

閉作用素の摂動について

京大 数研 浅野 潔

§ 1. 準備

1. 記号.

$X, X_1, \dots$ Banach spaces (norm: $\|\cdot\|$)

$L(X, X_1)$ $X \supset D(T) \rightarrow R(T) \subset X_1$, T is closed

linear operator T の全体

$L_0(X, X_1) = \{T \in L(X, X_1); D(T)^a = X\}$

$B(X, X_1) = \{T \in L(X, X_1); D(T) = X\}$

$\|T\|$. $T \in B(X, X_1)$ の operator norm

$N(T) = \{u \in D(T); Tu = 0\}$, $T \in L(X, X_1)$

$\Phi(X, X_1) = \{T \in L_0(X, X_1); \dim N(T) < \infty,$

$R(T)$ closed in X_1 , $\dim X_1/R(T) < \infty\}$

$= X$ から X_1 への Fredholm operator 全体

$T \in \Phi(X, X_1)$ に対して, $\alpha(T) = \dim N(T)$

$\beta(T) = \dim X_1/R(T)$

$\kappa(T) = \alpha(T) - \beta(T)$

$$\Phi_j(x, x_1) = \{T \in \Phi(x, x_1) ; \kappa(T) = j\}$$

$$\mathcal{C}_\infty(x, x_1) = \text{ } x \text{ から } x_1 \text{ への compact linear operator} \\ \text{の全体} \subset \mathcal{B}(x, x_1)$$

$$\mathcal{C}_0(x, x_1) = \{T \in \mathcal{B}(x, x_1) ; \dim \mathcal{R}(T) < \infty\}$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x, x), \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x, x) \text{ etc.}$$

$T \in \mathcal{L}_0(x)$ に対して,

$$\rho(T) = \text{resolvent set of } T, \quad \sigma(T) = \text{spectrum of } T$$

$$\sigma_p(T) = T \text{ の (代数的) 重複度有限の孤立固有値} \\ \text{の全体}$$

$$\Phi(T) (\Phi_j(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \lambda - T \in \Phi(x) (\Phi_j(x))\}$$

$$\bar{\rho}(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \subset \Phi_0(T)$$

$$\sigma_e(T) = \Phi(T)^c \quad \text{essential spectrum of } T$$

$U \in \mathbb{C}^m$ の domain (又は open set) とするとき,

$$\mathcal{A}(U; x) = U \text{ で定義された } x\text{-valued analytic} \\ \text{function の全体}$$

$$\mathcal{M}(U; x) = U \text{ で定義された } x\text{-valued meromorphic} \\ \text{function の全体}$$

$\mathcal{B}(x, x_1)$ は operator norm を norm として Banach space になるが, $\mathcal{C}_0(x, x_1)$ は ($\dim x_1 = \infty$ である限り) Banach space にはならない。しかし, 後の便利のため $\mathcal{A}(U; \mathcal{C}_0(x, x_1))$ 等を次の如く定義する。

定義 1. $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$ ($\sim \mathcal{M}(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$)

$\Leftrightarrow$

i) $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}(x, x_1))$ ($\mathcal{M}(U; \mathcal{B}(x, x_1))$)

ii) $\forall a \in U$ に対して, a のある近傍 $U(a)$ が存在し,

$T(z)$ は $U(a)$ で次の形に展開される:

$$(1.1) \quad T(z) = \sum_{j=1}^k \langle \cdot, x_j(z) \rangle \varphi_j(z) = \sum \varphi_j(z) \otimes x_j(z)^*,$$

$z \in U$ で $\varphi_j(z) \in \mathcal{A}(U(a); x_1)$, $x_j(z)^* \in \mathcal{A}(U(a); x^*)$ ($\mathcal{M}(U(a); x^*)$), $x^* = \mathcal{B}(x, \mathbb{C}) = \text{dual space of } x$.

定義 2. $T(z) \in \mathcal{A}_0(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$ ($\sim \mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$)

$\Leftrightarrow$

i) $\left\{ \begin{array}{l} \text{定義 1 に同じ,} \\ \text{ii) } \end{array} \right.$

iii) (1.1) において, $z \in U(a)$ のとき $\{\varphi_j(z); j=1, \dots, k\}$

は 1 次独立.

注意 1. $m=1$ のときは, $\mathcal{A}(U; \mathbb{C}_0(x, x_1)) = \mathcal{A}_0(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$, $\mathcal{M}(U; \mathbb{C}_0(x, x_1)) = \mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$.

注意 2. $T(z) \in \mathcal{A}_0(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$ ($\mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_0(x, x_1))$)

は次の λ と ε の値がある:

i) $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}(x, x_1))$ ($\mathcal{M}(U; \mathcal{B}(x, x_1))$)

ii) $\forall a \in U$, $\exists U(a)$ a の近傍, $\exists P(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}(x_1))$:

$$P(z)^2 = P(z) \quad \& \quad P(z)T(z) = T(z) \quad z \in U(a).$$

注意 3. 注意 2 ii) ($P(z)T(z) = T(z)$ を除き) を満たす $P(z)$ は, $\mathcal{A}_0(U(a); \mathbb{C}_0(x_1))$ に属する。従って a のある近傍 $V(a)$ で次の形をもつ:

$$(1.2) \quad P(z) = \sum_{j=1}^k \langle \cdot, \varphi_j(z) \rangle \varphi_j(z)^* = \sum \varphi_j(z) \otimes \varphi_j(z)^*,$$

