq. (13)、 $T = 0$ における応答のサンプルゆらぎの分布則 Eq. (17) と同じスケーリング則は droplet 現象論 [5] の描像でも導くことができる [43]。

平均場模型では準安定状態同士がレベル交差をしていたが、これは基底状態と、そこから droplet 励起した励起状態とのレベル交差に対応する。 d 次元空間における系の大きさ L の droplet ならば、 $N = L^d$ である。

1RSB の平均場理論では、自由エネルギーギャップ ΔF の典型的なスケールは T_c で、その分布関数 $P(\Delta F)$ は Eq. (14) のような指数分布となっていた。重要であったのは $P(0) > 0$ という点で、そのために無限小の自由エネルギーギャップ ΔF を持つサンプルが有限の確率 $\Delta F/T_c$ の確率で存在した²²。そのため、どんなに低温でも熱揺らぎが0でないまれなサンプルが有限の割合で存在し、Eq. (13) には T/T_c の項がある。同様に、どんなに微小な外場 δh の変化に対しても有限の割合のまれなサンプルで階段的応答が起こり、Eq. (14) には $\delta h/h_s$ の項がある。

Droplet 現象論には $P(0) > 0$ が「仮定」として埋め込まれている [5]。違いは分布関数を指数関数と限定しない (現象論では決められない) ことと、典型的なエネルギースケールが T_c ではなく、droplet の大きさ L に対して $\Upsilon(L/L_0)^\theta$ のようにスケールするものである、という点である。ここで θ は剛性指数と呼ばれるものである。したがって、1RSB 平均場理論で現れるスケールされた温度 $m = T/T_c$ (1RSB クラスターのサイズ Eq. (13)) が $T/\Upsilon(L/L_0)^\theta$ に置き換えられ、実効的な温度が droplet の大きさ L とともに下がってゆき、より“RSB 的”になる、とも言える。

²¹ 後述するが、類似したことが、ランダム媒質中の弾性多様体の問題、またそれに関連した Burgers 方程式系の乱流の問題でも存在し、興味深い。

²² これはマージナルな状況だが、full RSB の系でマージナル安定性と呼ばれているものとは区別すべきものである。後者は準安定状態における Hessian が 0 固有値を持ち、準安定状態そのものがパラメータによって出来たり消えたりする不安定性を差す。1RSB 系の平衡状態を支配する準安定状態では Hessian の固有値は全て正で、そうした不安定性はないことがわかっている [10, 19]。

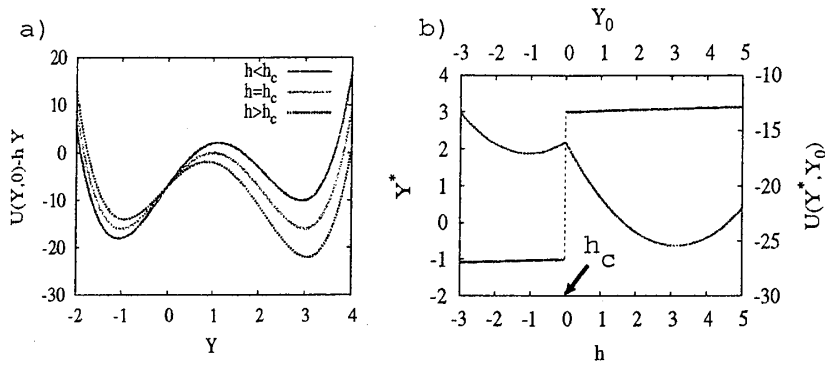


図 5: a) 外場 $h = Y_0/\kappa$ によるポテンシャル $U(Y, 0) - hY$ の変化の例。ある閾値 h_c でレベル交差がおこる。b) エネルギーが最小になる点 Y^* とそのエネルギー $-U(Y^*, Y_0)$ の外場による変化。

また、平均場模型では、階段の高さの δY は $\delta Y \Delta \sqrt{N}$ としたが、これを適当な指数 α を用いて $\delta Y \sim \Delta(L/L_0)^\alpha$ と一般化しよう。結局 Eq. (15) は

$$\delta Y \sim \Delta(L/L_0)^\alpha \quad h_w \sim T/L^\alpha \quad h_s \sim L^{-\zeta} \quad (19)$$

