

電気回路網のダイナミクスについて

早大 理工 電気工学科 松本 隆

§ 1. 序

電気回路網の歴史は Ohm [1] と Kirchhoff [2] にさかのぼる事ができるといのが定説である。前者は 1827 年、後者は 1845 年に書かれたから、工学の諸分野の中では比較的古い歴史を持った分野と言えよう。これらの pioneer 以後、多くの著しい進歩を見る事ができるが、ここでは省略する。スペースが限られているし、筆者にそれを survey するだけの能力が無いからである。重要な事は Ohm から 1 世紀半を経た現在でも尚電気回路網は“現役”である事である。日本の研究者も重要な寄与をしている点にも注意すべきかも知れない。

他の工学の諸分野と同様、電気回路網の研究者も非線形な問題を“systematic”に論ずる事は苦手であった。Brayton-Moser [3] はあるクラスの非線形回路網のダイナミクスがポテンシャル関数（正確には混合ポテンシャル関数と呼ばれて

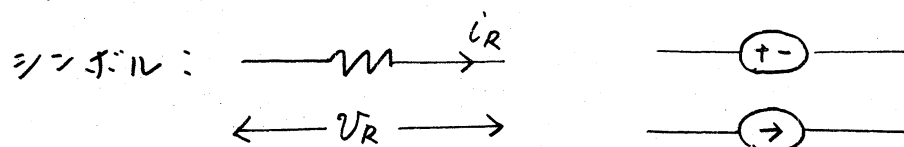
いる)を用いて記述できる事を示した。彼等の仕事で大切な事はその手法が幾何学的である事である。これをもとに Smale [4] は Brayton-Moser の考えた回路網のダイナミクスは(非自明な)多様体上のベクトル場としてとらえられる事を示した。小文の目的は[3], [4]で考えられたクラスの回路網よりもはるかに広いクラスの回路網が[4]の立場からとらえられる事を示し、いくつかの定性的な性質を調べる事にある。電気回路網の立場から見ると、今迄あいまいに用いられてきた概念がはっきりし、見通しが良くなる、大域的議論の困難が減少する事がある等の利点がある。一方、dynamical systems の研究者に対しては比較的興味深い例を提供する事になると思う。dynamical systems の研究者の殆んどが電気回路網に触れなかったのは彼等がそれを知らなかったと言う単純な理由による。

§ 2 電気回路網

次の三種類の素子を勝手に繋ぎ合せてものを電気回路網という。(i)抵抗(resistor) (ii)キャパシタ(capacitor) (iii)インダクタ(inductor)。各素子には電圧、電流と呼ばれるふたつの物理量が対応し、各素子は電圧、電流の関係を何らかの形で規定する。抵抗、キャパシタ及びインダクタは各々次の様に電圧、電流の関係を定める。

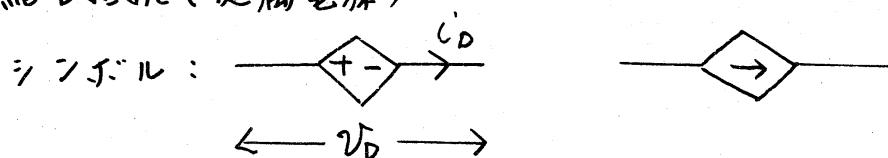
(i) 抵抗

(a) 非結合抵抗



$(v_R, i_R) \in \mathcal{L}_R$: 1次元多様体

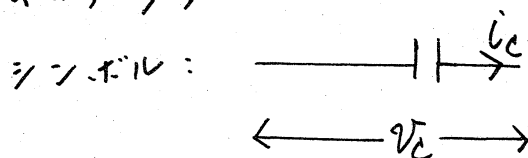
(b) 結合抵抗 (従属電源)



$(v_D, i_D, z) \in \mathcal{L}_D$: 適当な次元の多様体

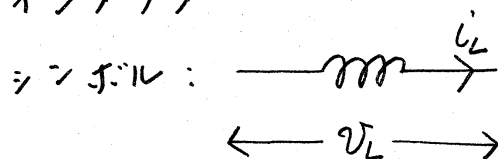
z : 他の素子の電圧 and/or 電流

(ii) キャパシタ



$C(v_C) \frac{dv_C}{dt} = i_C$, $C(v_C)$ は滑らかな関数

(iii) インダクタ



$L(i_L) \frac{di_L}{dt} = v_L$, $L(i_L)$ は滑らかな関数.

これらを組合わせると例えば次の様な電気回路網ができる.

