

The integrality of p -adic multiple zeta values (joint work with M. Hirose, S. Yasuda)

大阪大学大学院理学研究科 赤木 和真

Kazuma Akagi

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

1 Introduction

本稿では, 古庄氏 [F] によって定義された p -進多重ゼータ値の integrality に関する結果について解説する. この研究は広瀬氏と安田氏との共同研究である. 非負整数 k に対して, 集合 $\{\frac{p^l}{l} \mid l \geq k\}$ によって生成される $\mathbb{Z}_p$ のイデアルを $(p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$ と表すことにする. 主結果は p -進多重ゼータ値 $\zeta_p(\mathbf{k})$ に関する次の定理である.

Theorem 1.1 (赤木-広瀬-安田 [AHY], Chatzistamatiou[Cha]). n を非負整数とする. 重さ k の index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ に対して,

$$\zeta_p(\mathbf{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が成り立つ.

本稿は 5 つの章からなる. 第 2 章で p -進多重ゼータ値の特徴付けを行う. 第 3 章ログ・スキームを用いて, p -進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ 上のコホモロジー $H_{\mathbb{Q}_p}$ を定義し, p -進多重ゼータ値との関係を見る. 第 4 章では第 3 章で構成したコホモロジーの $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ モデル H を構成するために複体 $C^\bullet$ を導入する. 第 5 章で複体 $C^\bullet$ に Frobenius 作用を定義し主定理の証明を行う.

2 p -進多重ゼータ値と iterated formal integral

初めに, p -進多重ゼータ値を定義する前に p -進多重ポリログを定義する. 以下 $a \in \mathbb{C}_p$ を固定する. 写像 $\log^a: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ を $\log^a(p) = a$ となる p -進対数関数とする.

Definition 2.1 (古庄 [F]). 任意の index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ に対して, p -進多重ポリログ関数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}^a(t)$ を次のように定める:

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^a(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{t} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{n-1}}^a(t) dt & \text{if } k_1 > 1, \\ \int_0^t \frac{1}{1-t} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{n-1}}^a(t) dt & \text{if } k_1 = 1, n > 1, \\ \int_0^t \frac{1}{1-t} dt = -\log^a(1-t) & \text{if } k_1 = 1, n = 1. \end{cases}$$

f を $\mathbb{C}_p$ 上定義された関数とする. 元 $\alpha \in \mathbb{C}_p$ に収束する数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ であって, 体拡大 $\mathbb{Q}_p(t_1, t_2, \dots)/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数が有限であるような任意の数列に対して, 数列に依らずに極限 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(t_i)$ が存在するとき, この極限を $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t)$ と書くことにする.

Theorem 2.2 (古庄 [F]). $\lim_{t \rightarrow 1} \text{Li}_k^a(t)$ が収束するか発散するかは枝 a に依らない. さらに, 収束するときは収束の値も枝 a に依らない.

次に, p -進多重ゼータ値を定義する.

Definition 2.3 (古庄 [F]). $\lim_{t \rightarrow 1} \text{Li}_k^a(t)$ が収束するとき, その値を $\zeta_p(\mathbf{k})$ と書き, p -進多重ゼータ値と呼ぶ.

Theorem 2.4 (古庄 [F]). $k_1 > 1$ であるとき, $\lim_{t \rightarrow 1} \text{Li}_k^a(t)$ はつねに収束する.

注意として, $k_1 = 1$ のときでも収束することがある.

Theorem 2.5 (古庄 [F]). $\zeta_p(\mathbf{k}) \in \mathbb{Q}_p$ が成り立つ.

以下, 枝 $a = 0$ とする. 次に, p -進多重ゼータ値 $\zeta_p(\mathbf{k})$ を特徴付けるために次のような集合を準備する.

$$R := \{ f(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid f(t) \text{ は } |t|_p < 1 \text{ 上収束する} \}$$

$$R^\dagger := \{ f(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid f(t) \text{ は } |t|_p < \epsilon \text{ 上収束する, } \epsilon > 1 \}$$

このとき, 任意の元 $f \in R^\dagger$ に対して, $t = 1$ での値 $f(1)$ は p -進数である. Frobenius 射 φ を

$$\varphi(t) := \frac{t^p}{(1-t)^p + t^p}$$

により定義する. このとき, 任意の元 $f \in \mathbb{Q}_p[[t]]$ に対して, $\varphi(f)(t) := f(\varphi(t))$ とおくことで, Frobenius 射 φ は自己準同型 $\varphi: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ へ延びて, 次が成り立つ.

Theorem 2.6. 任意の index $\mathbf{k}$ に対して, $R^\dagger$ の元からなる族 $(h_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < |\mathbf{k}|}$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する:

$$\varphi(\text{Li}_{\mathbf{k}}) = p^{|\mathbf{k}|} \text{Li}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < |\mathbf{k}|} h_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \text{Li}_{\mathbf{k}'}.$$

Coleman 積分は Frobenius 射の持ち上げに依らないということから, 古庄氏によって定義された p -進多重ゼータ値 $\zeta_p(\mathbf{k})$ は次の性質 (i), (ii) により特徴付けられる:

$$(i) \quad \zeta_p(\emptyset) = 1,$$

$$(ii) \quad \zeta_p(\mathbf{k}) = p^{|\mathbf{k}|} \zeta_p(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} h_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(1) \zeta_p(\mathbf{k}').$$