となる。ここで ζ は Eq. (1) および Eq. (2) に現れるカオス指数に他ならず、

$$\zeta = \theta - \alpha \quad (20)$$

である。これが正ならば $L \rightarrow \infty$ で階段の間隔は 0 になる。

以前に示した図 4 c) に示されているように、階段的応答は $\delta h/h_s$ が小さいうちはまれなイベントとして起こる。まだ、カオスというほどの大きな変化は起こっていないが、一部のサンプルで応答が始まっているという状況である。この領域 (weakly perturbed regime[27]) が、巨視的系における rejuvenation の、短時間領域で起こっている現象に対応している可能性がある [29]。

3.6 関連する問題

3.6.1 ランダム媒質中の弾性多様体における実効的な力の特異性

次のような模型を考える。1次元空間のある座標点 Y にある一つの「粒子」が、ばね定数 κ のばねにつながれ、ばねの他方の端は Y_0 にあるとする。またこの空間にはランダムポテンシャル $E(Y)$ があり、その空間相関は短距離とする。系の分配関数、エネルギーは次のように与えられる。

$$Z(Y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dY}{\sqrt{2\pi/(\beta\kappa)}} e^{-\beta U(Y, Y_0)} \quad U(Y, Y_0) = \frac{\kappa}{2}(Y - Y_0)^2 + E(Y) \quad [E(Y)E(Y')]_{\text{av}} = Nc(|Y - Y'|) \quad (21)$$

2.2 節で見た DPRM は $d = 1$ 次元 (ひも) であったが、これを $d = 0$ 次元 (点) にしたもので、最も簡単なランダム媒質中の弾性多様体の問題であり、'toy model' などと呼ばれる [46, 48]

この系は、前節 3 で議論した平均場模型と次のように対応する。まず、準安定状態のラベル $i = 1, 2, \dots$ を Y の値でラベルし直す。次に、 Y を空間座標と読み直す。変数 Y はガウス分布に

従って準安定状態ごとに様々な値をとっていたが、そのことは entropic なばねが存在している、と読みかえることができる。(自由) エネルギー F_i は Y_i と相関がなかったが、それは空間的に無相関なランダムポテンシャル $E(Y)$ によって表せる。

ばねの一端を引っ張って Y_0 を変化させてゆくことを考える。これは、 Y に共役な外場 h を変化させることに相当する (図 5 a))。温度が十分低いとすると、系は基底状態の変化にほぼ追随し、ある閾値 h_c で基底状態と励起状態とのレベル交差がおこる。レベル交差するところで有効ポテンシャル $-T \log Z(Y_0) \sim U(Y^*, Y_0)$ は cusp を持ち、 Y は階段的に応答する。(図 5 b)) これはこれまで議論してきた階段的応答 (図 1、図 3) と同じ現象である。

有効ポテンシャルの cusp があるところで、系が他に及ぼす実効的な力

$$f(Y_0) \equiv -T \frac{\partial \log Z(Y_0)}{\partial Y_0} \sim \frac{\partial U(Y^*, Y_0)}{\partial Y_0} \sim \kappa(Y^* - Y_0) \quad (22)$$

は不連続に変化する [48]。図 5 b) の例では Y_0 が cusp の左にあるときは左の方にある安定点に引き込もうとする力を発生し、cusp の右では右のほうにある安定点に引き込もうとしている。

有限温度では cusp の頂点のごく近傍は「なまって」いる。そのなまりの幅はこれまで議論した階段的応答での階段の幅 h_w (Eq. (15)) に対応する。3.3 節において 1RSB の平均場理論の枠組のなかで解析した線形、非線型感受率のサンプル揺らぎは、この cusp の頂点近傍の様子を反映している、と言える。すなわち、線形、非線型感受率の異常なスケーリング Eq. (13) は、温度 T の低下とともに cusp が鋭くなってゆくことを示唆する。cusp の間隔は、階段の間隔 h_s (Eq. (15)) に対応する。3.4 節で、 $T \rightarrow 0$ の極限と $\delta h \rightarrow 0$ の極限が可換でないことをみたが、その意味は今の問題でも明らかである。すなわち、 $T > 0$ では頂点付近は常に微分可能で、一回微分は 0 である。ところが、 $T \rightarrow 0$ を先にとると頂点は完全に尖ってしまい、一回微分は 0 でなく、cusp の頂点の両側でその値が不連続になる²³。