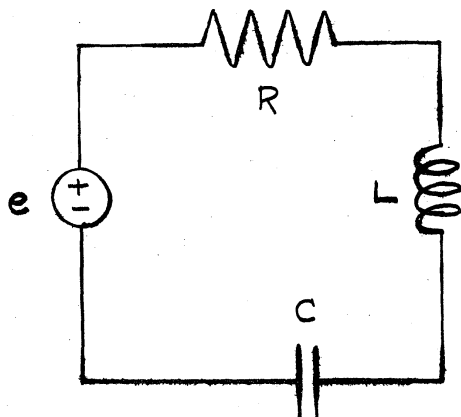


図 1

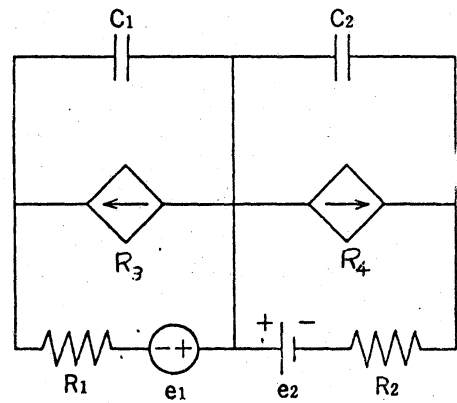


図 2

図1の回路網は最も単純なもののひとつである。図2は妙な印象を受けるが、実はある種のトランジスタ回路である。上に述べた β_R , β_D , $C(V_C)$ 等は素子を与えられれば決定する。(前もって解っている) [3], [4] における定式化とここの定式化の本質的な相違は後者が従属電源の存在を許している点にある。トランジスタ、真空管その他のエレクトロニクス素子の大部分が従属電源を含む。実際電気回路網で最も重要な素子のひとつは従属電源である。

さて上の様に素子を繋ぎ合わせると新しく2種類の拘束が生じる。

- (i) Kirchhoff 電圧則 (KVL): ループを成す素子の電圧和は零。
- (ii) Kirchhoff 電流則 (KCL): ある点でいくつかの素子が共通に結合しているとする。この時、結合している素子の電流和は零。

電気回路網はこれで完全に記述される。以上の諸量をふまえて、次節で定式化を行なう。

§3 ダイナミクス

p 個の抵抗, r 個のキャパシタとして n 個のインタクタを含む電気回路網を考える。各素子には電圧及び電流が対応するが、 v 及び i で全ての素子の電圧及び電流をあらわす事がある。 $b = p + r + n$ とすれば $(v, i) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ である。

前節に述べた拘束は次の3種類に分けられる。

[拘束1 抵抗素子特性]: $(v, i) \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$, 但し $\mathcal{R}$ は $2b - p$ 次元多様体。 (3.1)

(注) 以後多様体は適当に滑らかなものを考える。この定式化は極めて一般的である。例えば MOSFET [5] 等も考慮する事ができる。

次に、各素子をひとつの branch と考えると自然に線形グラフが定義される。このグラフに対してひとつ tree を選んで B 及び Q を各々基本ループ行列及び基本カットセット行列とする [6]。

[拘束2 Kirchhoff の法則]: $(v, i) \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$, 但し $\mathcal{K} = \text{Ker } B \times \text{Ker } Q$.

$\mathcal{K}$ を Kirchhoff space と呼ぶ事は恐らく的外れではない。

とあろう。

最後の拘束を記述する為、電圧及び電流を各々次の様に分割する：

$$v = (v_R, v_C, v_L), \quad i = (i_R, i_C, i_L)$$

但し、 R 、 C 及び L は各々抵抗、キャパシタ及びインダクタに関する変数であることを意味する。

[拘束 3. Maxwell の方程式]：

$$\sum_{n=1}^r C_{mn}(v_C) \frac{dv_{Cn}}{dt} = i_{Cm}, \quad m=1, \dots, r \quad (3.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\lambda} L_{mn}(i_L) \frac{di_{Ln}}{dt} = v_{Lm}, \quad m=1, \dots, \lambda \quad (3.4)$$

但し v_{Cm} (resp. i_{Ln}) は n 番目のキャパシタ (resp. インダクタ) の電圧 (resp. 電流) である。行列 $(C_{mn}(v_C))$ 及び $(L_{mn}(i_L))$ は対称正值で各々 incremental capacitance 行列及び incremental inductance 行列と言う。

(注) (3.3) 及び (3.4) は結合キャパシタ及び結合インダクタを許している。

(3.1), (3.2) より電気回路網の state space は

$$\Sigma = \mathcal{L} \cap \mathcal{K} \quad (3.5)$$

である。 Σ は部分多様体であって必ずしも 2 次の仮定を有する。

[仮定 (A)]

(i) $\Lambda \cap K$ は非空.

(ii) Λ と K は transversal

[A] 上の仮定をみると Σ は $\gamma + \lambda$ 次元部分多様体となる.

証明: $\text{codim } \Sigma = \text{codim } \Lambda + \text{codim } K$

であるが

$$\dim K = b$$

は回路網で古くから知られた事実であって [6]

$$\dim \Sigma = 2b - (b + p) = b - p = \gamma + \lambda$$

が従う.