Theorem 2.6 を証明するために formal iterated integral を導入する. まず $\mathbb{Q}_p((t))$ 上の t -進連続な 1-form の空間を $\Omega_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}^1$ と表す. この空間は dt によって生成される階数 1 の自由

$F((t))$ -加群である。また dt によって生成された $\Omega_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}^1$ の $\mathbb{Q}_p[[t]]$ -部分加群 (resp. R^+ -部分加群) を $\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ (resp. $\Omega_{R^+}^1$) と表すことにし、写像 $\int_0: \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1 \rightarrow t\mathbb{Q}_p[[t]]$ は

$$\int_0 \omega = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad \omega = \left(\sum_{n \geq 0} a_n t^n \right) dt$$

により定義する。 $\int_0 \omega$ を ω の formal integral と呼ぶ。 k を非負整数とする。 $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ に対して、 $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$ を帰納的に次のように定義する (ただし、 $k=0$ のときは $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k = 1$ とする)。 $f = \int_0 \omega_2 \circ \dots \circ \omega_k$ とおくと、 $f\omega_1 \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ であることから、 formal integral $\int_0 f\omega_1$ を $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$ と表すことにする。これを $\omega_1, \dots, \omega_k$ の formal iterated integral と呼ぶ。また $\Omega_{R^+}^1$ に関しても同様に定義できる。

先ほど定義した iterated formal integral を用いて多重ボリログを考えることができる。 index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ とし $w = x^{k_1-1}y \dots x^{k_n-1}y$ を $\mathbf{k}$ と対応する x, y からなる語とする。この w を $w = w_1 \dots w_k$ と表すことにする (ただし、 $k = |\mathbf{k}|$ とする)。各 $i = 1, \dots, k$ に対して、

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t} & \text{if } w_i = x, \\ \frac{dt}{1-t} & \text{if } w_i = y, \end{cases}$$

とおき、 ω_i を $\frac{1}{t}\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ の元とみなす。また $w_k = y$ なので、 $\omega_k \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ である。したがって、 formal iterated integral は形式べき級数 $\text{Li}_{\mathbf{k}}(t)$ と一致する:

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(t) = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k.$$

Proposition 2.7. k を正の整数とし、 $\omega_1, \dots, \omega_{k-1} \in \frac{1}{t}\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$, $\omega_k \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ とする。整数 $i \in \{1, \dots, k\}$ を固定し、 $\omega_i \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$ と仮定する。また、 $f_i = \int_0 \omega_i$ とおく。このとき、 formal iterated integral

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$$

は次の表示を持つ。

(i) $2 \leq i \leq k-1$ であるならば

$$\begin{aligned} I &= \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{i-2} \circ f_i \omega_{i-1} \circ \omega_{i+1} \circ \dots \circ \omega_k \\ &\quad - \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{i-1} \circ f_i \omega_{i+1} \circ \omega_{i+2} \circ \dots \circ \omega_k. \end{aligned}$$

(ii) $i=1$ かつ $k \geq 2$ であるならば

$$I = f_1 \int_0 \omega_2 \circ \dots \circ \omega_k - \int_0 f_1 \omega_2 \circ \omega_{i+2} \circ \dots \circ \omega_k.$$

(iii) $i=k$ かつ $k \geq 2$ であるならば

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{k-2} \circ f_k \omega_{k-1}.$$

(iv) $i = k = 1$ であるならば, $I = f_1$ である.

次に $R^\dagger$ 上の foraml iterated integral について考える. 各整数 k に対して, $|\mathbf{k}| \leq k$ である多重ポリログ $\text{Li}_{\mathbf{k}}$ によって生成される $\mathbb{Q}_p[[t]]$ 上の $R^\dagger$ -部分加群を M_k と書き表すことにする.

Proposition 2.8. 整数 $k \geq 0$ とし, $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$ とする. もし $k \geq 1$ なら, $\omega_k \in \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$ と仮定する. このとき, $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$ は M_k に属する. さらに, もしある $i \in \{1, \dots, k\}$ に対し, $\omega_i \in \Omega_{R^\dagger}^1$ であるなら, $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$ は M_{k-1} に属する.

Proof. $\frac{1}{t}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1 = \mathbb{Q}_p \frac{dt}{t} + \mathbb{Q}_p \frac{dt}{1-t} + \Omega_{R^\dagger}^1$ ということと Proposition 2.7 から従う. $\square$

Proof of Theorem 2.6. $\omega = fdt \in \Omega_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}^1$ に対して, $\varphi(\omega) = \varphi(f)d(\varphi(t))$ とおくと, これは $\mathbb{Q}_p$ -線形写像 $\varphi: \Omega_{R^\dagger}^1 \rightarrow \Omega_{R^\dagger}^1$ を与える. 直接計算すると,

$$\varphi\left(\frac{dt}{t}\right) \in \frac{pdt}{t} + \Omega_{R^\dagger}^1, \quad \varphi\left(\frac{dt}{1-t}\right) \in \frac{pdt}{1-t} + \Omega_{R^\dagger}^1$$

である. これより, Proposition 2.8 から, 重さ k の index $\mathbf{k}$ に対して, $\varphi(\text{Li}_{\mathbf{k}}) \in p^k \text{Li}_{\mathbf{k}} + M_{k-1}$ であることがわかる. また, これらの多重ポリログたちは $R^\dagger$ 上線形独立であることから; Theorem 2.6 が従う. $\square$

