

イデアル類群の指標をもつ L 関数の UNIVERSALITY

見正 秀彦 (MISHOU HIDEHIKO)
名古屋大学多元数理科学研究科

1. INTRODUCTION

$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ とする。半平面 $\Re s > 1$ で Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ が

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義される。1975年、S.M.Voronin は次の結果を証明した。

Theorem (Voronin). $0 < r < \frac{1}{4}$ とし、 $f(s)$ を $|s| \leq r$ 上連続かつ零点を持たず、 $|s| < r$ 内で正則な関数とする。

この時、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し、実数の集合 $A = A(r, f, \varepsilon)$ で正の下極限密度を持つ、即ち、

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{m(A \cap [0, T])}{T} > 0 \quad (m: \mathbb{R} \text{ 上の Lebesgue 測度})$$

を満たすものが存在し、 $\forall \tau \in A$ に対し

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。

この定理を Riemann ゼータ関数の Universality theorem と呼ぶ。

この定理の主張は、大雑把に言うと、任意の正則関数は Riemann ゼータ関数の垂直方向への並行移動によってコンパクト一様近似でき、しかもそのような近似を与える実数全体の集合の密度は正である、ということである。

この後、どのようなゼータ関数、L 関数が Universality theorem を持つのか調べられてきた。

まず1977年、S.M.Gonek が Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s, \alpha)$ について α が有理数もしくは超越数である場合、Universality theorem が成り立つことを証明した。1979年、A.Reich は代数体の Dedekind zeta 関数について Universality theorem を証明した。1980年、B.Bagchi は Riemann zeta 関数の Universality theorem の別証明を与えるとともに、1982年、Dirichlet L 関数の joint Universality theorem を証明した。その後、具体的な結果はしばらく得られていなかったが、90年代に入り、A.Laurincikas, K.Matsumoto らを中心に Universality theorem の研究が進められ、Hecke eigenform に付随する L 関数、Rankin-Selberg L 関数についてそれぞれ Universality theorem が得られている。

今回、次のように定義される L 関数について結果が得られた。
 K を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限次代数拡大、 K の整イデアル $\mathfrak{f}$ に対し、

$$A(\mathfrak{f}) = \{\mathfrak{a}: K \text{ のイデアル } |(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1\}, \quad B(\tilde{\mathfrak{f}}) = \{(\alpha) | \alpha \equiv 1 \pmod{\tilde{\mathfrak{f}}}\}$$

ととる。これらはイデアルの乗法についてアーベル群をなし、 $B(\tilde{\mathfrak{f}})$ は $A(\mathfrak{f})$ の部分群である。
 そこでその商群を $Cl(K, \tilde{\mathfrak{f}})$ で表す。これは有限アーベル群になることが知られており、その指標を χ ととる。この指標 χ に対し、 $\Re s > 1$ 上で

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$$

と定義する。ここで右辺の和は 0 でない K 上の整イデアルについてとり、 $N(\mathfrak{a})$ はイデアル $\mathfrak{a}$ のノルムである。

今回得た結果は次の通りである。

Theorem. K, χ は上の通りとする。 $n = [K, \mathbb{Q}]$ とし、

$$\sigma_K = \begin{cases} \frac{1}{2}, & K = \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置く。 $D = D_r(s_0) = \{s \in \mathbb{C} | |s - s_0| \leq r\}$ は帶領域 $\sigma_K < \Re s < 1$ に含まれるものとし、 $f(s)$ は D 上の零点を持たない連続関数で、その内部で正則なものとする。

このとき、 $\forall \epsilon > 0$ に対し、正の下極限密度を持つ実数の集合 $A = A(\chi, D, f, \epsilon)$ が存在し、 $\forall \tau \in A$ について次の不等式が成り立つ。

$$\max_{s \in D} |f(s) - L(s + i\tau, \chi)| < \epsilon$$

2. 証明の概略

これから **Theorem** の証明の概略について述べる。Voronin の原証明と limit theorem を用いる証明の 2 通りの証明があるが、ここでは Voronin の原証明に基づいた証明について述べる。limit theorem を用いた証明も可能であることを注意しておく。

まずいくつか記号を定義する。

Definition.

