

燃焼波の定常解の存在条件と非定常相似解

東工大総合理工 丹生慶四郎, 安部隆士
理研 丹波護武

§1. まえがき

流体の流れを、定常、非定常という形で分類すると、1)定常解が存在しそれが実現する場合、2)定常解は存在するが不安定で流れは非定常に移行して非定常流れが実現する場合、3)定常解が存在せず必然的に流れが非定常である場合、の3通りに分けられる。燃焼波は、流れのパラメーター領域にたじ上記の3通りの場合があり得るのである。ただここでは安定性の問題には立ち入らず、燃焼波の定常解の存在する条件と、定常波が存在しない場合に相似解が求め得ることを以下に示す。

§2. 定常波

現象を1次元の平面波に限定する。波面座標よりみて現象が定常な場合、連続方程式は

$$\frac{d}{d\bar{x}} \{ (\bar{m}_A \bar{n}_A + \bar{m}_B \bar{n}_B + \bar{m}_C \bar{n}_C + \bar{m}_D \bar{n}_D) \bar{u} \} = 0 \quad (1)$$

と与えられる。 $\bar{x}$ は空間座標， $\bar{u}$ は流速， $\bar{n}$ は数密度， $\bar{m}$ は粒子質量で，添字A, B, C, Dは成分を表わす。波面内では化学反応



が進行するとする。 Q は反応熱である。簡単のために，到る所

$$\bar{n}_A = \bar{n}_B, \quad \bar{n}_C = \bar{n}_D \quad (3)$$

で

$$\bar{n}_C = \bar{n}_D = 0 \quad \text{at } \bar{x} = -\infty, \quad \bar{n}_A = \bar{n}_B = 0 \quad \text{at } \bar{x} = \infty \quad (4)$$

とする。(1)式ではすべての粒子は種類のいかににかかわらず同じ速度 $\bar{u}$ で動くと仮定している。反応の前後の質量の保存則より

$$\bar{m}_A + \bar{m}_B = \bar{m}_C + \bar{m}_D \equiv \frac{\bar{m}}{2} \quad (5)$$

であり

$$\bar{n}_A + \bar{n}_B + \bar{n}_C + \bar{n}_D = 2\bar{n}_A + 2\bar{n}_C = \bar{n} \quad (6)$$

と書くと，(1)式は

$$\frac{d}{d\bar{x}} (\bar{n} \bar{u}) = 0 \quad (7)$$

と書ける。運動方程式は

$$\bar{m} \bar{n} \bar{u} \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = - \frac{d}{d\bar{x}} \bar{n} \bar{T} \quad (8)$$

と与えられる。 $\bar{T}$ は温度でやはり粒子の種類によらないとし

た。エネルギー方程式は

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left[\bar{m} \bar{n} \bar{u} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 + \frac{5\bar{T}}{2\bar{m}} \right) \right] = \bar{n}_A \bar{n}_B \langle \bar{\sigma} \bar{v} \rangle \bar{Q} \quad (9)$$

と書ける。 $\bar{\sigma}$ はA, B粒子の衝突断面積, $\bar{v}$ は相対熱速度で

$\langle \rangle$ は平均値を表わす。粒子の反応方程式は

$$\bar{u} \frac{d\bar{n}_c}{d\bar{x}} = \bar{n}_A^2 \langle \bar{\sigma} \bar{v} \rangle \quad (10)$$

で与えられる。燃焼波の後面はChapman-Jougetの条件を満足しなければならない。¹⁾つまり流速は音速に等しい。諸量を音速点の値で無次元化し無次元量には一を省く。(7)-(10)式を x で積分すると,

$$n u = 1 \quad (7)$$

$$u + n T = 2 \quad (8)$$

$$u^2 + 5T = 6 + 2\mu \int_{x_s}^x n_A^2 \langle \sigma v \rangle dx \quad (9)$$

$$-u \frac{dn_c}{dx} = \gamma n_A^2 \langle \sigma v \rangle \quad (10')$$

となる。ここで

$$\mu = \frac{\bar{n}_s \langle \bar{\sigma} \bar{v} \rangle_s \bar{Q} \bar{L}}{m \bar{u}_s^3}, \quad \gamma = \frac{\bar{n}_s \langle \bar{\sigma} \bar{v} \rangle_s \bar{L}}{u_s} \quad (11)$$

で $\bar{L}$ は波面の代表長さで, $\bar{x}$ は $\bar{L}$ で無次元化した。添字 s は音速点(波の後面)に対してつける。波の後面は $n_A = n_B = 0$ の点と定義されるが, 波面の前面では $n_c = n_d = 0$ であり, 前面の諸量に添字 f を付ける。(7)-(9')式より

$$u_f + P_f = 2 \quad (8'')$$

$$u_f^2 + 5u_f P_f = 6 + 2\mu \int_{x_s}^{x_f} n_A^2 \langle \sigma v \rangle dx \quad (9'')$$

を得る。ただし P は圧力で $P = nT$ である。

$$2\mu \int_{x_s}^{x_f} n_A^2 \langle \sigma v \rangle dx = -C \quad (C > 0) \quad (12)$$

