

パネルディスカッション印象記

電気通信大学 牛島照夫

研究集会の二日目、1978年1月24日の午後4時から、
有限要素法 —現状と展望—

というテーマで、パネルディスカッションを行なった。この
司会をお引き受けするにあたり、私は、現在とりくまれている
問題の位置づけ(現状)とこれから発展する重要問題(展
望)が鮮明に浮かび上がることを目指したいと考え、さらには、
この共同研究の今後の方向付けの指針が得られることを
期待していた。そこでパネルメンバーにあらかじめお願い
したテーマで話題を提供してもらい、それをふまえて討論
を行なった。

パネルメンバーと話題のテーマは、次のようであった(敬
称略)。

藤田宏(東大・理)

IRIAシンポジウムなど

森正武(京大・数解研)

誤差の事後評価

山本善之(東大・工)

無限要素法

金山寛(富士フアコム制御)

シミュレーションにおける構造の近似

川井忠彦(東大・生研)

数学モデルと物理モデル

三村昌泰(甲南大・理)

パターン生成と離散近似

山口昌哉(京大・理)

有限要素法に託する夢

この話題提供の後、

伊理正夫(東大・工)、金子幸臣(明大・工)、菊地文雄(東大・宇航研)、三好哲考(熊本大・理)、山田嘉昭(東大・生研)、吉田裕(東工大・工)、戸川隼人(日大・理工)

の諸氏の会場からの発言をまじえ、活発な討論が行なわれた。

パネルメンバーと上記の諸氏の御協力に厚く感謝する次第である。

以下に、パネルメンバーの提供された話題の要旨をかかげ

より。テープを頼りにまとめたいものであるが、もとより完全なものではない。文責は全々私にあることをお断りしておく。

藤田宏氏:

IRIAシンポジウムとは、昨1977年12月にケルサイユで開かれた第3回応用科学と工学における計算法国際シンポジウム、のことである。ここでは、60以上の講演発表があり盛況であった。これに出席して、偏微分方程式の数値解析および、これを手段として、現象を調べる場合には、我々は予測にみちた方法をとらねばならないとの感想をもった。原子炉の解析を行ない、計算結果を映画にし、現象との比較を報告している講演が印象深かった。この研究には、かなりの経費を要するものと思われる。我が国でも、このような大規模な仕事のできる研究機関があつて欲しいと感じた。しかしながら、映画が計算結果にもとづいて作られたかというかは、判定仕難いという思いもいだった。講演者との信頼関係だけかたよりである。一方このようにやみくもに計算していく場面には数学の出番はないであらう。このような多量のデータの中に埋没してしまふ現象を把握するためとか、経済性を高めるためとかに、数学の活躍の場と

期待したい。数学的には、解の性質をとらえにかしこい方法や、漸近的方法が重要であろうし、応用の立場からは、実際現象にうまく見合うところを強調してとらえた方法を開発していくべきであろう。

森正武氏:

有限要素法における誤差評価として典型的なものは、代表的なメッシュ巾 h によつて、 $O(h^d)$ の形で *a priori* に得られるものである。これは、解析的には有用であるが誤差の見積もりには役立たない。むしろ、 $O(h)$ などの評価は、メッシュ巾 h をあまり小さくしてはいけないという警告と理解すべきだ。

そこで変分原理にもとづく *a posteriori* な誤差評価に関心をもち、こゝにいる。これは、最小問題とこれに相対な最大問題を考え、両者の近似解で真の解を上と下からはさむことによつて、問題にしている物理量や解そのものの誤差を評価する方法である。変分法や構造力学において

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Complementary} \\ \text{Conjugate} \\ \text{Reciprocal} \\ \text{Dual} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Variational} \\ \text{Energy} \end{array} \right\} \text{Principle}$$

というさまざまな名前が呼ばれているが、すべて同一の思想である。有限要素法における混合法と密接な関係をもっている。Oden の解説によれば、この方法は、まず Legendre によって、次に Friedrichs によって、さらに 1940 年代後半 Hyper Circle 法として、そして現在有限要素法の誤差評価法として、4 度び（再）発見されているとの事である。

参考文献として、

加藤敏夫 変分法 寺沢寛一編

自然科学者のための数学概論応用編 pp. 353-489.

Courant - Hilbert Methode of Mathematical Physics Vol 1.

Aubin, J. P. Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. Chapt. 10, Conjugate Variational Principle.

などがある。

楕円型線型問題の誤差評価法として最も有望なものがあるが、相対問題を含めると二つ解かなければならないこと、および、最大問題は、Friedrichs の言う degenerate case すなわち、附加条件付きの最適化問題になることが問題点である。附加条件をみない要素さらには非適合要素を使って解いても、誤差評価としては十分役立つような場合もあり

る。この事情を解明し、三好の仕事はいかに出発して整理し、*a posteriori* の誤差評価の具体的な方法を作り出すことはこれからの問題であると考えている。

山本善之氏：

(所用のため出席を取り止められ、代わって山本研究室の中野孝昭氏が、無限領域における境界値問題を重ねあわせ法によって数値計算した例をスライドによって紹介された。同法は、領域を二分し、外部領域では解析解を使用し、内部領域では、有限要素法などによって数値解を得る方法である。内部領域での境界条件は、外部解との接続条件から定められる。定常波動問題、造波問題、粘性流体内の物体外の流れ解析の三例の計算結果が報告された。)

