

On homology n -sphere in S^{n+1}

東洋大 (工) 山下正勝

§ 1. 序.

homology n -sphere の $(n+1)$ -sphere $\wedge$ の (Codim. 1 の) embedding についての結果を整理し、未解決 (と思われる) 問題を明確にするのがこの報告の目的である。断わらない限り、category は PL である。boundary をもつ manifold M に対して ∂M , M の double を $2M$ であらわす。standard n -sphere を S^n であらわす。

homology n -sphere Σ^n が S^{n+1} に embed された状態を考える。 $S^{n+1} - \Sigma^n$ は 2つの連結成分から成る。その各連結成分の closure をそれぞれ A, B とあらわすことにする。すなわち

$$S^{n+1} = A \cup B,$$

$$A \cap B = \Sigma^n$$

である。この状態のとき $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ と書く。

/

§ 2. homology n -sphere の S^{n+1} への embedding の可能性について.

compact contractible manifold M に対して Lefschetz duality theorem から次の同型:

$$H_k(\partial M) \xleftarrow{\cong} H_{k+1}(M, \partial M) \cong H^{n-k-1}(M)$$

が得られる. したがって compact contractible $(n+1)$ -manifold の boundary はいつても homology n -sphere であることがわかる. 逆に次の結果が知られている.

Proposition 1. (Kervaire [3]) (イ) $n \geq 4$ ならば, 任意の homology n -sphere は或る compact contractible $(n+1)$ -manifold の boundary である.

(ロ) $n=3$ のとき, どんな compact contractible 4-manifold の boundary にも なり得ない homology 3-sphere Γ^3 が存在する.

Proposition 1 (ロ) の Γ^3 は いわゆる Poincaré sphere と呼ばれるもので, この Γ^3 は compact acyclic 4-manifold の boundary にもならないことを加藤十吉氏に教えていただいた.

問題 1. acyclic 4-manifold の boundary にはなるか.
contractible 4-manifold の boundary にはなり得ない
homology 3-sphere は存在するか?

Proposition 2. (1) $n \geq 4$ ならば、任意の homology n -sphere は S^{n+1} に (locally flat に) embed できる.

(2) $n=3$ のとき、 S^4 に embed できない homology 3-sphere が存在する.

(証明). (1) を示す. Proposition 1 により、 $n \geq 4$ のときには任意の homology n -sphere Σ^n は 或る compact contractible $(n+1)$ -manifold M の boundary になっている. ところが $n+1 \geq 5$ であることから $M \times I = I^{n+2}$ である ([1], [6]). すなわち

$$\Sigma^n = \partial M \subset \partial(M \times I) = S^{n+1}$$

となり、作り方から明らかに locally flat である.

(2) の例としては Poincaré sphere Γ^3 がある.

Γ^3 はどんな compact acyclic manifold の boundary にもなり得ない. ところが一般に homology n -sphere Σ^n が S^{n+1} に embed されたとして $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ を考えると、Alexander duality theorem から

$$H_k(S^{n+1} - \Sigma^n) \cong \tilde{H}^n(\Sigma^n)$$

であるから A, B はともに acyclic でなければならぬ。
 Γ^3 はこのような A, B を持ち得ない。

S^4 に (locally flat に) embed できる homology 3-sphere は勿論存在する (たとえば Mazur [4] の作ったもの)。したがって次の問題が起こる。

問題 2. homology 3-sphere が S^4 に embed できるための条件を求めよ。

この問題はいろいろな形に作り変えられるが、微妙に 4次元 Poincaré Conjecture に関係するようである。もしも 4次元 Poincaré Conjecture が正しいとすると、compact contractible 4-manifold の boundary になり得る homology 3-sphere はすべて S^4 に (locally flat に) embed できる。したがってたとえば「compact contractible 4-manifold M^4 の boundary が S^4 に embed できるとき、 M^4 自身が S^4 に embed できるか？」ということも問題になる。これは「 $M^4 \times I = S^5 \Leftrightarrow$ 4次元 Poincaré Conjecture が正しい ([6] 参照)」ことを考えると少なくとも 4次元 Poincaré Conjecture

よりいくらかは易しい問題(のはず)である。

§3. homology n -sphere の embedding の様子について.

$n \geq 4$ のとき. 任意の homology n -sphere Σ^n は. 或る compact contractible $(n+1)$ -manifold M^{n+1} の boundary になっている (Proposition 1). 一方 $n \geq 5$ に対して $M^{n+1} \times I = I^{n+2}$ とする ([1], [6]) から

$$\Sigma^n \hookrightarrow \partial M = \partial(M^{n+1} \times I) = S^{n+1}$$

となる. すなわち 任意の homology n -sphere Σ^n ($n \geq 4$) に対して A, B がともに contractible と なるような (locally flat な) embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ が存在する.

$n=3$ の場合にも たとえば Mazur [4] の作った homology 3-sphere Λ^3 は この性質をもっている. 勿論 contractible 4-manifold の boundary になり得ない homology 3-sphere (たとえば Poincaré sphere Γ^3) は問題にならないか: 4次元 Poincaré Conjecture が正しければ contractible 4-manifold M^4 の boundary に対して. A, B がともに contractible と なる embedding

$(S^4, \partial M; A, B)$ が存在する. 4次元 Poincaré Conjecture を仮定せずにこのことが言えないうるか?