(注) 電気工学者は transversality という言葉は知らなかったが同等の条件に気付いていた.

(A)(i) が満足されない回路の例をあげるのは簡単である. 図 3 の素子^特性が

$$\left. \begin{array}{l} v_{e_1} = \text{const} \\ v_{e_2} = \text{const} \end{array} \right\} (\#)$$

$$v_{e_1} \neq v_{e_2}$$

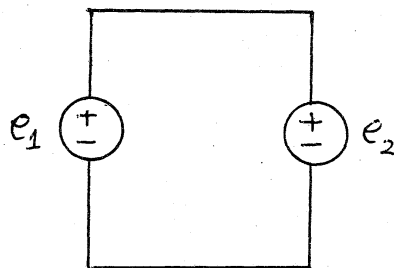


図 3

で与えられる場合は $K \cap \Lambda$ と (#) は

同時に満足されないのだから空である.

ダイナミクスを記述する α に (v_C, i_L) を座標系にとる事が多かったが. それは

$$\dim \Sigma = \gamma + \lambda = (v_C, i_L) \text{ の component の数}$$

という理由による。

次の様な 1-形式を考える。

$$\xi = \sum_{n=1}^Y i_{cn} dV_{cn} - \sum_{n=1}^Z V_{Ln} di_{Ln} \quad (3-6)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^P V_{Rn} di_{Rn} + d\left(\sum_{n=1}^Y V_{cn} i_{cn}\right) \quad (3-7)$$

そして

$$\mathcal{L}_1 : K \rightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$$

を inclusion とする。

$$[B] \quad \mathcal{L}_1^* \xi = \mathcal{L}_1^* \eta \quad (3-8)$$

証明: V, i を各々 tree branch の電圧及び link の電流とする。この時 $(V, i) \in K$ は次の様に書ける [6]

$$V = Q^T V_T, \quad i = B^T i_L$$

但し B, Q は (3.2) に出て来た行列, T は転置を意味する。

更に

$$BQ^T = 0 \text{ (零行列)} \quad (3-8)'$$

も知られた事実なので [6] 結果が従う。

次の様な $\mathbb{R}^Y \times \mathbb{R}^Z$ 上の対称 2-tensor (Riemannian 形式)

を考えると:

$$G = \sum_{m,n=1}^Y C_{mn}(V_c) dV_{cm} \otimes dV_{cn} - \sum_{m,n=1}^Z L_{mn}(i_L) di_{Lm} \otimes di_{Ln} \quad (3-9)$$

G と η を Σ に引き戻すと タイタミクスが記述できる。

$$\gamma_2 : \Sigma \rightarrow K$$

を inclusion

$$\pi' : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$$

を

$$\pi'(v, i) = (v_c, i_L)$$

を定義する。更に $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$, $\pi = \pi' \circ \gamma$,

$$\omega = \gamma^* \gamma \quad (3-10)$$

と置く。

[結果1] 仮定(A)が満足されているとする。任意 $a \in \Sigma$ におけるベクトル場 X_a は次式で与えられる。

$$\pi^* G_a(X_a, \xi) = \omega_a(\xi), \quad \xi \in T_a(\Sigma) \quad (3-11)$$

証明: $\Sigma \subset K$ であるから, [B] と Maxwell の方程式(3-3), (3-4)

から

$$\begin{aligned} \pi^* \left(\sum_{m,n=1}^r C_{mn}(v_c) \frac{dv_{cm}}{dt} dv_{cn} - \sum_{m,n=1}^r L_{mn}(i_L) \frac{di_{Lm}}{dt} di_{Ln} \right) \\ = \gamma^* \left(\sum_{n=1}^p v_{Rn} di_{Rn} + d \left(\sum_{n=1}^r v_{cn} i_{cn} \right) \right) = \omega \end{aligned}$$

を得る。これは(3-11)のものである。

[例1] 図1の回路網を考える。抵抗素子特性は次の様に与えられているとする。

$$v_R - f(i_R) = 0$$

$$v_e = \text{const.}$$

明らかに Σ は $2b-p=6$ 次元多様体となる。キルヒホッフの法則は

$$v_R + v_L + v_C - v_E = 0$$

$$i_R = i_L = i_C = -i_E$$

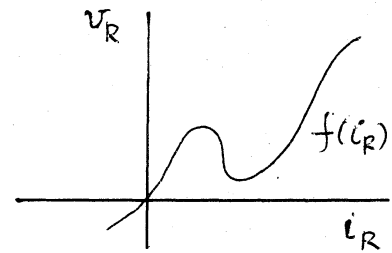


図4

と書ける。transversality は満たされているので Σ は $\gamma + \lambda = 2$ 次元多様体である。 (v_C, i_L) が Σ の大域座標になる事は容易にわかる。この座標に関してダイナミクスは