金山寛氏：

ここで発言したかったことは、田端氏の講演でのべられていることにつまる。民間の立場からは、メッシュ中を有限にとめたとき得られるスキームが、現象の本質的性質をみとめているか否かが重要である。教学サイトからの研究は、スキームの収束性の研究に精力があかれていますのではないかと。

川井忠彦氏:

1. 現在の有限要素法を非線型問題に適用した場合に計算時間がかかりすぎるのが障害である。定式化に発想の転換が必要である。そこで、数学モデルから物理モデルへという標語になった。

2. 私のモデルを二次元三次元問題に適用すると、メッシュ分割の方法に敏感であることがわかる。スプリングコンスタントを定めるときに差分の考えを使うというが、ここで使用する差分式が必ずしも適切でないのであろう。最近私の研究室の学生が、Hellinger-Reissner の原理から差分式の Rational な Formula を導いた。これにヒントを得て、連続体の変位場は本質的に hybrid であるということに思いついた。この変位場は定義式から剛体変位の場と歪の場の組みあわせである。変位と応力の場になおると、自由度は $6+6=12$ であり、要素行列は 12×12 が大きくなる。

ある法則で変位を消去できれば stress model であり、逆に応力を剛体変位で表わせば displacement model である。私のモデルは、この考えの延長線上にあることが解ってきた。この考えをおし進めることにより、収束性等の数学的根拠がわかってくるのではないかと。さらに

Navier - Stokes 方程式の数値解法の不安定性の原因もつ
まめられるのではないか。流れの場の大部分は、剛体変
位の場合であり、 $\delta \ll \alpha$ であり、数値としてこのオーダーが
まるで違うことに注目したい。固体力学の問題で、まだ有
限要素法の適用がすすんでいないもの、たとえば、変位変形
の極めて大きい風船のとりあつかいや、Rheology、
高 Reynolds 数の Navier - Stokes 方程式、生体现象な
どにおいては、変位場が hybrid であるという点に立ちかえ
って新たな工夫をする必要があると思う。

3. 刺激的だが、脱微分方程式という標語をかかげてみる。
移動現象を考えると、これは、拡散、熱、化学反応などが、
組みあわさった非線形の連立系であり、そのまゝ離散化する
のでは手にも負えない。物理学の基本は、質量、運動量、エ
ネルギーなどの保存則である。この保存則の積分表示を離
散化する中で将来曙光が見え出されるのではないであろ
うか。この方針で、Simplified Mark and Cell 法
と Frick 法を混用して、高 Reynolds 数の Navier - Stokes
方程式を手がけているところである。

三村昌泰氏：

生物モデルの解析への有限要素法の応用と出合っている間

題点について述べる。問題は、二次元又は三次元の複雑な領域における生物の空間分布を調べることである。数学理論としては、Bifurcation Theory がある。基本経路からの分岐を調べることで、空間的に非一様な解があるか否かを決定するときに、分岐が一意的である、すなわち、単純固有値の場合は、分岐理論の適用が可能であるが、一意でない、すなわち、縮重固有値の場合には、現在使える数学的武器がないので、有限要素法が有効になる。空間移動は拡散でありわされ、生物間の接触は、非線形項でありわされる半線形方程式の非定常問題の極限として定常状態をとめようとしており、計算結果は等々報告されている。数値的に得られる定常状態のパターンは、空間のまぶみ巾に依存しているように観察される。あるまぶみ巾で得られる定常状態と、まぶみ巾を半分にすると得られる定常状態とは全然似ていないことがある。このような計算法で、あるパターンが出現することは認めるとしても、どのパターンが正しいもののかの判定は難しい問題である。昨秋の New York での Bifurcation の会議に出席してこの感じを更に強くしている。

山口昌哉氏:

勢っかの要素から構成していく有限要素法という考え方を人間がどうして考え始めたのかを7,8年前から考えるように
 なり、その基本には細胞という考えがあると思うようになった。
 この点から考えると現在の、いやその当時の有限要素法は
 実に単純で同種の要素のみしか用いていない。生物では、
 異質のものがあり、細胞と細胞の境界も少し違ったもので
 できている。このようなものをいれに *Finite Element* を何故使
 わないのかと思っ、ていたが、川井氏の講演を聞き、やっ
 とこの夢が少し実現されてきているような印象を受けた。
 細胞はもうこれ以上細分できないものだから、川井氏のモ
 デルの場合でももうこれ以上細かくするという註はいろいろ
 いう立場もある。二つの問題点からは、まり浮かび上がる。
 一つは、構造を保存するというような、メッシュを細くしな
 いときの方の数学的問題であり、他は、細くしていくときの
 誤差評価の問題である。経済性は何も考えない純数学一
 方の考えだが、細胞と何ものを一方に考えれば、もっとも
 っといろいろな工夫ができるのではあるまいか。

会場からの発言は、漸近的手法による誤差の事後評価の重
 要性の指摘(伊理), 流体力学における特異問題の処理の動
 向(金子), 収束性によるスキームの分類(菊地), 手かけ

たい重要問題（三好，山田）、共同研究の将来への期待（吉田，戸川）などにわたっていったが、記録不備のため、残念ながら、要旨の紹介は割愛する。