3 Rational fundamental complex

1 次元アフィン空間 $A_{\mathbb{Q}_p}^1$ に正規交差因子 $\{0, 1\}$ に付随する対数構造 $M_{\mathbb{Q}_p}$ を入れたログ・スキームを U と表すことにする (ログ・スキームについては [Ka] を参照せよ). 整数 $k \geq 1$ に対して, fine ログ・スキームの圏で自明なログ・スキーム $\text{Spec } \mathbb{Q}_p$ 上 U の k -fold fiber product を U^k と表すことにする. ログ・スキーム U^k に付随する log poles 付き de Rham 複体を $\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^\bullet$ と表す. 各整数 i に対して,

$$\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, i} = \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^i \otimes_{\Gamma(U^k, \mathcal{O}_{U^k})} \Gamma(U^k, \mathcal{O}_{U^k})^\dagger,$$

とおき, これを log poles 付き overconvergent de Rham 複体と呼ぶ. 定義から, 埋め込み $\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^\bullet \hookrightarrow \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$ がある. このとき, 任意の整数 $k \geq 1$ と各整数 i に対して,

$$H_{\text{dR}}^i((A_{\mathbb{Q}_p}^1 \setminus \{0, 1\})^k / \mathbb{Q}_p) \simeq H^i(\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^\bullet) \simeq H^i(\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}).$$

が成り立つ.

次に, 複体の射 $s^k: \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$ を構成する. 整数 $k \geq 1$ とし, 各 $l = 0, 1, \dots, k$ に対し, 複体間の写像 $s_l^k: \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$ を次のように定義する.

(i) $1 \leq l \leq k-1$ の場合.

写像 s_l^k を $\tau_l^k(t_1, \dots, t_{k-1}) = (t_1, \dots, t_l, t_l, t_{l+1}, \dots, t_{k-1})$ によって定義された写像 $\tau_l^k: U^{k-1} \rightarrow U^k$ に関する pull-back とする.

(ii) $l=0, k$ の場合.

まず写像 $\tau_l^k: \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{k-1} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^k$ を次のように定義する:

$$\tau_l^k(t_1, \dots, t_{k-1}) = \begin{cases} (1, t_1, \dots, t_{k-1}) & (l=0) \\ (t_1, \dots, t_{k-1}, 0) & (l=k). \end{cases}$$

これから, 写像 s_l^k を τ_l^k に関する pull-back 写像として定義する. これらの写像に関して $s_0^k(\frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \dots) = 0$, $s_k^k(\dots \wedge \frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}}) = 0$ と考える.

これらの写像を用いて, 写像

$$s^k := \sum_{l=0}^k (-1)^l s_l^k: \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$$

とおくと, この写像は複体の射となる. このとき, sequence

$$\dots \xrightarrow{s^{k+1}} \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \xrightarrow{s^k} \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \xrightarrow{s^{k-1}} \dots \xrightarrow{s^1} \Omega_{U^0/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \longrightarrow 0$$

は二重複体である. ここで, $\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, i}$ は bidegree $(-k, i)$ である. これから, この二重複体に付随する複体 $C_{\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$ が得られる. また $H_{\mathbb{Q}_p} := H^0(C_{\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet})$ とおく.

formal iterated integral に関するコホモロジークラスを考える. 整数 $k \geq 1$ と $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$ に対して, $H_{\mathbb{Q}_p}$ 上 $\omega_1(t_1) \wedge \dots \wedge \omega_k(t_k) \in \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, k}$ のクラスを $[\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k]$ と表すことにする. ただし, $k=0$ のときは $[\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k]$ を $1 \in \Omega_{U^0/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, 0}$ のクラスとする. また x, y に関する任意の語 $w = w_1 \dots w_k$ に対して,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t} & \text{if } w_i = x, \\ \frac{dt}{1-t} & \text{if } w_i = y, \end{cases}$$

とおくと, クラス $[w] = [\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k] \in H_{\mathbb{Q}_p}$ が成り立つ. これより, 集合 $\{[w] = [\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k] \mid k \geq 0, w \text{ は } x, y \text{ に関する語}\}$ は $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Q}_p$ -basis になる.

Proposition 3.1. 整数 $k \geq 0$, $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$ とする. もし $k \geq 1$ なら, $\omega_k \in \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$ と仮定する (Proposition 2.7 より, $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k \in M_k$ である). また formal iterated integral

$$\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k = \sum_{|\mathbf{k}'| < k} h_{\mathbf{k}'} \text{Li}_{\mathbf{k}'},$$

と書き表す. ここで, $h_{\mathbf{k}'}$ は $R^\dagger$ のある元である. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$[\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k] = \sum_{\mathbf{k}'} \pm h_{\mathbf{k}'}(1)[w'].$$

ここで, w' は $\mathbf{k}'$ と対応する語であり, $\pm$ は単体的複体から定まる符号である.

4 Integral fundamental complex

次に $\mathbb{Z}_p$ -加群 H であり同型 $H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq H_{\mathbb{Q}_p}$ となる $\mathbb{Z}_p$ -加群を構成していく (この H を $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ モデルと呼ぶ). p -進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の 1 次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$ に正規交差因子 $\{0, 1, \infty\}$ に付随する対数構造 M を入れたログ・スキームを X と表すことにする. またアフィンスキーム $\text{Spec } \mathbb{Z}_p$ に自明な対数構造を入れたログ・スキームを W とする. 各整数 $k \geq 0$ に対して, fine ログ・スキームの圏で W 上 X の k -fold fiber product を X^k と表す.

