

## 13. フラクタルな界面の運動Ⅱ

(計算機シミュレーション)

名大・工 折原 宏、長屋智之、石橋善弘

## § 1. はじめに

非保存系において初期界面がフラクタルである場合の時間発展は、豊木・本田<sup>1)</sup>により調べられている。彼らは動的スケーリング則を仮定して、界面密度  $A(t)$  の時間依存性が

$$A(t) \propto t^{-(D+1-d)/2} \quad (1)$$

となることを示した。但し、 $D$  は初期界面のフラクタル次元であり、 $d$  は空間次元である。この様に、ベキ指数はフラクタル次元  $D$  に依存する。しかし、通常、急冷過程において現れる界面は空間を埋めつくしており、 $D = d$  である。したがって、(1) 式は良く知られている Allen-Cahn の  $t^{-1/2}$  則<sup>2)</sup> を与えるのみである。そこで、我々は視点を変え、すべての界面の密度の替わりに、一つの界面の面積に着目した。当然、この場合  $D < d$  であるから、指数の絶対値は  $1/2$  より小さくなる。実験例としては、ツイストネマチック液晶の急冷過程がある。<sup>3)</sup>

今回、このような系の時間発展を詳しく調べる目的で、計算機シミュレーションを行った。非保存系の界面の運動方程式は

$$v = \Gamma K^\beta \quad (2)$$

で与えられる。但し、 $v$  は着目した界面上の点の法線速度、 $\Gamma$  は運動係数、 $K$  は曲率、 $\beta$  は定数である。現実の界面では  $\beta = 1$  であるが、計算機シミュレーションでは、 $\beta \neq 1$  の例を扱うことができ、動的スケーリング則への影響を考えると興味深い。界面密度は、豊木・本田によれば、<sup>1)</sup>

$$A(t) \propto t^{-(D+1-d)/(\beta+1)} \quad (3)$$

となる。

我々はすでに、 $d = 2$ 、 $\beta = 1$  の系において、界面（曲線）の接線ベクトルの相関関数がス

ケーリング則を満たすことを、(2)式を近似的に解いて示している。<sup>3)</sup>  $\beta \neq 1$ の場合にも同様な方法で解くことができる。<sup>4)</sup>  $t=0$ において平面上にフラクタルな一本の界面(曲線)があったときの時刻  $t$  における界面の長さ  $L_s(t)$  は

$$L_s(t) \propto t^{-(D-1)/(\beta+1)} \quad (4)$$

となり、接線ベクトルの相関関数  $C_t(s, t)$  は

$$\begin{aligned} C_t(s, t) &\equiv \langle t(s, t) \cdot t(0, t) \rangle \\ &= f(s/\xi_s(t)) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \xi_s^2(t) &= 8\Gamma C^{(\beta-1)/(\beta+1)} ((\beta+1)/2D)^{2/(\beta+1)} t^{2/(\beta+1)} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-x')^2/2} |x'|^{-2(D-1)/D} dx' \quad (5c)$$

で与えられる。但し、 $t(s, t)$  は時刻  $t$  において原点から曲線上で  $s$  離れた点における接線ベクトルであり、 $\Gamma(x)$  はガンマ関数である。定数  $C$  は初期のフラクタル界面の形状により定まり、 $\beta=1$  のときには現れない。上式で、特徴的長さ  $\xi_s$  のべき指数は  $\beta$  だけに依存し、初期界面のフラクタル次元  $D$  には依存しないという点は注目に値する。

以下、シミュレーションの結果を示し、上記の理論と比較する。

## §2. シミュレーション

初期界面には、Mandelbrotにより考案されたsquig曲線をとった。squig曲線は自己回避曲線であり、そのフラクタル次元は  $D = 1.5 / \log 2$  である。<sup>5)</sup> シミュレーションでは、曲線を折れ線で置き換え、各点における曲率を求め、(2)式に従って時間発展させた。

$\beta=1$  の時の界面の時間発展の様子を図1に示す。大きなスケールで見ると変わらないが、小さなスケールでは、時間の経過と共に曲線がなめらかになっているのがわかる。曲線の長さの時間依存性  $L_s(t)$  を図2に示す。初期の時刻を除き、良く直線に乗り、その傾きは(4)式で予想されるものとほぼ完全に一致している。図3に接線ベクトルの相関関数を示す。時間