とすると、1図から明らかなように、(7')-(10')の方程式系で与えられる解は下記の3群に分類される。

- 1) もし $6-C > 4 > \frac{16}{25}(6-C)$ なら、1つのデフラグレーション波と1つのデトネーション波の解が存在する。
- 2) $6 > C > 2$ の場合は、1つのデフラグレーション波の解が存在する。
- 3) $6 < C$ の場合は定常波は存在しない。

§3. 相似解を持つ波

§2の分類3)の条件を満たす時、波は非定常であるが、一般に非定常の場合は波の振幅の予測が難しい。この節では、ある近似のもとに非線型の基礎方程式が相似解を導く方程式に変形出来ることを示す。相似解がある場合は、波の構造が解析的に予測がついて好都合である。(7)-(10)式に対応する非定常の基礎方程式は

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{n} \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{m} \bar{n} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{n} \bar{T}), \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{3}{2} \bar{n} \bar{T} + \frac{1}{2} \bar{m} \bar{n} \bar{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{5}{2} \bar{n} \bar{u} \bar{T} + \frac{1}{2} \bar{m} \bar{n} \bar{u}^3 \right) = \bar{n}_A^2 \langle \bar{\sigma} \bar{v} \rangle \bar{Q}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{x}} = \bar{n}_A^2 \langle \bar{\sigma} \bar{v} \rangle \quad (16)$$

となる。\$\bar{t}\$ は時間を表わす。§2 の場合と同様に各変数を音速点の値で無次元化すると、

$$\lambda \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u}{\partial x} = 0, \quad (13')$$

$$n \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (n T), \quad (14')$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n T + \frac{1}{2} n u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{5}{2} n u T + \frac{1}{2} n u^3 \right) = \mu n_A^2 \langle \sigma v \rangle, \quad (15')$$

$$\lambda \frac{\partial n_c}{\partial t} + u \frac{\partial n_c}{\partial x} = \gamma n_A^2 \langle \sigma v \rangle \quad (16')$$

に帰着する。上式で \$\lambda = \frac{L}{\tau u_s}\$ で、\$\tau\$ は代表的な時間間隔である。\$\frac{L}{\tau}\$ は波の厚さの膨張速度と考えることが出来る。ここで変数を

$$\begin{aligned} \xi &= x + t, n(x, t) = n(\xi), n_A(x, t) = n_A(\xi), \\ n_c(x, t) &= n_c(\xi), u(x, t) = u(\xi), T(x, t) = T(\xi) \\ \langle \sigma v \rangle(t, x) &= \langle \sigma v \rangle(\xi) \end{aligned} \quad (17)$$

に変換して得る。(13')-(16') 式は

$$\lambda \frac{du}{d\xi} + \frac{dn u}{d\xi} = 0, \quad (13'')$$

$$n \left(\lambda \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} \right) = - \frac{d}{d\xi} (nT), \quad (14'')$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d}{d\xi} \left(\frac{3}{2} nT + \frac{1}{2} nu^2 \right) + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{5}{2} nuT + \frac{1}{2} nu^3 \right) \\ = \mu n_A^2 \langle \sigma v \rangle \end{aligned} \quad (15'')$$

$$\lambda \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} = \gamma n_A^2 \langle \sigma v \rangle \quad (16'')$$

となる。これは相似解に対する方程式である。(13'')-(15'')を
 ξ で積分すると

$$n(\lambda + u) = \lambda + 1 \quad (13''')$$

$$(\lambda + 1)u + nT = \lambda + 2 \quad (14''')$$

$$nT(3\lambda + 5u) + (\lambda + 1)u^2 = 4\lambda + 6 + \int_{\xi_5}^{\xi} \mu n_A^2 \langle \sigma v \rangle d\xi \quad (15''')$$

を得る。波の後面が Chapman-Jouget の条件を満たすためには
 ξ_5 が固定していなければならないので、ここでは $\xi_5 = 0$ と選
 ぶものとする。従って波は ξ の負の領域に存在する。波の前
 面の値を求めるため、(13''')-(15''')を変形すると

$$(\lambda + 1)u_f + P_f = \lambda + 2 \quad (18)$$

$$(3\lambda + 5u_f)P_f + (\lambda + 1)u_f^2 = 4\lambda + 6 - C \quad (19)$$

となる。 C は(12)式で定義されるものに等しい。§2の分類1)
 に相当して、 P_f, u_f が正の範囲で(18), (19)式が2根持つ場合もあ
 り得るが、1)の場合の C の範囲を表すのは複雑となるの
 で省略する。1根が存在する C の範囲は

$$6+4\lambda - \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda+1} < C < 6+4\lambda - 3\lambda(\lambda+2) \quad (20)$$

又は

$$6+4\lambda - 3\lambda(\lambda+2) < C < 6+4\lambda - \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda+1} \quad (21)$$