ある $\mathbb{Z}_p$ -加群の複体 $C_k^\bullet$ を構成する. ログ・スキーム X^k の modulo p reduction したログ・スキームを Y^k とおくと, 複体 $C_k^\bullet$ はログ・クリスタリンコホモロジー $H_{\text{cris}}^i(Y^k/W)$ を計算するために必要である.

まず, $P = \{\{0\}, \{\infty\}, \{0, \infty\}\}$ とおく. 集合 $\{1, \dots, k\}$ から P への写像全体の集合を $I_k = \text{Map}(\{1, \dots, k\}, P)$ と表すことにする. 元 $f \in I_k$ に対して, アフィン開部分ログ・スキーム $U(f) \subset X^k$ を各 $l = 1, \dots, k$ に対して $t_l \notin f(l)$ によって定義されたログ・スキームとする. ただし, t_l は X^k の l 番目の座標である. ログ・スキーム $U(f)$ 上の de Rham 複体を $\omega^\bullet(f)$ と表し, その p -進完備化を $\hat{\omega}^\bullet(f)$ と表す.

各 $d \in I_k$ に対して, 集合 $\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid f(\ell) = \{0, \infty\}\}$ を J_f と表し, 集合 J_f の位数を $|J_f|$ と表す. 各 $\ell \in J_f$ と $t \in \{0, \infty\}$ に対して, I_k の元 $f_{\ell,t}$ を次のように定義する:

$$f_{\ell,t}(\ell') = \begin{cases} f(\ell'), & \text{if } \ell' \neq \ell, \\ \{t\}, & \text{if } \ell' = \ell. \end{cases}$$

各整数 $j \geq 0$ に対し, 複体

$$C_k^{(j),\bullet} = \bigoplus_{\substack{f \in I_k \\ |J_f| = j}} \hat{\omega}^\bullet(f)$$

とおく. 複体の間の写像 $d_k^j : C_k^{(j),\bullet} \rightarrow C_k^{(j+1),\bullet}$ を定義する. 複体 $C_k^{(j),s}$ の元 $a = (a_g)_{g \in I_k, |J_g|=j}$ と $|J_f| = j+1$ を満たす $f \in I_k$ に対して, $d_k^j(a)$ の f での座標を

$$\sum_{m=0}^j (-1)^m (\iota_{f,\ell_m,0}^* a_{f_{\ell_m,0}} - \iota_{f,\ell_m,\infty}^* a_{f_{\ell_m,\infty}})$$

とする. ここで, $J_f = \{\ell_0, \dots, \ell_j\}$, $\ell_0 < \dots < \ell_{j+1}$ であり, $\ell \in J_f$ と $t \in \{0, \infty\}$ に対して, $\iota_{f,\ell,t}^*$ は open immersion $U(f) \hookrightarrow U(f_{\ell,t})$ に関する pull-back 写像 $\hat{\omega}^\bullet(f_{\ell,t}) \rightarrow \hat{\omega}^\bullet(f)$ である.

この複体の射を用いると, sequence

$$C_k^{(0),\bullet} \xrightarrow{d_k^0} C_k^{(1),\bullet} \xrightarrow{d_k^1} C_k^{(2),\bullet} \xrightarrow{d_k^2} \dots$$

は二重複体となる. ここで, $C_k^{(j),\ell}$ は bidegree (j, ℓ) とおく. この二重複体に付随する単体的複体を $C_k^\bullet$ と表す. 構成から, 複体 $C_k^\bullet$ は k -fold 完備テンソル積 $C_1^\bullet \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \dots \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} C_1^\bullet$ に付随する単体的複体と同型である.

また同様に $\omega^\bullet(f)$ を overconvergent de Rham 複体 $\omega^{\dagger,\bullet}(f)$ に置き換えることによって, 部分複体 $C_k^{\dagger,\bullet} \subset C_k^\bullet$ を定義できる.

Proposition 4.1. 複体の射 $C_k^{\dagger, \bullet} \hookrightarrow C_k^{\bullet}$ は quasi-isomorphism である.

次に, 複体 $C_k^{\bullet}, C_k^{\dagger, \bullet}$ と結びつく簡単な複体 $C_k'^{\bullet}$ を導入する. まず $c_k \in I_k$ を $\{\infty\}$ へ送る定数写像とする. 複体 $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{0-\text{map}} \mathbb{Z}_p \frac{dt}{t} \oplus \mathbb{Z}_p \frac{dt}{1-t}$ を $C_1'^{\bullet}$ と表す. ここで $\mathbb{Z}_p$ は degree 0 に位置する. 対角写像 $C_1'^{\bullet} \hookrightarrow C_1^{(0), \bullet}$ と graded $\mathbb{Z}_p$ -加群の埋め込み $C_1^{(0), \bullet} \hookrightarrow C_1^{\bullet}$ との合成写像 $C_1'^{\bullet} \hookrightarrow C_1^{\bullet}$ を考える. この合成写像 $C_1'^{\bullet} \hookrightarrow C_1^{\bullet}$ は複体の射であり, quasi-isomorphism である. 各 $k \geq 0$ に対して, k -fold テンソル積 $C_1'^{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}_p} C_1'^{\bullet}$ に付随する単体的複体を $C_k'^{\bullet}$ とする. このとき, 合成写像から quasi-isomorphism $C_k'^{\bullet} \hookrightarrow C_k^{\bullet}$ が誘導される. 以上の議論より, Proposition 4.1 によって次の系が得られる.