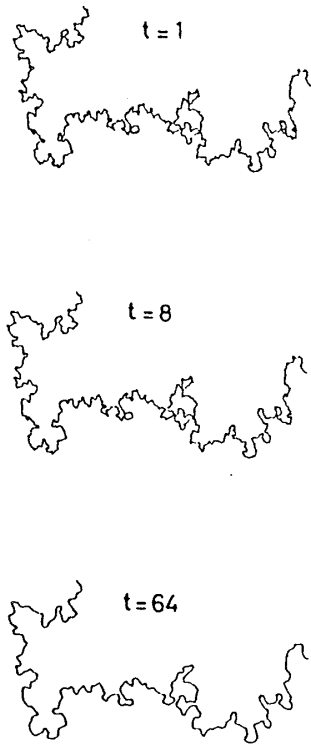


図1 SQUIG曲線の時間発展。

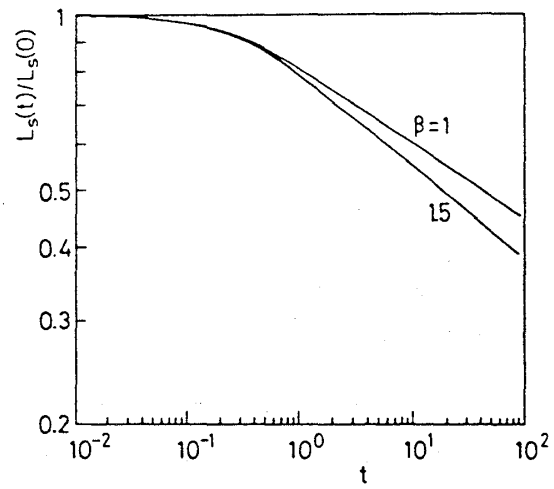


図2 曲線の長さの時間依存。

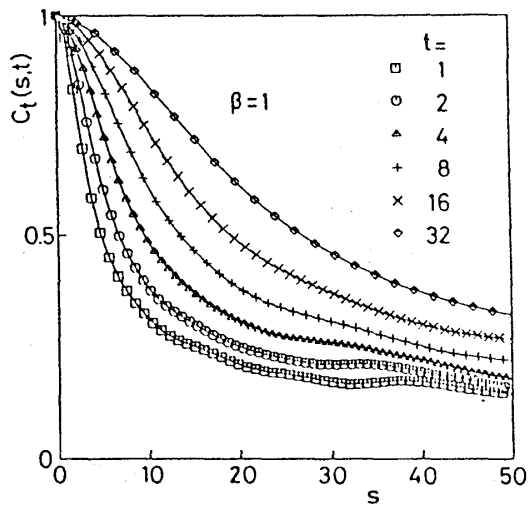


図3 接線ベクトルの相関関数 ( $\beta = 1$ )。

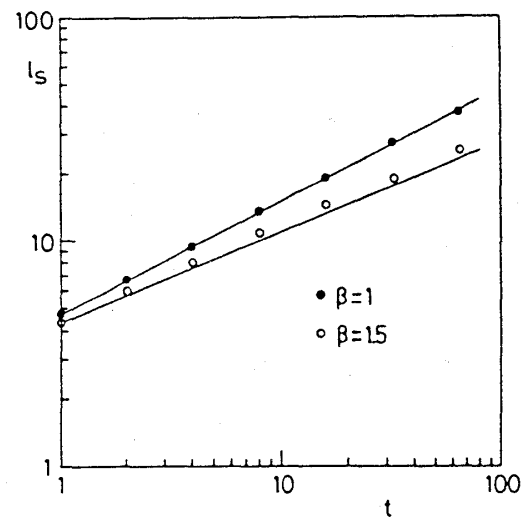


図4 相関長の時間依存（実線は理論）。

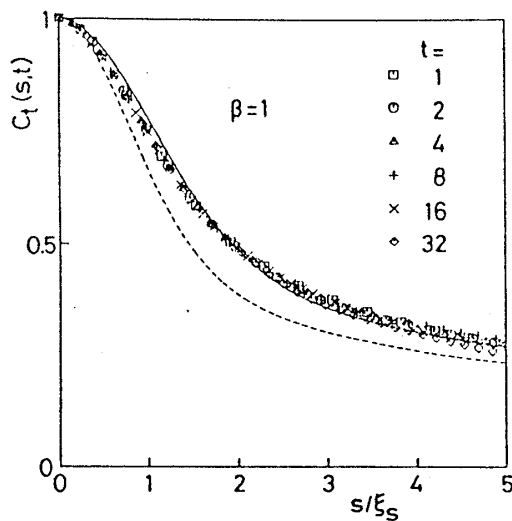


図5 スケールされた相関関数  
( $\beta = 1$ )。破線は理論。  
実線は理論の横軸を適当  
にスケールしたもの。

の経過とともに、幅が広がり、相関距離が長くなっているのがわかる。相関距離  $\ell_s$  を相関関数が 0.5 になる距離と定義する。 $\ell_s$  は特徴的長さ  $\xi_s$  に比例するから、その指数は  $1/2$  になるはずである。図4に示す様に  $\beta = 1$  の場合には、データ（黒丸）は理論（実線）と良く一致している。動的スケーリング則が成立しているのを確かめるために、図3の横軸を特徴的長さ  $\xi_s$  でスケールしてみた（図5）。非常に良くスケールされている。スケーリング関数については、理論を点線で示したが、実験との一致はあまり良くない。そこで、理論で導出されたスケーリング関数の横軸を 1.33 倍したところ、実験とほぼ一致した。つまり、 $\xi_s$  を 1.33 倍する必要があることがわかる。

$\beta = 1.5$  の場合を次に示す。曲線の長さの時間依存性（図2）は、 $\beta = 1$  の場合と同様に理論との一致は非常に良い。相関関数（図6）は  $\beta = 1$  の場合とほぼ同じであるが、相関距離が全体としては短くなっている。相関距離の時間依存性（図4）は理論（実線）と多少の食い違いがみられる。理論的に導出した（5）式は、 $\beta$  が大きくなるほど近似が悪くなることを示