(1) Ω を素数を添字とする実数列全体の集合

$$\Omega = \prod_p \mathbb{R}_p \quad \mathbb{R}_p = \mathbb{R}$$

と定める。

(2) $L(s, \chi)$ は $\Re s > 1$ で次の Euler 積表示を持つ。

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1}$$

ここで $\mathfrak{p}$ は K の素イデアル全体を動く。

素数 p の K における素イデアル分解を次のように表す。

$$p = \prod_{i=1}^{z_p} \mathfrak{p}_i^{x_i} \quad N(\mathfrak{p}_i) = p^{y_i}$$

この表示を用いて $\{f_p(z)\}$ を次のように定める。

$$L(s, \chi) = \prod_p \left\{ \prod_{i=1}^{z_p} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p}_i)}{p^{y_i s}} \right)^{-1} \right\} = \prod_p f_p\left(\frac{1}{p^s}\right)$$

M を素数の有限集合、 $\bar{\theta} = \{\theta_p\}_p \in \Omega$ とする。このとき、

$$L_M(s, \chi, \bar{\theta}) = \prod_{p \in M} f_p\left(\frac{e(-\theta_p)}{p^s}\right)$$

と定める。

(3) L を $Cl(K, \tilde{f})$ 上の類体とする。 L で完全分解する素数全体の集合を $\mathbb{P}_L$ と定める。後に見るように $\mathbb{P}_L$ は可算無限集合である。そこで $\mathbb{P}_L$ 内の素数に大きさ順に番号を降っておく。 $\bar{\theta}_0 = \{\theta_p^{(0)}\} \in \Omega$ を次のように定める。 $p \in \mathbb{P}_L$ に対し、

$$\theta_p = \frac{l_p}{4}$$

と定める。ここで l_p は p の $\mathbb{P}_L$ 内での番号である。それ以外の p に対しては、

$$\theta_p = 0$$

ととる。これらを用いて、

$$\theta_p^{(0)} = \theta_p - \frac{t_0 \log p}{2\pi}$$

と定義する。ここで $s_0 = \sigma_0 + it_0$ である。

以上の記号の下で、次の lemma を証明しよう。

Lemma 1. $g(s)$ を D 上の連続関数で、 D の内部で正則なものとする。

このとき、 $\forall \epsilon > 0, \forall y > 0$ に対し、次の性質をもつ素数の有限集合 M が存在する。

- (1) M は y 以下の素数を全て含む。
- (2) 次の不等式が成り立つ。

$$\max_{s \in D} \left| \log L_M(s, \chi, \bar{\theta}_0) - g(s) \right| < \epsilon$$

この lemma から **Theorem** は次のようにして証明できる。

$\tau \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\theta_p(\tau) = \frac{\tau \log p}{2\pi}, \quad \bar{\theta}(\tau) = \{\theta_p(\tau)\}_p \in \Omega$$

と定める。このとき次の不等式を考える。

$$\begin{aligned} & \max_{s \in D} |\log L(s + i\tau, \chi) - g(s)| \\ & \leq \max_{s \in D} |\log L_M(s, \chi, \bar{\theta}_0) - g(s)| + \max_{s \in D} |\log L_M(s, \chi, \bar{\theta}_0) - \log L_M(s, \chi, \bar{\theta}(\tau))| \\ & \quad + \max_{s \in D} |\log L(s + i\tau, \chi) - \log L_M(s, \chi, \bar{\theta}(\tau))| \end{aligned}$$

Lemma 1. の (2) から、この右辺の第一項は ϵ で抑えられる。一方、集合 $\{\log p\}$ の任意有限個の元は $\mathbb{Q}$ 上一次独立になることから、Kronecker の近似定理を用いることにより、第二項が ϵ で抑えられるような実数 τ 全体の集合が正の下極限密度を持ち、さらに y を十分大きくとれば、 $L(s, \chi)$ の解析的な性質から、第三項も ϵ で抑えられるような τ 全体の集合が正の下極限密度をもつことが証明できる。

以上のようにして、**Lemma 1.** から **Theorem** の証明が得られる。

3. Lemma 1. の証明

$H^2(D)$ を D 上の L^2 -関数で、 D の内部で正則なものの全体のなす空間、いわゆる、 D 上の Hardy 空間とする。 $H^2(D)$ は内積を

$$(f, g) = \Re \left(\iint_D f(s) \overline{g(s)} d\sigma dt \right) \quad (f, g \in H^2(D))$$