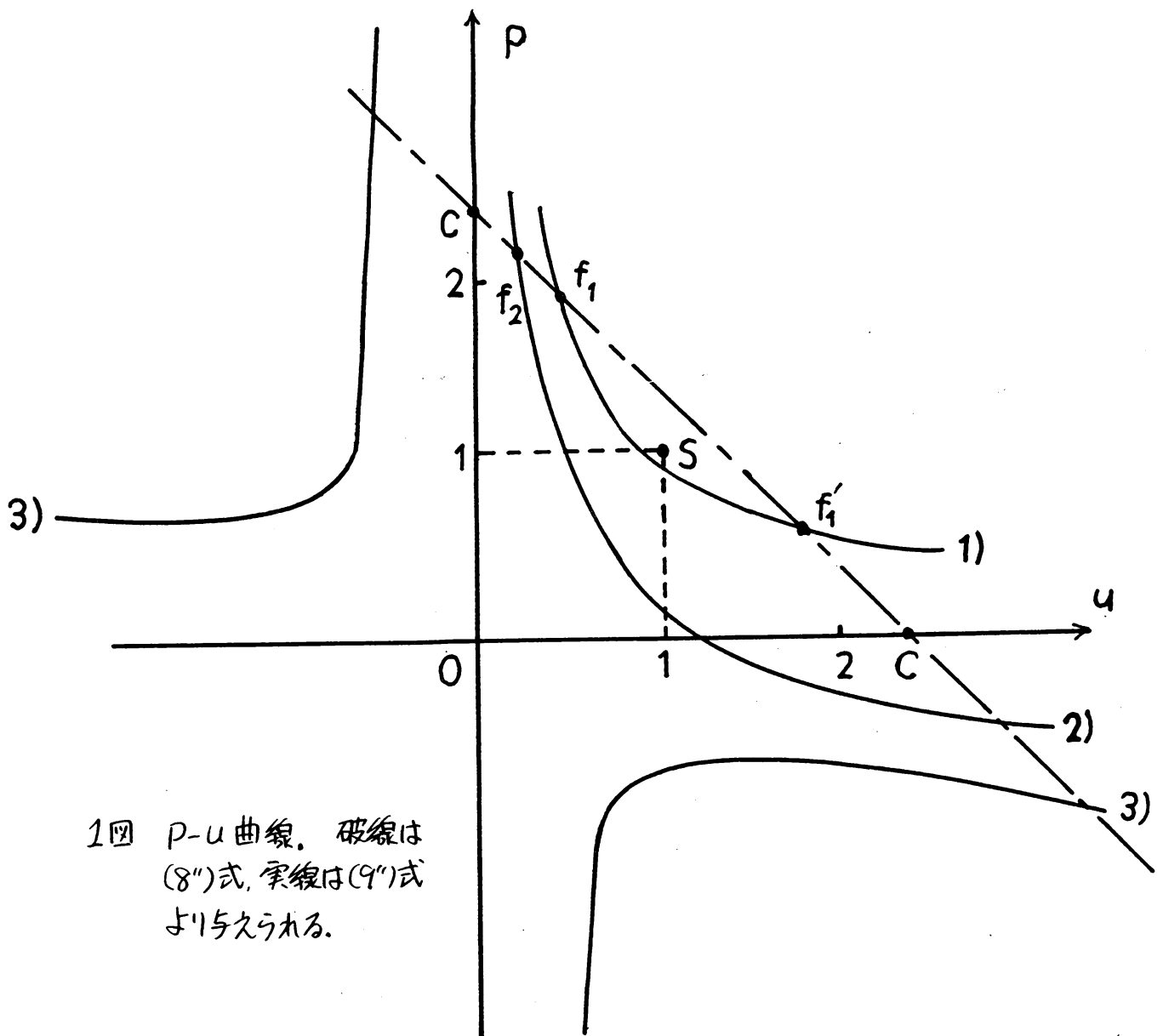
である。(20)式で $\lambda=0$ とおくと §2 の分類2)と一致する。式(21)で $\lambda=1$ とおくと, $1 < C < 5.5$ となり, これは §2 で定常波の存在する場合であるが, 定常波以外にも相似型の非定常波の解が存在し得ることがわかる。(21)の右辺は λ の増加関数であり, 任意の C の値に対して相似解は存在し得ることがわかる。

§4. まとめ

燃焼波は §2 で示した通り, 波面内での発熱量に応じて定常波の存在する場合としない場合とがあり, 発熱量があまり多いと定常状態では保存関係式が満足できず非定常となる。非定常の場合にはすべての発熱量に対して相似解が存在し得る。§2 の分類1)ではデフラグレーションとデトネーションの2つの定常解があることがわかる。また §3 の結果より, §2 の定常解の同じパラメーターに対して, 相似解が存在し, 相似解も λ がある範囲にわたって選べ得て2-7ではない。どの解が実現するかは, 解の安定性を解析して定め得ると思われるが, ここではふれない。

参考文献

- 1) J.O. Hirschfelder, C.F. Curtiss and R.B. Bird; Molecular Theory of Gases and Liquids (John Wiley & Sons, 1967, New York) 797.



1図 $p-u$ 曲線。破線は
(8')式, 実線は(9')式
より与えられる。