3.6.2 Burgers 乱流での衝撃波

上の模型 Eq. (21) はさらに、Burgers 方程式系の乱流の問題 [52] に map できることが知られている [48]。次のような変換 (Cole-Hopf 変換)

$$v(Y_0, t) = -\beta \frac{\partial \ln Z(Y_0)}{\partial Y_0} \quad \beta = \frac{1}{2\nu} \quad \kappa = \frac{1}{t} \quad (23)$$

を行うと、Eq. (21) から時刻 t , 位置 Y での速度場 $v(Y, t)$ についての Burgers 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial Y_0} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial Y_0^2} \quad v(Y, 0) = \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \quad (24)$$

を得る。ここで ν は粘性係数である。元の問題のランダムポテンシャル $E(Y)$ は、時刻 $t = 0$ でランダムな速度場を与えることに相当している。

²³このような実効的な力の不連続性は、ランダム媒質中の弾性多相体の物理を理解する鍵であることが、認識されつつある。特に functional renormalization group と呼ばれるくりこみ群の方法では、この力の相関関数 $[f(Y)f(Y')]_{\Lambda_\nu}$ の $Y \rightarrow Y'$ における非解析性の解析に焦点が置かれる [49, 50, 51]。functional RG では cusp のなまった領域を、thermal boundary layer と呼ぶ [50]。

Eq. (23) から明らかなように、速度場 $v(Y_0)$ は toy model での実効的な力 $f(Y_0)$ (Eq. (22)) と同じである。従って、cusp における実効的な力の不連続性は、Burgers 方程式での速度場の不連続性と同じであり、これは乱流のいわゆる衝撃波 (shock) [52] に他ならない。本稿で議論した階段的応答での階段の間隔 h_s 、あるいは 3.6.1 節で議論した弾性多様体の有効ポテンシャルの cusp の間隔 h_s は、ここでは衝撃波の間隔である。

Burgers 方程式での乱流の統計理論とランダム媒質中の弾性多様体の問題との関係は平均場理論の範囲内で既に [53] で詳しく論じられている。本稿で議論したガラス系一般のメソスケールにおける静的な階段的応答が、ランダム媒質中の弾性多様体の問題との関係していることから (3.6.1 節)、共通した問題がより広い分野で存在することになる。

4 最後に

メソスケールでの階段的応答について、本稿ではその静的な側面を議論した。熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で、階段の間隔は 0 になるので、巨視的観測では観測不能なものである。このようなものに対して統計力学的な解析ができたのは、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ を取る前に、無限小の外場変化 $\delta h \rightarrow 0$ の極限を取ったからである。これは熱力学的な応答を考えるととは極限をとる順番が逆である。また、 $\delta h \rightarrow 0$ と $T \rightarrow 0$ の非可換性からも重要な情報が得られることを見た。マクロにカオス効果として現れるものが、メソスケールでは「ガラスらしい」、ガタガタした階段的応答になっている。

極めて示唆に富む、興味深い実験 [38] があるので紹介する。これはメソスコピックなスケール $O(10\text{nm}^3)$ の金属スピングラス CuMn のサンプルを用い、その電気抵抗のノイズを測定したものである。まず、一定の温度、磁場のもとで、ノイズは「秒」の時間スケールで間欠的に大きく変化することが観察された。ノイズは十分定常で、このメソスケールの系は、ほぼ平衡状態になっていることが示唆された。間欠的なノイズの変化はスピンの集団的な反転を反映していると推定されるが、UCF (universal conductance fluctuation) の理論を用いると、ノイズの強度から一度に 10^4 程度のスピンの集団が協同的に反転していると推定された。さらに、ノイズのパターンから、ごく少数の状態の間をこの集団的なスピン反転によって遷移していることが示唆された。それぞれの状態に滞在している時間の比は、それぞれの状態のボルツマン重みの比になっていると考えられる。興味深いのは、磁場を 100 ガウス程度のスケールで変化させると、この比が有意に変化することがわかったことである。この系の $T_c \sim 30\text{K}$ と $N = 10^4$ であることを Eq. (15) に用いると $h_s \sim 100$ ガウスと見積もられ、実験結果と整合している。

一方、初めに紹介したように、巨視的スケールではガラス系は常に非平衡状態にある。²⁴ 上のメソスコピックなサイズのスピングラスの場合でも、磁場を早めのスピードで掃引すると系は非平衡状態になると考えられる。その状況では系の応答 (仕事) は試行によって揺らぐはずで、その分