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -f(i_L) - v_C + v_E$$

と書ける。

[例2] 図2は pnp トランジスタを含む回路の Ebers-Moll モデル[7]である。抵抗素子特性は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} v_{R_1} - R_1 i_{R_1} &= 0 & v_{R_2} - R_2 i_{R_2} &= 0 \\ i_{R_3} + \alpha i_{R_4} - I_{e_0} (e^{\tau v_{R_3}} - 1) &= 0 \\ \beta i_{R_3} + i_{R_4} - I_{c_0} (e^{\tau v_{R_4}} - 1) &= 0 \\ v_{E_1} &= \text{const}, & v_{E_2} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

但し, $R_1, R_2, \alpha, \beta, I_{e_0}, I_{c_0}$, 及び τ は正数で素子が与えられるれば決定される。しかし, どのようなトランジスタであっても

$$0 < \alpha, \beta < 1$$

は成立する。従って

$$\det \frac{\partial}{\partial (i_{R3}, i_{R4})} \begin{bmatrix} i_{R3} + \alpha i_{R4} - I_{e0} (e^{\tau \sqrt{R_3}} - 1) \\ \beta i_{R3} + i_{R4} - I_{e0} (e^{\tau \sqrt{R_4}} - 1) \end{bmatrix} = 1 - \alpha\beta > 0$$

であるから (3-12) は $2b - p = 16 - 6 = 10$ 次元多様体 Λ を定義する。KVL 及び KCL は次の様に書ける。

$$v_{C1} = v_{R3} = -v_{R1} - v_{e1}, \quad v_{C2} = v_{R4} = -v_{R2} - v_{e2}$$

$$i_{C1} + i_{R3} - i_{R1} = 0, \quad i_{C2} + i_{R4} - i_{R2} = 0$$

Λ と K が transversal である事を示すのは容易である。従って Σ は $\gamma = 2$ 次元多様体となる。簡単の為キャパシタは線形非結合とする：

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_{C1}, \quad C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_{C2}$$

この例では (v_{C1}, v_{C2}) が Σ の大域座標となる。この座標に関して (3-1-1) の右辺は

$$\begin{aligned} \omega = & \left(-\frac{v_{C1}}{R_1} - \frac{I_{e0} (e^{\tau \sqrt{R_3}} - 1) - \alpha I_{e0} (e^{\tau \sqrt{R_4}} - 1)}{1 - \alpha\beta} - \frac{v_{e1}}{R_1} \right) dv_{C1} \\ & + \left(-\frac{v_{C2}}{R_2} - \frac{-\beta I_{e0} (e^{\tau \sqrt{R_3}} - 1) + I_{e0} (e^{\tau \sqrt{R_4}} - 1)}{1 - \alpha\beta} - \frac{v_{e2}}{R_2} \right) dv_{C2} \end{aligned}$$

となり、最終的には次式を得る。

$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = -\frac{V_{C_1}}{R_1} - \frac{I_{e_0}(e^{\tau V_{C_1}} - 1) - \alpha I_{c_0}(e^{\tau V_{C_2}} - 1)}{1 - \alpha\beta} - \frac{V_{C_1}}{R_1}$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = -\frac{V_{C_2}}{R_2} - \frac{-\beta I_{e_0}(e^{\tau V_{C_1}} - 1) + I_{c_0}(e^{\tau V_{C_2}} - 1)}{1 - \alpha\beta} - \frac{V_{C_2}}{R_2}$$

§4 相反性

電気回路網の分野では相反性 (reciprocity) と呼ばれる性質がある。今迄与えられてきた定義は多少とも ad hoc な所があるので、ここでは明確な定義を与える。実は相反性は回路網のダイナミクスが Π^*G に関する gradient 系になるための必要十分条件なのである。 Π^*G はキャパシタ及びインダクタから極めて自然に定義されている事に注意すべきである。

[定義] 仮定 (A) は満たされているとすると、

$$\mathcal{L}^*\left(\sum_{n=1}^p dV_{R_n} \wedge dI_{R_n}\right) = 0 \quad (4-1)$$

を満足する回路網を相反回路網と呼ぶ。

抵抗素子特性が

$$V_R = F(I_R) \quad (4-2)$$

で与えられているとすると、Jacobian $\frac{\partial F}{\partial I_R}$ が任意の点で対称である回路網を相反回路網と呼ぶのが普通である、[8] (4.1) はこれの一般化である事を次に示す。 (W, ω) を Σ の chart とし、

$$\Pi_{V_R} : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^p$$

を

$$\pi_{VR}(\psi, i) = v_R$$

を定義する。

$$v_R(x) = (\pi_{VR} \circ \tau \circ \psi^{-1})(x), \quad x \in \psi(W)$$

と書く。同様の記号を $\dot{v}_R$ にも用いる。

[C] (4-1) が成立する事と各 chart (W, ψ) について次式が成立する事は等価である。

$$\frac{\partial v_R}{\partial x}(x)^T \frac{\partial \dot{v}_R}{\partial x}(x) = \frac{\partial \dot{v}_R}{\partial x}(x)^T \frac{\partial v_R}{\partial x}(x), \quad x \in \psi(W) \quad (4-3)$$