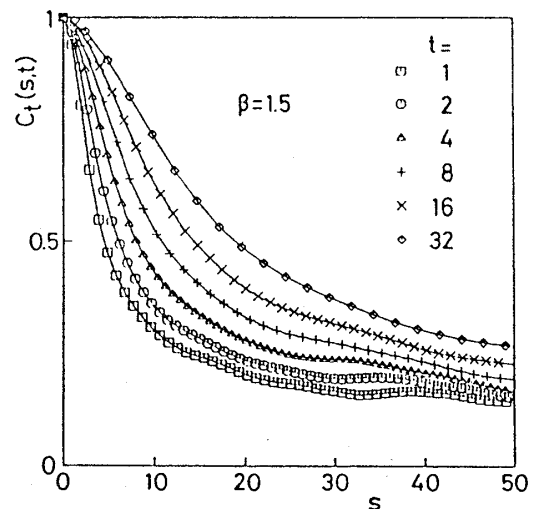


図6 接線ベクトルの相関関数  
( $\beta = 1.5$ )。

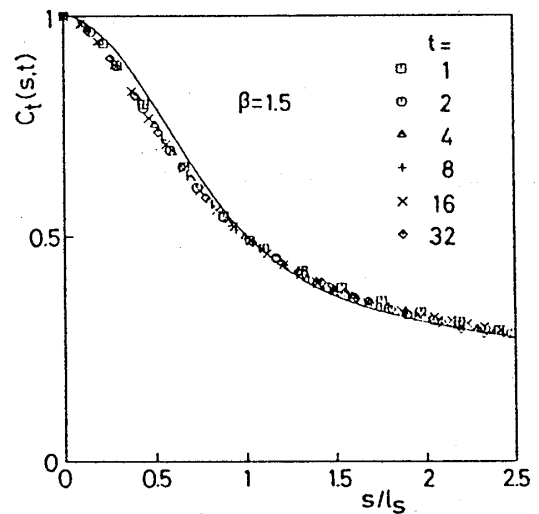


図7 スケールされた相関関数  
( $\beta = 1.5$ )。実線は理論  
の横軸を適当にスケールした  
もの。

すことができ、食い違いはこれに起因していると思われる。スケーリング則は図7に示す様に  $\beta = 1$  の時同様良く成立している。但し、図7の横軸は  $l_s$  でスケールしたもので、実線はスケーリング関数 (5c) の横軸のスケールを適当に調節したものである。

### § 3. まとめ

初期にフラクタルである界面の運動をシミュレートした。その結果、

- 1) 曲線の長さは (4) 式に従う、
- 2) 接線ベクトルの相関関数を求めることにより、動的スケーリング則が成立している、  
のが見出された。さらに、理論的に導出した相関関数と比較した結果、
- 3) スケーリング関数は理論と良く一致した、
- 4) 特徴的長さ  $l_s$  は理論で得られたものを 1.33 倍する必要がある、  
ことがわかった。なお、
- 5) squig 曲線の場合には、(5-b) 式の定数  $C$  は約 0.2、  
であった。

### 文献

- 1) H. Toyoki and K. Honda: Phys. Lett. 111 (1985) 367.
- 2) S. M. Allen and J. W. Cahn: Acta. Metall. 27 (1979) 1085.
- 3) H. Orihara and Y. Ishibashi: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 2338.
- 4) H. Orihara, T. Nagaya and Y. Ishibashi (投稿準備中).
- 5) B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature (Freeman San Francisco, 1982).