Corollary 4.2. 合成写像

$$C_k'^{\bullet} \hookrightarrow C_k^{\dagger, (j), \bullet} \hookrightarrow C_k^{\dagger, \bullet}$$

は quasi-isomorphism である.

次に複体 $C^{\bullet}$ を $C_k^{\bullet}$ から構成する. 整数 $k \geq 1$ とする. 各 $\ell = 0, \dots, k$ に対して, 複体の射

$$s_{k, \ell} : C_k^{\bullet} \rightarrow C_{k-1}^{\bullet}$$

で $C_k^{\dagger, \bullet} \rightarrow C_{k-1}^{\dagger, \bullet}$ を誘導する射を導入する. まず写像 $s'_{k, \ell} : I_{k-1} \rightarrow I_k$ を

$$s'_{k, \ell}(f)(m) = \begin{cases} f(m), & \text{if } 1 \leq m \leq \min(\ell, k-1), \\ f(m-1), & \text{if } \max(\ell, 1) < m \leq k, \\ \infty, & \text{if } (\ell, m) = (0, 1), (k, k). \end{cases}$$

とする. この写像 $s'_{k, \ell}$ は単射である. 各 $f \in I_{k-1}$ に対して, 複体の射

$$s_{k, \ell, f} : \hat{\omega}^{\bullet}(s'_{k, \ell}(f)) \rightarrow \hat{\omega}^{\bullet}(f)$$

を次のように定義する. 各 $\ell = 0, \dots, k$ に対して, closed immersion $\iota_{k, \ell} : (\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1)^{k-1} \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1)^k$ を

$$\iota_{k, \ell}(t_1, \dots, t_{k-1}) = \begin{cases} (1, t_1, \dots, t_{k-1}), & \text{if } \ell = 0, \\ (t_1, \dots, t_{\ell}, t_{\ell}, \dots, t_{k-1}), & \text{if } 1 \leq \ell \leq k-1, \\ (t_1, \dots, t_{k-1}, 0), & \text{if } \ell = k \end{cases}$$

と定義する.

$1 \leq \ell \leq k-1$ の場合について, 射 $\iota_{k, \ell}$ はログ・スキーム間の closed immersion $\iota_{k, \ell, f} : U(f) \hookrightarrow U(s'_{k, \ell}(f))$ を誘導する. 射 $\iota_{k, \ell, f}$ による複体の pull-back 写像を $s_{k, \ell, f}$ とする.

$\ell = 0$ (resp. $\ell = k$) の場合は, 射 $\iota_{k, \ell}$ はログ・スキームの closed immersion $\iota_{k, \ell, f} : U(f) \hookrightarrow U(s'_{k, \ell}(f))$ を誘導しないが, $d \log(t_1) \wedge \omega$ (resp. $d \log(t_k) \wedge \omega$) の形の微分形式を 0 へ送ることによって, 複体の pull-back 写像 $s_{k, \ell, f} : \hat{\omega}^{\bullet}(s'_{k, \ell}(f)) \rightarrow \hat{\omega}^{\bullet}(f)$ を定義することができる. 写像 $s_{k, \ell}^{(j)} : C_k^{(j), \bullet} \rightarrow C_{k-1}^{(j), \bullet}$ を $(\omega_f)_{f \in I_k, |J_f|=j}$ を $(s_{\ell, f}(\omega_{s'_{k, \ell}(f)}))_{f \in I_{k-1}, |J_f|=j}$ へ送る写像とする.

写像 $s_{k,\ell}^{(j)}$ たちは複体の射 $s_{k,\ell}: C_k^\bullet \rightarrow C_{k-1}^\bullet$ を与えて, 射 $s_{k,\ell}$ は $C_k^{\dagger,\bullet} \rightarrow C_{k-1}^{\dagger,\bullet}$ を誘導する. 射 $s_k := \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell s_{k,\ell}$ とおくと, sequence

$$\dots \xrightarrow{s_3} C_2^\bullet \xrightarrow{s_2} C_1^\bullet \xrightarrow{s_1} C_0^\bullet$$

は二重複体となる. ここで, C_k^m は bidegree $(-k, m)$ に位置する. この二重複体に付随する simple 複体を $C^\bullet$ と表すことにする. 同様に複体 $C^{\dagger,\bullet}$ も定義できる.

各 $k \geq 0$ に対し, 自然な射影 $C_k^{\dagger,\bullet} \rightarrow C_k^{\dagger,(0),\bullet} \rightarrow \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k)$ は複体の全射 $C_k^{\dagger,\bullet} \rightarrow \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k)$ を与える. もし $k \geq 1$ なら, 各 $\ell = 0, \dots, k$ に対し, 写像 $s'_{k,\ell}: I_{k-1} \rightarrow I_k$ を c_{k-1} を c_k へ送る写像とする. これから, 複体の可換図式

$$\begin{array}{ccc} C_k^{\dagger,\bullet} & \xrightarrow{s_{k,\ell}} & C_{k-1}^{\dagger,\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) & \xrightarrow{s_{k,\ell}, c_{k-1}} & \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_{k-1}) \end{array}$$

を得る. また, $s'_k := \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell s_{k,\ell, \{f_{k-1}^\infty\}}$ とおく. このとき, 二重複体

$$\dots \xrightarrow{s'_3} \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_2) \xrightarrow{s'_2} \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_1) \xrightarrow{s'_1} \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_0)$$

を得る. この二重複体に付随する単体的複体を $\hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)$ と表し, 複体の全射 $C^\bullet \rightarrow \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)$ が得られる. したがって, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} C_k^\bullet & \longrightarrow & \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) & \longleftarrow & C_k^{\dagger,\bullet} \xrightarrow{qis} C_k^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_k^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{qis} & \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\simeq} & \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger,\bullet} \end{array}$$

また, $H := H^0(C^\bullet)$, $H^\dagger := H^0(C^{\dagger,\bullet})$ とおくと, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C^\bullet) & \longrightarrow & H^0(\hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)) & \longleftarrow & H^\dagger \xrightarrow{\simeq} H \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(C^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\simeq} & H_{\mathbb{Q}_p}^\dagger & & \end{array}$$

したがって, コホモロジー $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ モデル H を構成することができた.