証明: $\sum_{n=1}^p (\psi^{-1})^* \tau^* (dv_{Rn} \wedge d\dot{v}_{Rn})_x$

$$= \sum_{n=1}^p \sum_{k < m} \left(\frac{\partial v_{Rn}}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \dot{v}_{Rn}}{\partial x_m}(x) - \frac{\partial \dot{v}_{Rn}}{\partial x_m}(x) \frac{\partial v_{Rn}}{\partial x_k}(x) \right) dx_k \wedge dx_m.$$

上の2-形式が零になる事と次の行列が零になる事は等価である。

$$\frac{\partial v_R}{\partial x}(x)^T \frac{\partial \dot{v}_R}{\partial x}(x) - \frac{\partial \dot{v}_R}{\partial x}(x)^T \frac{\partial v_R}{\partial x}(x).$$

さて (4-2) で Jacobian が対称であれば

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_R}(\dot{v}_R)^T \frac{\partial \dot{v}_R}{\partial \dot{v}_R}(\dot{v}_R) = \frac{\partial \dot{v}_R}{\partial \dot{v}_R}(\dot{v}_R)^T \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_R}(\dot{v}_R)$$

となり (4-3) を満足する。この様に (4-1) は Jacobian の対称性の一般化ではあるが大切なのは次の結果である。

[結果2] 仮定 (A) は満足されているとし、 Σ は単連結とす

る。この時次の3.1.1の事実は等価である。

- (i) 考えている回路網が相反である。
- (ii) Σ 上に滑らかな関数 P があってダイナミクスは π^*G に
関する P の gradient である:

$$\pi^*G_a(X_a, \xi) = dP_a(\xi), \xi \in T_a(\Sigma) \quad (4.4)$$

証明: (3.11)より ω が closed になる条件を求めればよい。

$$\begin{aligned} d\omega &= d\tau^*\eta = \tau^*d\eta \\ &= \tau^*\left(\sum_{n=1}^p dV_{R_n} \wedge dI_{R_n} + d^2\left(\sum_{n=1}^q V_{C_n} I_{C_n}\right)\right) \\ &= \tau^*\left(\sum_{n=1}^p dV_{R_n} \wedge dI_{R_n}\right) \end{aligned}$$

であるから結果が従う。

(注) 電気回路網では Σ が単連結であるという条件は十分一般性をもつ。

[3], [4]で考えられた回路網では自動的に P が存在する。その理由を次に述べる。

[D] 抵抗が非結合の場合を考える。

$$\Lambda = \{(v, i) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \mid (v_{R_n}, i_{R_n}) \in \Lambda_{R_n}, n=1, \dots, p\}$$

但し Λ_{R_n} は 1次元多様体である。この時(4.1)は自動的に成立する。

証明: 非結合の場合の

$$\gamma^* \left(\sum_{n=1}^p dV_{R_n} \wedge dI_{R_n} \right) = \sum_{n=1}^p \gamma^* (dV_{R_n} \wedge dI_{R_n})$$

右辺の各2-形式は1次元多様体 I_{R_n} で定義されている。

Brayton-Moser [3] は上の様な P を *mixed potential function* と呼んだ。結果2は Brayton の結果 [9] を特殊な場合として含む。今迄得られた相反性に関する結果は全て十分条件である。上の結果の必要十分性は注意すべきではないかと思う。

さて π^*G が Σ 上で Riemannian とならない理由は (3-9) の2項の頁号にある。従ってもしインダクタのなない相反回路網であれば、タイムミクスは Riemannian metric

$$\pi^* \left(\sum_{n,m=1}^r C_{mn}(V_c) dV_{c_m} dV_{c_n} \right)$$

に関する gradient となる。この事から電気工学者にとっては少々面白い帰結が得られる。

[E] インダクタのなない相反回路網で (又は単連結) 発振器をつくる事は不可能である。キャパシタのなない相反回路網についても同様の事が言える。

§5 エネルギー, パワ, 受動性, 安定性

他の多くの工学系や物理系と同様電気回路網においてもエネルギーは興味深い性質を備えている。ここではキャパシタとインダクタに蓄えられるエネルギーを用いて電気回路網の安定

