

積空間の *subsequentiality*

愛媛大 理学部 野倉嗣紀

§ 1. 序

Sequential 空間の部分空間と同相な空間は *subsequential* 空間と呼ばれる。ここでは *subsequential* 空間に対し K. Nagami 氏により提出された2つの問題に対する完全解と部分解を与える。

問題 1. *Lasnev* 空間 (= 距離空間の開連続写像による像空間) は可算 compact, *sequential* な正則空間に埋め込むことができるか。

問題 2. *Lasnev* 空間の有限又は可算無限積は *subsequential* 空間か。

上の2つの問題に関して次のことを示す。

問題 1 について. 距離化可能でない *Lasnev* 空間は可算 compact, 可算 tightness をもつ正則空間には埋め込めない。

問題 2 について. 連続体仮説を仮定すれば (以下 CH と

記す) 正則な Fréchet 空間 X と Y で $X \times Y$ が subsequential でないものが存在する。

Fréchet 空間は sequential 空間であるから上の結果は [8] で得られた定理「subsequential 空間の可算積は subsequential である」の反例を与えてゐる。以下空間は全て正則であると仮定する。

§2. 問題1について

定義1 ([1, p.954]). 空間 X が 可算 tightness をもつとは $\forall A \subset X$ と $\forall x \in \mathcal{O}_x A$ に対し, 可算集合 $B \subset A$ が存在して $x \in \mathcal{O}_x B$ となることを云う。

定義2 ([3, p.109]). 空間 X の部分集合 U が sequentially open であるとは U の点へ収束する任意の極限点列は有限個の点を除いて全て U の点であることを云う。 X の任意の sequentially open な部分集合が X の open set であるとき X を sequential 空間 と云う。

定義3 ([3]). 空間 X が Fréchet 空間 とは 定義1 の B として極限点列がとれるときを云う。

以上の各空間の関係は

$\text{Lashnev space} \rightarrow \text{Fréchet} \rightarrow \text{sequential} \rightarrow \text{subsequential}$
 可算 tightness をもつ

$R = \{0\} \cup \{1/n; n \in \omega\}$ を極限点列, $S = \sum_{i=1}^{\infty} R_i$, $R_i = R$
 $A = \{0_n \in R_n; 0_n = 0, n \in \omega\}$ とし $T = S/A$ と A を一
 点と同視した商空間とする。

定理 1. T は可算 compact, 可算 tightness をもつ空間に埋め込むことはできない。

定理 2. X は Lashnev 空間で距離化可能でないものとする
 そのとき X は T の copy を closed subset としてもつ。

系 1. Lashnev 空間 X が可算 compact, 可算 tightness をもつ
 空間に埋め込めたとすると X は距離化可能である。

系 2. X は Lashnev 空間, Y は discrete でない空間とする,
 $X \times Y$ が Fréchet と仮定すれば X は距離化可能である。

§3. 問題 2 について

N を自然数全体の集合とする。 $\mathcal{F}$ を N の filter とするとき

$N \cup \{y\}$ で, N の各点は孤立点, 点 $\{y\}$ の近傍は $G \cup \{y\}$; $G \in \mathcal{G}$ なる位相が入った空間を表すものとする. N の Stone-Čech compact 化 βN , $M \subset N$ に対し $M^* = \mathcal{C}_{\beta N} M - N$ を表すものとする.

定義 4. 点 $x \in X$ が空間 X の p -point であるとは, 任意可算個の x の近傍の共通集合が再び x の近傍になっていることを云う

補題 1 ([9, p 415] CH). N^* には p -point が存在する.

補題 2 ([6, 定理 1]). $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in A\}$ を N の free filter とする. $G = \bigcap \{\mathcal{C}_{\beta N} G_\alpha; \alpha \in A\}$ とするとき, $N \cup \{y\}$ が Fréchet 空間である必要十分条件は $G = \mathcal{C}_{\beta N}(\text{Int}_{N^*} G)$ となることである.

補題 3 (CH). p を N^* の p -point とする. そのとき N の filter $\{V_\alpha; \alpha \in \omega_1\}$ で次の性質をもつものが存在する.

$$\text{i) } V_\alpha^* \subsetneq V_\beta^*, \quad \alpha > \beta$$

$$\text{ii) } \{V_\alpha^*; \alpha \in \omega_1\} \text{ は } p \text{ の } N^* \text{ での近傍基.}$$

補題 4 (CH). N に次の性質をもつ filter $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が存在する。

i) $N \cup \{\mathcal{F}\}, N \cup \{\mathcal{G}\}$ は共に Fréchet 空間,

ii) $\mathcal{H} = \{F \cap G; F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$ は N の極大 filter.

証明の概略. $p \in N^*$ の p -point とし, $\{V_\alpha; \alpha \in \omega_1\}$ を補題 3 で構成されたものとする. N の部分集合族 $\{W_{\alpha 1}, W_{\alpha 2}; \alpha \in \omega_1\}$ を次の性質をみたすものとする.

$$W_{\alpha 1}^* \neq \emptyset, W_{\alpha 2}^* \neq \emptyset, W_{\alpha 1}^* \cap W_{\alpha 2}^* = \emptyset,$$

$$W_{\alpha 1}^* \cup W_{\alpha 2}^* \subset V_\alpha^* - V_{\alpha+1}^*.$$

そのとき

$$F = \mathcal{C}_{\beta N}(\cup \{W_{\alpha 1}^*; \alpha \in \omega_1\}),$$

$$G = \mathcal{C}_{\beta N}(\cup \{W_{\alpha 2}^*; \alpha \in \omega_1\}).$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ F, G の βN での近傍 filter を N に制限したものとすれば, 補題 2 より i) が示され, $F \cap G = \{p\}$ であることから ii) が示される.

補題 5. $\mathcal{G}$ を N の極大 filter とする. $N \cup \{\mathcal{G}\}$ は subsequential ではない.

定理 3 (CH). Fréchet 空間 X, Y で $X \times Y$ が subsequential とならないものが存在する。

証明. $p \in N^*$ の p -point, $X = N \cup \{x\}$, $Y = N \cup \{y\}$ を点 p から補題 4 で構成された Fréchet 空間とする。

$$f: N \cup \{p\} \rightarrow X \times Y \quad \varepsilon$$

$$f(n) = (n, n)$$

$$f(p) = \{x\} \times \{y\}$$

で定義すれば f は埋め込みとなる。従って $X \times Y$ が subsequential ならば $N \cup \{p\}$ は subsequential になり補題 5 に反する。

参 考 文 献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, On the cardinality of bicompleta satisfying the first axiom of countability, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 187 (1964), 967-970 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 12 (1969), 951-955.
- [2] J. Fine and L. Gillman, Extension of continuous functions in N^* , Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 376-381.
- [3] S. P. Franklin, Spaces in which sequential suffice, Fund. Math., 57 (1965), 107-115.
- [4] N. Lashnev, Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165 (1965),

- 766-758 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 6 (1965), 1504-1506.
- [5] N. Lašnev, Closed image of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 170 (1966), 505-507 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 7 (1966), 1219-1221.
- [6] V. I. Malyhin, On countable space having no bicompatifications of countable tightness, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 206 (1972), 1293-1296 (Russian). English Transl.: Soviet Math. Dokl., 13 (1972), 1407-1411.
- [7] K. Morita and S. Hanai, Closed mappings and metric spaces, Proc. Japan Akad., 32 (1956), 10-14.
- [8] N. Noble, Products with closed projection II, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 169-183.
- [9] W. Rudin, Homogeneity problem in the theory of Čech compactifications, Duke. Math. J., 23 (1956), 409-419.