5 The proof of main Theorem

この章では, ログ・スキーム Z_T を構成し, compatible system of liftings of Frobenius である system $(\phi_{T,n}: Z_{T,n} \rightarrow Z_{T,n})_n$ を構成する. この system から得られる log. PD-envelope Z_T 上の複体 $\tilde{C}_k^\bullet$ は $C_k^\bullet$ と quasi-isomorphism であり, Frobenius が作用する. この複体 $\tilde{C}_k^\bullet$ に作用する Frobenius を用いて, 主定理の証明を行う.

任意の空でない部分集合 $T \subset \{0, \infty\}$ に対して, $U_T := X \setminus T$ とおく. $T = \{0\}, \{\infty\}$ の場合は $Z_T = U_T$ とおく. $T = \{0, \infty\}$ の場合は fiber product $U_{\{0\}} \times_W U_{\{\infty\}}$ を blow-up し strict transforms を除くことによって得られる fine ログ・スキームを Z_T とする. ログ・スキーム Z_T は次のように明示的に構成することができる.

まず t を $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$ の標準座標とし, $s = \frac{1}{t}$ とおく. このとき, $U_T = X \setminus T$ は $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[t, s]$ に $\{t = 1\}$ の対数構造を入れたログ・スキームである. ログ・スキーム $U_{\{0\}} \times_W U_{\{\infty\}}$ の底スキームは $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[s_1, t_2]$ である. ここで, $s_1 = (1-s) \otimes 1$, $t_2 = 1 \otimes (1-t)$ である. これより, fine ログ・スキーム Z_T の底スキームは $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$ である. $\frac{1-t}{1-s} = -\frac{1}{t}$ は U_T 上可逆であるので, 準同型 $\iota_T^\sharp: \mathbb{Z}_p[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}_p[s, t]$ を $\iota_T^\sharp(s_1) = 1-s$, $\iota_T^\sharp(t_2) = 1-t$ によって定義する. これより, スキーム間の closed immersion $\iota_T: U_T \hookrightarrow Z_T$ が得られた. また, Z_T 上の対数構造については次のように考える. 因子 $\{s_1 = 0\} = \{t_2 = 0\} \subset Z_T$ は正規交差因子であり, この因子に付随する対数構造を M_Z と表すことにする. これより, ログ・スキームの射 $\iota_{T, \log}: (U_T, M_T) \hookrightarrow (Z_T, M_Z)$ は exact closed immersion である.

次に, compatible system of liftings of Frobenius の構成を行う. まず $T = \{0\}, \{\infty\}$ の場合について考える. 元 $x \in \{0, \infty\}$ に対し, $U_{\{x\}, n} := U_{\{x\}} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ とおく. この底スキームは $\text{Spec } \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]$ である. ただし, $x = \infty$ の場合は $u = t$ とし, $x = 0$ の場合は $u = s$ とする. $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ 上の Frobenius 写像 $\phi_{u, n}$ を

$$\phi_{u, n}(u) = \frac{u^p}{(1-u)^p + u^p}$$

によって定義する. $(1-u)^p + u^p$ は $U_{\{x\}, n}$ 上可逆であるので, $U_{\{x\}, n}$ 上の対数構造は 2 つ存在し, その対数構造 $\alpha: \mathbb{N}^{\oplus 2} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]$ と $\beta: \mathbb{N}^{\oplus 3} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]$ は

$$\alpha(m_1, m_2) = (1-u)^{m_1} u^{m_2}, \quad \beta(m_1, m_2, m_3) = \frac{(1-u)^{m_1} u^{m_2}}{((1-u)^p + u^p)^{m_3}}$$

によって定義る. これより, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathbb{N}^{\oplus 3} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]. \end{array}$$

ここで, 図式の上の写像 $\mathbb{N}^{\oplus 2} \rightarrow \mathbb{N}^{\oplus 3}$ は $(m_1, m_2) \mapsto (pm_1, pm_2, m_1 + m_2)$ とする. したがって, Frobenius 写像 $\phi_{u, n}: U_{\{x\}, n} \rightarrow U_{\{x\}, n}$ はログ・スキームの射であることがわかる..

次に, $T = \{0, \infty\}$ の場合について考える. $Z_{T, n} := Z_T \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ とおくと, この底スキームは $\text{Spec } \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$ である. $\text{Spec } \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$ 上の Frobenius 写像 $\phi_{T, n}$ は

$$\phi_{T, n}(s_1) = \frac{s_1^p}{(1-s_1)^p + s_1^p}, \quad \phi_{T, n}(t_2) = \frac{t_2^p}{(1-t_2)^p + t_2^p}$$

によって定義する. $\phi_{T, n}(s_1) = \frac{s_1^p}{(1-s_1)^p + s_1^p}$ と $\phi_{T, n}(t_2) = \frac{t_2^p}{(1-t_2)^p + t_2^p}$ は $Z_{T, n}$ 上可逆であるので, Frobenius 写像 $\phi_{T, n}$ はログ・スキームの射である. 任意の $T \in P$ に対して, system $(\phi_{T, n}: Z_{T, n} \rightarrow Z_{T, n})_n$ は compatible system of liftings of Frobenius である.