性を調べる。その際電気回路網の命題で古くから知られてきた受動性という性質が本質的な役割を演じる。

Γ_c を $\mathbb{R}^r$ の原点とある点を結ぶ滑らかな曲線とする。 Γ_L を $\mathbb{R}^n$ の原点とある点を結ぶ滑らかな曲線とする。この時次の値：

$$E_1(v_c, i_L) = \int_{\Gamma_c} \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^r C_{mn}(v_c') v_{c'm}' dv_{c'n}' + \int_{\Gamma_L} \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^n L_{mn}(i_L') i_{L'm}' di_{L'n}' \quad (5-1)$$

は Γ_c, Γ_L のとり方によらない。 $(C_{mn}(v_c')), (L_{mn}(i_L'))$ は対称である。従って

$$E = \pi^* E_1$$

と取れば $\sum_{E \in \Sigma}$ の滑らかな関数である。工学的考察から E はキャパシタ及びインダクタに蓄められるエネルギーである。次に

$$W_1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

を

$$W_1(v_R, i_R) = \sum_{n=1}^p v_{Rn} i_{Rn}$$

で定義する。

$$\theta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$$

を

$$\theta(\alpha) = (v_R, i_R)$$

を定義し.

$$W = \theta^* W_1$$

とおくと, 工学的考察により W は抵抗素子の, パワ (power) の和である.

[結果3] 仮定 (A) は満足されているとし, 考えている回路網に生成する Σ 上の flow を $\alpha(t)$ とする. この時次式が成立する.

$$\frac{dE(\alpha(t))}{dt} = -W(\alpha(t)) \quad (5-3)$$

証明: $\alpha(t)$ を $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{\wedge} \times \mathbb{R}^{\wedge}$ に射影したものを

$(v_C(t), i_C(t), v_L(t), i_L(t))$ と書く. Maxwell の方程式 (3-3), (3-4) より次式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{I_C} v_C(t) \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^r C_{mn}(v_C') v_{Cm}' dv_{Cm}' \\ & + \frac{d}{dt} \int_{I_L} i_L(t) \sum_{n=1}^{\wedge} \sum_{m=1}^{\wedge} L_{mn}(i_L') i_{Lm}' di_{Lm}' \\ & = \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^r v_{Cm}(t) C_{mn}(v_C(t)) \frac{dv_{Cn}(t)}{dt} \\ & + \sum_{n=1}^{\wedge} \sum_{m=1}^{\wedge} i_{Lm}(t) L_{mn}(i_L(t)) \frac{di_{Ln}(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} v_{Cm}(t) \dot{q}_m(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_m(t) v_{Lm}(t) \quad (5-4)$$

(5-4) 最右辺はキャパシタ及びインダクタのパワの和である。ところが(3-8)よりK上では

$$\sum_{n=1}^p v_{Rn} \dot{q}_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_{Cn} \dot{q}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n v_{Ln} = 0 \quad (5-5)$$

が成立する。(Tellegen の定理) K 上 Σ に注意すると(5-4)と(5-5)から(5-3)を得る。

(5-3) は工学的には次の事を述べている。キャパシタとインダクタに蓄められるエネルギーの変化率は抵抗のパワに負号を付けたものである。(5-3) から想いつくのは Lyapunov の安定理論である。電気回路網で古くから知られている受動性を用いて安定性を考える。

$$[\text{定義}] \quad W(a) \geq 0, \quad a \in \Sigma \quad (5-6)$$

を満たす電気回路網を受動(passive)回路網と言う。

例1のR自身は受動である(図4)がCを考慮に入れると必ずしも受動ではない。座標(v_C, i_L)に関して

$$W = v_R i_R + v_C i_C = f(i_L) i_L + v_C (-i_L) \quad (5-7)$$

となり、 v_C の値によっては $W < 0$ も起り得るからである。

Cが存在しなければもちろん受動である。例2についても同様の事が言える。但し議論は少々複雑である。

次の事はよくに解る。

[F] 各抵抗素子が受動であれば回路網も受動である。

[結果4] 仮定(A)は満たされているとし、 α_0 をダイナミクス
の平衡点のひとつとする。 α_0 の近傍 U であって次の条件
を満たすとする。

$$(1) \quad E(\alpha_0) = 0, \quad E(\alpha) > 0, \quad \alpha \in U - \{\alpha_0\}$$