²⁴ 対象とする系が平衡状態にあるか、非平衡状態にあるかは観測する時間スケールと系のサイズに強く依存するだろう。秒、時間、日といった現実実験可能な時間スケールで起こっているのは、スピングラス系でせいぜい $N = 10^4 - 10^6$ 程度のメソスケールのスピン集団の協同的ダイナミクスであると考えられる [31, 25]。したがって、通常の巨視的なサンプルにおけるエイジングや rejuvenation (若返り)-memory (記憶) 効果の実験で観測されているのは、系のあちこちで起こっているメソスケールのプロセスをサンプル全体 $N \sim 10^{23}$ にわたって平均化したものであると考えられる。

布を解析することは興味深いだろう。また Jarzynski 恒等式 [54] を用いれば、その分布から本稿で議論したような静的な階段的応答を再構成する作業が可能である。さらに、メソスケール系の動的応答を直接解析できれば、 $N \rightarrow \infty$ の動的平均場理論 (モード結合理論) からは欠落し、droplet 現象論には「手が入ってしまっている」熱活性過程、また動的平均場理論で見いだされた一般化された揺動散逸の関係 (有効温度) の物理的理解などが可能になると期待される。

謝辞

本研究は Tommaso Rizzo 氏 (Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”) との共同研究である。

参考文献

- [1] L. C. E Struik, *Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials*, 1978 (Elsevier).
- [2] 高山 一 1991 「スピングラス」 1991 (丸善).
- [3] J. A. Mydosh *Spin glasses: an experimental introduction* 993 (Taylor & Francis).
- [4] M. Mézard, G. Parisi, and M.A. Virasoro, "Spin glass theory and beyond", World Scientific (Singapore 1987).
- [5] スピングラス系についての droplet 現象論は A. J. Bray and M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **58** 57 (1987), D. S. Fisher and D. A. Huse, Phys. Rev. B **38** 386 (1988) and Phys. Rev. B **43** 10728 (1991). DPRM 系についての同様の現象論は D. S. Fisher and D. A. Huse, Phys. Rev. B **43** 10728 (1991).
- [6] N. Kawashima and H. Rieger, in "Frustrated Spin Systems" ed. H. T. Diep (2004) (preprint cond-mat/0312432).
- [7] スピングラスにおける aging, rejuvenation-memory 効果の実験の review として E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J.-P. Bouchaud and L.F. Cugliandolo: in *Proceeding of the Sitges Conference on Glassy Systems*, Ed.: E. Rubi (Springer, Berlin, 1996) (preprint cond-mat/9607224.) および P. Nordblad and P. Svedlindh, in "Spin Glasses and Random Fields", *Series on Directions in Condensed Matter Physics* Vol.12, A.P. Young Editor, World Scient. 1998 pp.1-27.
- [8] A. J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
- [9] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, Phys. Rev. Lett. **71** 173 (1993) and J. Phys. A **27** 5749 (1994).
- [10] J-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and M. Mézard in *Spin-glasses and random fields*, edited by A. P. Young, (World Scientific, Singapore, 1997)
- [11] S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys. F: Met. Phys. **5** 965 (1975).
- [12] K. Jonason, E. Vincent, J. Hamman, J. P. Bouchaud and P. Nordblad. Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3243.
- [13] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and L. Peliti, Phys. Rev. E **55**, 3898 (1997).
- [14] K. Hayashi and S. Sasa, Phys. Rev. E **69** 066119 (2004) , H. Teramoto and S. Sasa, Phys. Rev. E **72** 060102(R) (2005), S. Sasa, nlin/0010026.
- [15] F. Zamponi, F. Bonetto, L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, J. Stat. Mech. (2005) P09013.
- [16] A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto and M. Sellitto, Phys. Rev. Lett. **85** 5034 (2000).
- [17] S.F. Edwards, in *Granular Matter: An Interdisciplinary Approach*, edited by A. Mehta (Springer-Verlag, New York, 1994).
- [18] T. R. Kirkpatrick and D. Thirumalai, Phys. Rev. B **36** 5388 (1987), T. R. Kirkpatrick and P. G. Wolynes, Phys. Rev. A **35** (1987).