と定義すると、この内積に関し実 Hilbert 空間になることに注意する。

$H_2(D)$ の位相がコンパクト一様収束であることに注意すると、**Lemma.1** は次の lemma から従うことは明らかである。

Lemma 2. 級数

$$\sum_p \log f_p \left(\frac{e(-\theta_p^{(0)})}{p^s} \right)$$

の並び変えで、 $H^2(D)$ 内で収束するものの全体の集合は $H^2(D)$ 自身と一致する。

ここで、

$$\alpha_p = \sum_{\substack{i=1 \\ v_i=1}}^{z_p} \chi(\mathfrak{p}_i) \quad , \quad h_p(s) = \frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^s}$$

とおく。すると次の不等式が成り立つ。

$$\sum_p \left\| \log f_p \left(\frac{e(-\theta_p^{(0)})}{p^s} \right) - h_p(s) \right\| < \infty$$

この不等式から、**Lemma 2.** は級数 $\sum_p h_p(s)$ について証明すれば十分であることが分かる。

Lemma 2. を証明するため、実 Hilbert 空間に関する次の lemma を用いる。

Lemma 3 (Pecherskii). H : 実 Hilbert 空間とする。 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ は以下の性質を満たす。

(1) 次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$$

(2) $\forall e \in H$ s.t. $\|e\| = 1$ に対し、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n, e)$$

は条件収束ではあるが、絶対収束ではない。

このとき、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

の並び変えで H 内で収束するもの全体の集合は H と一致する。

この lemma を $H_2(D), \{h_p(s)\}$ に当てはめると、**Lemma 2.** を証明するには、次の 2 つの条件が成り立つことを証明すればよい。

(1) 次の不等式が成り立つ。

$$\sum_p \|h_p(s)\|^2 < \infty$$

(2) $\forall \phi(s) \in H_2(D)$ s.t. $\|\phi\| = 1$ に対し、級数

$$\sum_p (h_p, \phi)$$

は条件収束するが、絶対収束しない。

まず (1) について、 D についての仮定から、 $\sigma_0 - r > \frac{1}{2}$ より、

$$\sum_p \|h_p\|^2 \ll \sum_p \frac{1}{p^{2(\sigma_0 - r)}} < \infty$$

次に (2) について、仮定を満たす ϕ を一つとり固定する。 $\sum_p (h_p, \phi)$ が条件収束するが絶対収束しないということは次の 2 つの条件と同値である。

- $(h_p, \phi) \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$
- $\sum_p (h_p, \phi)$ の部分級数で $\infty, -\infty$ に発散するものがそれぞれ存在。

Cauchy の不等式より、

$$|(h_p, \phi)| \leq \|h_p\|^{\frac{1}{2}} \|\phi\|^{\frac{1}{2}} \ll \frac{1}{p^{2(\sigma_0 - r)}} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

そこで $\infty, -\infty$ に発散する部分級数の存在を示そう。

$\phi(s)$ の Taylor 展開を

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

とおく。この表示を用いて (h_p, ϕ) を計算してみると、

$$\begin{aligned} (h_p, \phi) &= \Re \left(\alpha_p e(-\theta_p^{(0)}) \iint_D \frac{1}{p^s} \overline{\phi(s)} d\sigma dt \right) \\ &= \Re \left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} \iint_D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{-(s-s_0)\log p\}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m (s-s_0)^m} d\sigma dt \right) \\ &= \Re \left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi \bar{a}_m r^{m+2}}{(m+1)!} (r \log p)^m \right) \\ &= \Re \left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} G(r \log p) \right) \end{aligned}$$

と表せる。ここで

$$b_m = \frac{(-1)^m \pi \bar{a}_m r^{m+2}}{m+1}, \quad G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} z^m$$