(2) U 上で回路網は受動、可能な限り

$$W(\alpha) \geq 0, \quad \alpha \in U$$

この時 α_0 は安定平衡点である。

[結果5] 上と同じ状況のもとで(2)を次の条件でおきかえた
とする。

(2)' $U - \{\alpha_0\}$ で回路網は狭義受動、可能な限り

$$W(\alpha) > 0, \quad \alpha \in U - \{\alpha_0\}$$

この時 α_0 は漸近安定平衡点である。

[例3] 図1の回路網で e が存在せず、 R が図4の乗子特性
をもてば、平衡点 $(v_c, i_L) = (0, 0)$ は漸近安定である。

(注) α_0 が $E(\alpha_0) = 0$ を満足しない場合は少々工夫を要す
る。 $E(\alpha) - E(\alpha_0)$ は必ずしも正にならないからである。こ
の場合、 α を (v_c, i_c, v_L, i_L) -空間に射影したものを $(v_{c0},$
 $i_{c0}, v_{L0}, i_{L0})$ とし、(5-4)左辺の積分上限を各々 $v_c(t) -$
 v_{c0} 及び $i_L(t) - i_{L0}$ とすればうまく行く場合が多い。

§6 実質受動性と有界性

電気回路網の多くは $[0, \infty)$ で有界である。これらの回路網に共通した性質を抽出してその理由を調べてみたい。(5-7)を見ると f に適当な条件をつける事により

$$\lim_{\|(\mathcal{V}_L, \mathcal{I}_L)\| \rightarrow \infty} W(\mathcal{V}_L, \mathcal{I}_L) > 0 \quad (6-7)$$

となる。これはある有界集合の外部では、パワーが正になる事を意味する。パワーが正になる所では (5-3) によりエネルギーは減少する。従ってエネルギーが適当な条件を満足すれば回路網は $[0, \infty)$ で一様有界となる。受動性の定義 (5-6) を思い起ると (6-7) は実質受動性とも呼ぶ事ができると思う。以下これを形式化し、有界性について検討する。

[定義] Σ のコンパクト集合 Ω があって

$$W(\alpha) \geq 0, \quad \alpha \in \Sigma - \Omega \quad (6-2)$$

が成立する時、考えている回路網を実質受動と呼ぶ。

[結果5] 仮定 (A) は満足されているとする。もし

$$(1) \quad E(\alpha) \geq 0, \quad \alpha \in \Sigma.$$

$$(2) \quad E \text{ は proper ならば、任意の } \beta \geq 0 \text{ に対して}$$

$$\{\alpha \in \Sigma \mid E(\alpha) \leq \beta\} \text{ は有界}$$

$$(3) \quad \text{考えている回路網は実質受動.}$$

であればこの回路網は $[0, \infty)$ で一様有界である。

証明: 回路網が生成する flow を $\alpha(t)$ とする。 $\alpha(t)$ がコン

バック集合 Ω に属していない時はエネルギーが減少しているから結局エネルギーは $[0, \infty)$ で一様有界である。条件(2)よりエネルギーは proper であるから (b) も $[0, \infty)$ で一様有界である。

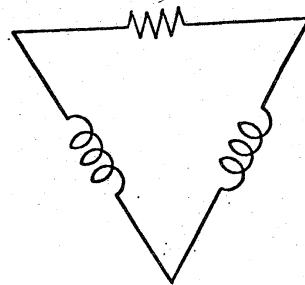
(6-2) で定義した実質受動性は極めて広いクラスの回路網が共有する性質である。例えば図1, 図2の回路網は実質受動である。

[G] 各抵抗素子が実質受動であれば回路網も実質受動である。

§7. その他

(3-11) に現われる π^*G が Σ 上の任意の点で singular になる事がある。例えば図4の回路網は抵抗素子特性がどのようなものであっても π^*G が Σ 上の任意の点で singular となる。この様な状況は forced degeneracy [4] と呼ばれている。この困難はある方法によって解決可能であるが長くなるので省略する。

図4



今迄述べてきた事及び関連する問題は [10] - [16] で議論されている。最後に電気工学者として私が知りたい諸事実をあげ

る。

[4]の最後にもいくつかの問題が述べられている。半合は面白いものであるが他の半合は私は興味を持っていない。

1 仮定(A)(ii)が満足されない場合、具体的にどの様な擾動を Γ に与えれば(A)(ii)が満たされるか。どこかの素子に並列あるいは直列に素子を加える様な方法が望ましい。

2 Γ の Π^*G に関する gradient である様なダイナミクス的一般の性質はどの様なものか。

3 最近の回路網の多くは(例えばIC)はインダクタレスであるが相反であるとは限らない。あるいは Π^*G は Riemannian であるか Γ は closed であるとは限らない。この事は何かを明らかにするのに役立つ。

4 電気回路網は種々のパラメータ変動に対して sensitive であるから構造安定等の性質は重要である。回路網に適用可能な結果は存在するか。

5 §1-§6の議論はひとつ工学的困難がある。それは抵抗の(a)を $\text{---} \bigcirc \text{---}$, $\text{---} \bigcirc \text{---}$ というシンボルをもった素子の扱いである。これらは普通独立電源と呼ばれていて、バッテリー等がこれに入る。一般にこれらの素子の電圧あるいは電流は時間の関数として前もって与えられている。例えば関東地方の電燈線の電圧は $v_e(t) = 100\sqrt{2} \sin 100\pi t$ である。