- [19] 1 step RSB の” スピングラス” 平均場理論およびそのガラスの Mode Coupling theory との関連を説明した読みやすい解説として T. Castellani and A. Cavagna, J. Stat. Mech. 05012 (2005).
- [20] M. Mézard and G. Parisi, J. Phys.: Condensed Matter **12** 6655 (2000).
- [21] J. Kurchan and L. Laloux, J. Phys. A: Math. Gen. **29** 1929 (1996).
- [22] H. Sompolinsky and A. Zippelius 1981 Phys. Rev. Lett. **47** 359, 1982 Phys. Rev. **B 25** 6860.
- [23] J. P. Bouchaud, J. Physique I (France) **2**, 1705 (1992).
- [24] T Odagaki, J Matsui, Y Hiwatari, Physica A **204** (1994) 464.
- [25] H. Yoshino, K. Hukushima and H. Takayama, Phys. Rev. B **66** 064431 (2002) およびその参考文献。
- [26] G. Blatter, M. V. Feigel'man V. B. Genkenbein, A. I. Larkin and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. vol 66 1125 (1994).
- [27] M. Sales and H. Yoshino, Phys. Rev. E **65** (2002) 066131.
- [28] M. Sasaki, K. Hukushima, H. Yoshino, H. Takayama, Phys. Rev. Lett. **95**, 267203 (2005).
- [29] P. Jonsson, H. Yoshino, P. Nordblad, Phys. Rev. Lett. **89** 097201 (2002) and Phys. Rev. Lett. **90** 059702 (2003)
- [30] H. Yoshino, A. Lemaitre and J. P- Bouchaud, Euro. Phys. J. **B 20** (2001) 367. H. Yoshino, J. Phys. A: Math Gen. **36** (2003) 10819.
- [31] P. E. Jonsson, R. Mathieu, P. Nordblad, H. Yoshino, H. Aruga Katori and A. Ito, Phys. Rev. B. **70** 174402 (2004).
- [32] M. Sasaki, K. Hukushima, H. Yoshino, H. Takayama, cond-mat/072302.
- [33] M. Tarzia and M. A. Moore, Phys. Rev. E **75** 031502 (2007).
- [34] G. Parisi, J. Phys. I. (France) **51** 1595 (1990).
- [35] S. Kirkpatrick and A. P. Young, J. Appl. Phys. **52** 712 (1981). A. P. Young, A. J. Bray and M. A. Moore, J. Phys. C **17**, L149 (1984).
- [36] M. Mézard, J. Phys. I. (France) **51** 1831 (1990).
- [37] H. Yoshino and T. Rizzo, J. Phys. C: **19** (2007) 145223.
- [38] M. B. Weissman, Rev. Mod. Phys. **65**, 829 (1993).
- [39] B. Derrida, Phys. Rev. B **24** 2613 (1981).
- [40] DPRM と関連する様々な問題 (KPZ 方程式など) についての総合的なレビューとして T. Halpin-Healy and Y.C. Zhang, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).
- [41] T. Hwa and D.S. Fisher, Phys. Rev. B **49**, 3136 (1994) .
- [42] F. H. Stillinger and T. A. Weber, J. Chem. Phys. **80** 4434 (1984).
- [43] H. Yoshino and T. Rizzo, cond-mat/0608293 and in preparation.
- [44] T. Rizzo and H. Yoshino, Phys. Rev. B **73**, 064416 (2006).
- [45] M. Kardar, Nucl. Physics. B **290** 582 (1987).
- [46] U. Schulz, J. Villain, E. Brézin, and H. Orland, J. of Stat. Phys. **51** 1 (1988).
- [47] M. Mézard and G. Parisi, J. Phys. (Paris) I **1**, 809 (1991).
- [48] J. P. Bouchaud, M. Mézard, J. Phys. A: Math. Gen. **30** 7997 (1997).
- [49] L. Balents, J. P. Bouchaud and M. Mézard, J. Phys. I. France **6** 1007 (1996).
- [50] P. Chauve, T. Giamarchi and P. Le Doussal, Phys. Rev. B **62**, 6241 (2000)
- [51] K. J. Wiese and P. Le Doussal, cond-mat/0611346.
- [52] S. Kida, J. Fluid. Mech. **93** 337 (1979).
- [53] J. P. Bouchaud, M. Mézard and G. Parisi, Phys. Rev. E **52** 3656 (1995).
- [54] C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. **78** 2690 (1996).