各 $f \in I_k$ に対し, W 上の $Z_{f(\ell)}$ ($\ell = 1, \dots, k$) の fiber product を $Z(f)$ と書き表すことにする. このとき, 射 $\iota_{T, \log}$ によって exact closed immersion $\iota_f : U(f) \hookrightarrow Z(f)$ が誘導される. 射 ι_f を modulo p^n した射と $W \bmod p^n$ の standard PD-structure に関する log. PD-envelope を n に関して帰納極限をとったログ・スキームを $D(f)$ と書くことにする. また $Z(f)$ 上の de Rham 複体を $D(f)$ へ pull-back した複体を $\tilde{\omega}^\bullet(f)$ とする. 射 ι_f は quasi-isomorphism $\tilde{\omega}^\bullet(f) \rightarrow \omega^\bullet(f)$ を誘導する. 複体 $\omega^\bullet(f)$ の代わりに $\tilde{\omega}^\bullet(f)$ を用いることにより, 異なる複体 $\tilde{C}_k^\bullet$ と quasi-isomorphism $\tilde{C}_k^\bullet \rightarrow C_k^\bullet$ が得られる. さらに整数 $k \geq 1$ と各 $\ell = 0, \dots, k$ に対して, 複体の射 $\tilde{s}_\ell^k : \tilde{C}_k^\bullet \rightarrow \tilde{C}_{k-1}^\bullet$ を同様の方法で定義でき, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_k^\bullet & \xrightarrow{\tilde{s}_k^\ell} & \tilde{C}_{k-1}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_k^\bullet & \xrightarrow{s_k^\ell} & C_{k-1}^\bullet \end{array}$$

は可換である.

複体 $\tilde{\omega}^\bullet(f)$ を張り合わせるにより, 複体 $\tilde{C}_k^\bullet, \tilde{C}^\bullet$ が定義され, 2つの quasi-isomorphisms $\tilde{C}_k^\bullet \rightarrow C_k^\bullet$ と $\tilde{C}^\bullet \rightarrow C^\bullet$ を得る. したがって, $\tilde{H} := H^0(\tilde{C})$ とおくと,

$$\tilde{H} \simeq H \simeq H^+$$

が得られる.

各 $f \in I_k$ に対して, $Z(f) \bmod p^n$ 上の Frobenius 持ち上げの compatible system $\phi_{f(1), n} \times \dots \times \phi_{f(k), n}$ は $\tilde{\omega}^\bullet(f)$ の自己準同型 ϕ_f を誘導する. これらを張り合わせるにより, $\tilde{C}_k^\bullet$ 上の自己準同型 ϕ が得られる. さらに, 写像 $\tilde{s}_k^\ell : \tilde{C}_k^\bullet \rightarrow \tilde{C}_{k-1}^\bullet$ は ϕ と可換である. これより, $\tilde{C}^\bullet$ 上の自己準同型 ϕ が得られる.

次に, p -進多重ゼータ値とコホモロジー H の関係について述べる. まず x, y に関する語 $w = w_1 \dots w_k$ として,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt_i}{t_i} & (\text{if } w_i = x) \\ \frac{dt_i}{1-t_i} & (\text{if } w_i = y). \end{cases}$$

とおく. このとき, $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k \in C_k^{\prime\bullet}$ であるので, これは $C^{\prime\bullet}$ の 0-cocycle である. このことから, $H \simeq H^0(C^{\prime\bullet})$ 上 $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k$ のコホモロジークラスを $[w]$ によって表すことにする.

Proposition 5.1. 集合 $\{[w] \mid w \text{ は } x, y \text{ に関する語}\}$ は H の $\mathbb{Z}_p$ -basis である.

Proof. 集合 $\{[w] \mid w \text{ は } x, y \text{ に関する長さ } k \text{ の語}\}$ は $H^k(C_k^{\prime\bullet}) \simeq H^k(C_k^{\prime\bullet})$ の $\mathbb{Z}_p$ -basis である. また spectral sequence

$$E_1^{p,q} = H^q(C_p^{\prime\bullet}) \Rightarrow H^{p+q}(C^{\prime\bullet}).$$

が存在する. よって, 次を示せば十分である:

$$E_1^{-k,k} = E_2^{-k,k} = E_3^{-k,k} = \dots$$

これより, 写像 $d_1 : E_1^{-k-1,k} \rightarrow E_1^{-k,k}$ がゼロ写像であることと $E_2^{-k-1,k} = \{0\}$ であることを示せば十分である. これはすぐにわかる. $\square$

Proposition 5.2. n を非負整数とし, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ を重さ k の index とする. また, $\mathbf{k}$ と対応する語を $w = x^{k_1-1}y \dots x^{k_n-1}y$ とする.

$$\varphi(\text{Li}_{\mathbf{k}}) = p^k \text{Li}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < k} h_{\mathbf{k}'} \text{Li}_{\mathbf{k}'},$$

とおく. ここで $k = |\mathbf{k}|$ であり, ある元 $h_{\mathbf{k}'} \in R_{\mathbb{Q}_p}^\dagger$ である. このとき, $H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ 上,

$$\phi([w]) = p^k [w] + \sum_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < k} h_{\mathbf{k}'}(1)[w'],$$

が成り立つ. ここで, w' は $\mathbf{k}'$ と対応する語である.