問題 3. contractible 4-manifold の boundary ∂M に対し A, B がともに contractible となるような embedding $(S^4, \partial M; A, B)$ が存在するか?

acyclic 2-complex K^2 を S^5 に embed する. $N = N(K^2, S^5)$ を K^2 の regular neighborhood とする. そのとき $N \simeq K^2$ であり, Alexander duality theorem と general position theorem から $W = \overline{S^5 - N} = \overline{S^5 - K^2}$ は contractible である. また $\pi_1(\partial N) \cong \pi_1(N - K^2) \cong \pi_1(N) \cong \pi_1(K^2)$ である. すなわち ∂N は K^2 と同じ基本群をもつ homology 4-sphere であり, $(S^5, \partial N; N, W)$ で N は contractible であり, W は contractible である. $n \geq 5$ の場合も同様である.

すなわち $n \geq 4$ のときは任意の homology n -sphere $\Sigma^n (\neq S^n)$ に対して $\pi_1(\Sigma'^n) \cong \pi_1(\Sigma^n)$ なる homology n -sphere Σ'^n で A は contractible であり, B は contractible であるような locally flat embedding $(S^{n+1}, \Sigma'^n; A, B)$ ももつものがある.

$n=3$ に対しては Neuzil [5] の結果がある.

問題 4. 任意の homology n -sphere $\Sigma^n (\neq S^n)$ に対して. A は contractible τ -c.c., B は contractible τ -c.c. であるような embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ が存在するか?

問題 5. compact contractible n -manifold M は $[\frac{n}{2}]$ -polyhedron $\wedge$ collapse τ -c.c. か?

この問題は否定的な気がするが、もし問題 5 が $n \geq 4$ に対して成り立つならば、問題 4 も $n \geq 4$ に対して正しい。またこれに関連して次の問題がある。

問題 6. compact contractible 4-manifold M^4 に対して. $M^4 \times I$ は 2-complex $\wedge$ collapse τ -c.c. か?

問題 7. contractible 2-complex K^2 の S^5 における regular neighborhood $N(K^2, S^5)$ は I^5 か?

問題 6 及び 7 がともに正しいことと 4次元 Poincaré Conjecture が正しいことは同値である。また $K^2 \times I \searrow \cdot$ ならば $N(K^2, S^5) = I^5$ となることもわかっている ([7])。

acyclic 2-complex について Fenn [2] は 次のような興味ある問題も提出している。

問題 8. S^4 に embed できる acyclic 2-complex は存在するか？

さて本題にもどって、 A, B がともに contractible であるような embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ が作れるかという問題が残っているが、それは次のようにして作ることができる。

$(S_1^{n+1}, \Sigma_1^n; A_1, B_1), (S_2^{n+1}, \Sigma_2^n; A_2, B_2)$ という 2 つの locally flat な embeddings を考える。ここには S_1^{n+1}, S_2^{n+1} はともに standard $(n+1)$ -sphere であるが、便宜上、別々にしたものである。 Σ_1^n, Σ_2^n はそれぞれ homology n -sphere である。homeomorphic である必要もない。また、 A_1 と B_2 は contractible でなく、 B_1 と A_2 は contractible である。このような embeddings が任意の $n(\geq 3)$ に対して作れることはすでに述べた。

いま $x_1 \in \Sigma_1^n, x_2 \in \Sigma_2^n$ を適当に選び、 x_i の S_i^{n+1} における disk neighborhood D_i^{n+1} を考える。そして connected sum $S_1^{n+1} \# S_2^{n+1} = (S_1^{n+1} - D_1) \cup (S_2^{n+1} - D_2)$ を

$$\partial D_1 \cap A_1 = \partial D_2 \cap A_2$$

$$\partial D_1 \cap B_1 = \partial D_2 \cap B_2$$

$$\partial D_1 \cap \Sigma_1 = \partial D_2 \cap \Sigma_2$$

を identify して作る. すると自然に connected sum $\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$ と disk sums A_1 と A_2 , B_1 と B_2 が構成できる.

作り方から明らかに

$\Sigma_1^n \# \Sigma_2^n$ は homology n -sphere,

$S^{n+1} \# S^{n+1} = S^{n+1}$ (standard $(n+1)$ -sphere),

A_1 と A_2 , B_1 と B_2 はともに contractible である.

したがって $(S^{n+1}, \Sigma_1^n \# \Sigma_2^n; A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$ は求める embedding である.

津久井康之氏は次のような問題を提出された. これに対する解答は現在のところ (著者には) わからない.

問題 9. homology n -sphere Σ^n の基本群が nontrivial groups の free product に分解できない場合は A, B がともに contractible であるような embedding $(S^{n+1}, \Sigma^n; A, B)$ は存在しない?

文 献

- [1] M.L. Curtis, Cartesian products with intervals, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 819-820.
- [2] R. Fenn, Embedding polyhedra, Bull. London Math Soc. 2 (1970), 316-318.
- [3] M.A. Kervaire, Smooth homology spheres and their fundamental groups, Trans. Amer. Math. Soc. (1969) 67-72.
- [4] B. Mazur, A note on some contractible 4-manifolds, Ann. of Math. 73 (1961), 221-228.
- [5] J. P. Neuzil, Embedding the dunce hat in E^4 (pre-print).
- [6] M. Yamashita, On the product structure of contractible manifolds, Research Rep. of general education c. Toyo Univ. (to appear).
- [7] M. Yamashita, (to appear).