とおいた。

さて $\|\phi\| = 1$ から、

$$|b_m| = 1 \quad (\forall m \geq 0)$$

であることが分かる。このとき $G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} z^m$ について整関数の理論から、発散する正の単調増加列 $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, 正定数 C_1, C_2 が存在して、 $l_m = \frac{C_1}{R_m+2}$, $I_m = [R_m, R_m + l_m]$ ととると、不等式

$$|\Re G(x)| > \frac{C_2}{e^x} \quad (x \in I_m)$$

が成り立つことが分かる。

この区間 $I_m (m \in \mathbb{N})$ を用いて素数の有限集合 $K_m (m \in \mathbb{N})$ を次のように定める。

- $|\Re G(x)| > \frac{C_2}{e^x} \quad (x \in I_m)$ のとき

$$K_m = \{p | p \in \mathbb{P}_L \quad r \log p \in I_m \quad l_p \equiv 0 \pmod{4}\}$$

- $|\Re G(x)| < -\frac{C_2}{e^x} \quad (x \in I_m)$ のとき

$$K_m = \{p | p \in \mathbb{P}_L \quad r \log p \in I_m \quad l_p \equiv 2 \pmod{4}\}$$

さて、 $\forall p \in \mathbb{P}_L$ に対し、類体の分解定理から、

$$p \in \mathbb{P}_L$$

$$\Rightarrow p = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n \quad (K \text{ で完全分解}) \quad , \text{ 各 } \mathfrak{p}_i \text{ は } L \text{ で完全分解}$$

$$\Rightarrow p = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n \quad , \chi(\mathfrak{p}_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow \alpha_p = n$$

であることが分かる。よってこの関係式と上記 $I_m (m \in \mathbb{N})$ の性質から、 $\forall p \in K_m$ に対し、

$$\begin{aligned}
 (h_p, \phi) &= \Re \left(\frac{\alpha_p e(-\theta_p^{(0)})}{p^{s_0}} G(r \log p) \right) \\
 &\geq \frac{n}{p^{s_0}} |\Re G(r \log p)| \\
 (1) \quad &\gg \exp \left(-\left(\frac{\sigma_0}{r} + 1 \right) (R_m + l_m) \right)
 \end{aligned}$$

一方、 K_m の元の個数は、

$$\#K_m = \frac{1}{4} \left\{ \pi \left(e^{\frac{R_m + l_m}{r}}, L \right) - \pi \left(e^{\frac{R_m}{r}}, L \right) \right\} + o(1)$$

ここで、

$$\pi(x, L) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}_L}} 1$$

とした。 $\pi(x, L)$ については、Chebotarev の密度定理より、

$$\pi(x, L) = \frac{1}{N_L} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O \left(x e^{-c\sqrt{\log x}} \right)$$

である。ここで $N_L = [\bar{L} : \mathbb{Q}]$, $\bar{L} : L$ の Galosi 閉体とした。

この公式から $\#K_m$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \#K_m &= \frac{1}{4N_L} \int_{e^{\frac{R_m}{r}}}^{e^{\frac{R_m + l_m}{r}}} \frac{dt}{\log t} + O \left(e^{\frac{R_m + l_m}{r}} e^{-c\sqrt{\frac{R_m + l_m}{r}}} \right) \\
 (2) \quad &\gg \frac{e^{\frac{R_m}{r}}}{R_m^3}
 \end{aligned}$$

(1), (2) より、

$$\sum_{p \in K_m} (h_p, \phi) \gg \frac{1}{R_m^3} \exp \left(\left(\frac{1 - \sigma_0}{r} - 1 \right) R_m \right) \exp \left(-\left(\frac{\sigma_0}{r} + 1 \right) l_m \right)$$

$m \rightarrow \infty$ としたとき、 $R_m \rightarrow \infty$ だから、この右辺は ∞ に発散する。従って ∞ に発散する部分級数の存在が示せた。 $-\infty$ に発散するものについては K_m の定義において、 l_p についての条件を入れ換えてやれば良い。

REFERENCES

1. Karatsuba-Voronin. *The Riemann Zeta-Function* Walterde Gruyter., 1992
2. A.Laurincikas. *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function* Kluwer Acad.Publ., Dordrecht/Boston/London., 1996
3. S.M.Gonek. *Analytic properties of zeta and L-functions* Ph.D.Thesis. University of Michigan., 1979
4. A.Reich. *Werteverteilung von Zetafunktionen* Arch.Math.34., 1980