Proof. 同型 $H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq H_{\mathbb{Q}_p}$ と合成

$$H^0(\tilde{C}^\bullet) \simeq H \simeq H^\dagger \rightarrow H^0(\tilde{\omega}^{\dagger, \bullet}(\infty)) \rightarrow H_{\mathbb{Q}_p}$$

が Frobenius 写像と可換であることから, Proposition 3.1 より従う. $\square$

最後に Frobenius 写像と Hodge フィルトレーションに関して考える. ここで, Theorem 1.1 の証明を行う. $f \in I_k$ とし, $\mathcal{J}_f \subset \mathcal{O}_{Z(f)}$ を exact closed immersion $\iota_f : U(f) \hookrightarrow Z(f)$ に対応するイデアル層とする. $\tilde{\omega}^\bullet(f)$ 上のフィルトレーションを次のように定義する:

$$F^n \tilde{\omega}^\bullet(f) = [\mathcal{J}_f^{[n]} \rightarrow \mathcal{J}_f^{[n-1]} \tilde{\omega}^1(f) \rightarrow \mathcal{J}_f^{[n-2]} \tilde{\omega}^2(f) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\omega}^n(f) \rightarrow \tilde{\omega}^{n+1}(f) \rightarrow \dots],$$

ここで, $\mathcal{J}_f^{[n]}$ は $\mathcal{J}_f$ の n -th PD-ideal である. このフィルトレーションは $\tilde{C}_k^{(j), \bullet}$ 上のフィルトレーション $F^n \tilde{C}_k^{(j), \bullet}$ を誘導する. さらに次のフィルトレーション

$$F^n \tilde{C}_k^\bullet = \text{tot}[F^n \tilde{C}_k^{(0), \bullet} \rightarrow F^n \tilde{C}_k^{(1), \bullet} \rightarrow \dots],$$

$$F^n \tilde{C}^\bullet = \text{tot}[F^n \tilde{C}_k^\bullet \rightarrow F^n \tilde{C}_{k-1}^\bullet \rightarrow \dots]$$

を誘導する. これより, $F^n \tilde{H} \subset \tilde{H}$ である.

任意の長さ k の語 w に対して, $[w] \in F^k H$ が成り立つ. また構成から,

$$\phi(F^k \tilde{\omega}^\bullet(f)) \subset (p\mathbb{Z}_p)^{[k]} \cdot \tilde{\omega}^\bullet(f),$$

が成り立つ. したがって,

$$\phi(F^k H) \subset (p\mathbb{Z}_p)^{[k]} H$$

が成り立つ.

一方, スペクトラル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(C_{-p}^\bullet) \Rightarrow H^{p+q}(C^\bullet)$$

から H 上のフィルトレーション $W_{2n}H = \mathbb{Z}_p\text{-span}\{[w] \mid w \text{ は長さ } n \text{ の語}\}$ が作られる。また Frobenius 写像 ϕ は $E_1^{-k,k}$ 上 p^k 倍で作用するので, ϕ は $\text{Gr}_{2n}^W H$ 上 p^k 倍で作用する。もし $w = \emptyset$ なら, $\phi([\emptyset]) = [\emptyset]$ とする。したがって, 唯一つの $\mathbb{Z}_p$ -線形写像 $z: H \rightarrow \mathbb{Q}_p$ で, $z([\emptyset]) = 1$ と $z \circ \phi = z$ が成り立つ。

Proposition 5.2 と p -進多重ゼータ値 $\zeta_p(\mathbf{k})$ の定義から,

$$\zeta_p(\mathbf{k}) = z([w])$$

が成り立つ。したがって, 写像 z の性質とフィルトレーション F^k と Frobenius 作用から,

$$\zeta_p(\mathbf{k}) = z([w]) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が従う。したがって, Theorem 1.1 が証明された。

References

- [AHY] Akagi, K. and Hirose, M. and Yasuda, S.: *Integrality of p -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*, preprint.
- [Be] Besser, A.: *Syntomic regulators and p -adic integration II: $K2$ of curves*, Isr. J. Math. **120**, (2000) pp.335–360.
- [BO] Berthelot, P. and Ogus, A.: *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
- [Cha] Chatzistamatiou, A.: *On integrality of p -adic iterated integrals*, preprint (2015) arXiv:1501.05760v2.
- [CdS] Coleman, R. and de Shalit, E.: *p -adic regulators on curves and special values of p -adic L -functions*, Invent. Math. **93**(2), (1988) pp.239–266.
- [Col] Coleman, R.: *Dilogarithms, regulators and p -adic L -functions*, Invent. Math. **69**, (1982) pp.171–208.
- [F] Furusho, H.: *p -adic multiple zeta values I*, Invent. Math. **155**, (2004) pp.253–286.
- [Ka] Kato, K.: *Logarithmic structure of Fontaine Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press, (1989) pp.191–224.
- [Ma1] Mazur, B.: *Frobenius and the Hodge Filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. **78**(5), (1972) pp.653–667.
- [Ma2] Mazur, B.: *Frobenius and the Hodge Filtration (estimates)*, Annals of Mathematics Second Series. **98**(1), (1973) pp.58–95