従って回路網のベクトル場は一般に time dependent である。
読者は別に大した問題ではないと思われるかも知れないが、
私は少し違った風に考えている。回路網のダイナミクスは
一般に

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t))$$

と書けるが、右辺の $u(t)$ への依存性を何らかの形で explicit
に表現したい。時間 t を新しい変数としたベクトル場を考え
る以外に方法はないだろうか。

6. 電気回路網の state space Σ 自身はコンパクトではないが、
§6 で見た様に多くの回路網は実質受動である。もう少し
詳しく調べれば state space $\Sigma' \subset \Sigma$ がコンパクトになる
様になるかも知れない。

文献

- [1] G. Ohm, Die Galvanische Kette, Berlin, (1827)
- [2] G. Kirchhoff, Über den Durchgang eines
electrischen Strömes durch eine Ebene,
insbesondere durch eine kreisförmige, Pogg, Ann.
64, 4 Stücke, Nr. 4 (1845)
- [3] R. Brayton and J. Moser, A theory of nonlinear
networks, Quart. Appl. Math., 22, 1-33, 81-104
(1964)

- [4] S. Smale, On the mathematical foundations of electrical circuit theory, *J. Differential Geometry*, 7, 193-210 (1972)
- [5] J. Bowers and S. Sedore, *SCEPTRE: A computer program for circuits and systems analysis*, Prentice-Hall, (1971)
- [6] R. Rohrer, *Circuit Theory*, McGraw-Hill (1970)
- [7] J. Ebers and J. Moll, Large signal behavior of junction transistors, *Proc. IEEE*, 42, 1761-1772 (1954)
- [8] S. Stern, *Nonlinear networks and systems*, Addison-Wesley, (1966)
- [9] R. Brayton, *Nonlinear reciprocal networks*, *SIAM-AMS Proceedings*, III, 1-15, (1971)
- [10] 川上, ある電気回路の力学系, 1974.
- [11] 松本, 非線形回路網のいくつかの性質について, 電子通信学会論文集, to appear
- [12] _____, 非線形回路網のダイナミクスの定性的考察, *ibid*, to appear.
- [13] _____, 非線形回路網におけるエネルギー関数について, *ibid*, to appear.
- [14] _____, *On the dynamics of electrical networks*,

J. Differential Equations, to appear

[15] ———, Dynamical systems arising from electrical networks, Proc. Int. Symp. Dynamical Systems at Providence, Academic Press, to appear

[16] ———, On a class of nonlinear networks, Int.

J. Circuit Theory and Applications, to appear

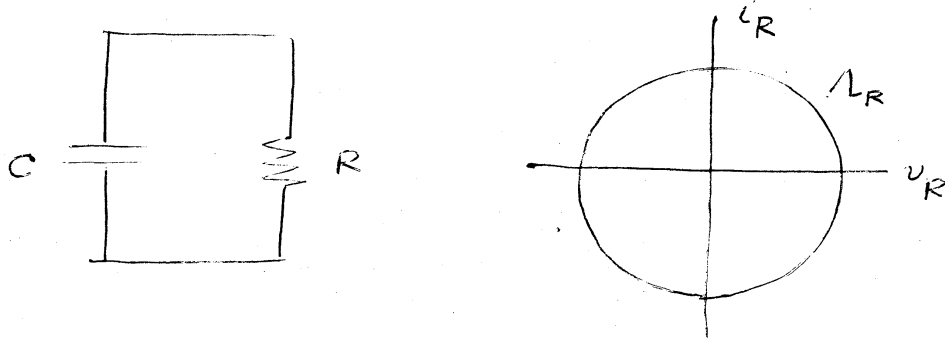
[17] ———, On several geometric aspects of nonlinear networks, J. Franklin Institute - Proc. IEEE Joint Special Issue on Systems Theory, to appear.

[18] 近藤, 石塚, 大島, 藤中, 工学力学系, 岩波, (1957)

(注) [18]は電気回路網をはじめとしていくつかの工学系を Riemann 空間内の Lagrange 力学系としてとらえた unique な仕事である。

後記

§4 [E] の Σ の単連結性が無い場合について川上博 氏の example を与えた。



キャパシタは線形とある。明らかに Σ と L_R は同じものである。 $\Sigma = S^1$ は1次元多様だから、 $\pi^*(\nu_R \text{ dir})$ は常にclosedである。従って上の回路は相反である。 Σ 上のベクトル場から生成されるフローは Σ 上を回るだろうというのが川上氏の予想である。 π がsingularになる英がふてくるのでそれを上手く処理する必要があると思う。

最後に極めて興味深い御討議をいただいた方々に感謝する。