$z \in V(a)$ $\varphi_j(z) \in \mathcal{A}(V(a); x_1)$, $\varphi_j(z)^* \in \mathcal{A}(V(a); x_1^*)$ かつ

$$\langle \varphi_i(z), \varphi_j(z) \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad z \in V(a).$$

従って, $T(z)$, $P(z)$ が注意 2 i), ii) を満たすときは,

$$(1.3) \quad t_{ij}(z) = \langle T(z) \varphi_j(z), \varphi_i(z) \rangle = \langle \varphi_j(z), x_i(z) \rangle$$

とおく,

$$(1.4) \quad T(z)P(z) = \sum \varphi_i(z) t_{ij}(z) \otimes \varphi_j(z)^*, \quad z \in V(a).$$

次に $B_0(x, x_1) = B(x, x_1) \cap \mathbb{D}_0(x, x_1)$ とおき, $\mathcal{A}(U; B_0(x, x_1))$ 等を定義する. ($B_0(x, x_1)$ は $B(x, x_1)$ の open set である.)

定義 3. $T(z) \in \mathcal{A}(U; B_0(x, x_1))$

$(\Leftrightarrow)$

$$i) \quad T(z) \in \mathcal{A}(U; B(x, x_1))$$

$$ii) \quad T(z) \in B_0(x, x_1), \quad \forall z \in U.$$

定義 4. $T(z) \in \mathcal{M}_0(U; B_0(x, x_1))$ ($\mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_\infty(x))$)

$(\Leftrightarrow)$

$$i) \quad T(z) \in \mathcal{M}(U; B(x, x_1)) \quad (\mathcal{M}(U; \mathbb{C}_\infty(x)))$$

$$ii) \quad T(z) \text{ の singularity } \Sigma \omega_1 \text{ とするとき, } T(z) \in B_0(x, x_1), \\ z \in U - \omega_1,$$

iii) $\forall a \in \omega_1$ に対して, a のある近傍 $U(a)$ で $\exists T_0(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}_0(x, x_1))$ ($\mathcal{A}(U(a); \mathcal{C}_\infty(x))$), $\exists T_1(z) \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathcal{C}_0(x, x_1))$ ($T_1(z) \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathcal{C}_0(x))$);

$$T(z) = T_0(z) + T_1(z), \quad z \in U(a) - \omega_1.$$

最後に, 簡単のため次の約束をする.

$$\mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(U; \mathbb{C}), \quad \mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(U; \mathbb{C}).$$

2. trace と determinant

$S \in \mathcal{C}_0(x)$ は, 次の形にかけらる:

$$S = \sum_{j=1}^k \langle \cdot, x_j \rangle \varphi_j = \sum \varphi_j \otimes x_j^*$$

$$\varphi_j \in x, \quad x_j \in x^*, \quad \{\varphi_j\}, \{x_j\} \text{ は 1 次独立.}$$

いま $\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \delta_{ij}$ なる $\varphi_i \in x^*$ ($i=1, \dots, k$) をとって

$$a_{ij} = \langle S \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle \varphi_j, x_i \rangle$$

とおく. $\operatorname{tr} S$ と $\det(1-S)$ を次のように定義する:

$$\operatorname{tr} S = \operatorname{tr}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, x_i \rangle,$$

$$\det(1-S) = \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = \det(\delta_{ij} - \langle \varphi_j, x_i \rangle).$$

明らかに $\operatorname{tr} S$ および $\det(1-S)$ は, $\{\varphi_j\}, \{x_j\}$ 等のとり方

によらない. かつ $S^* \in \mathcal{C}_0(x^*)$ に対しては,

$$\operatorname{tr} S^* = \overline{\operatorname{tr} S} \quad \& \quad \det(1-S^*) = \overline{\det(1-S)}.$$

故に $P, Q \in \mathcal{B}(x)$ が projection ($P^2 = P, Q^2 = Q$) なら $PS = S =$

SQ のとき,

$$\operatorname{tr} S = \operatorname{tr} P S P = \operatorname{tr} Q S Q,$$

$$\det(1-S) = \det(1-P S P) = \det(1-Q S Q).$$

また, $S, T \in \mathcal{C}_0(X)$ のとき

$$\det((1-S)(1-T)) = \det(1-S) \det(1-T).$$

3. 問題の説明

我々は §2 で, $T(z) \in \mathcal{M}(\bar{U}; \mathcal{B}_0(x, x_1))$ (or $\mathcal{M}_0(\bar{U}; \mathcal{B}_0(x, x_1))$) のとき, $T(z)^{-1}$ の解析的性質を考察する. §3 で, $U \subset \mathbb{C}^1$ のときをやや詳しく調べる. このときには, 適当な条件のもとで, $T(z)$ の固有値および固有ベクトルの Puiseux 展開をかなり詳しく求めることも可能である ([3] 参照). しかしここでは, それまでを留めては論じない. §4 で, §2 の結果の簡単な応用を述べる. 1 つは, 閉作用素 A_0 を適当に摂動したときの, $\bar{P}(A_0)$ の安定性に関すること, 他の 1 つは, $\sigma_p(A_0)$ の変化に関する Weinstein-Aronszajn の公式の variant である.

§2. $T(z)^{-1}$ の解析的性質 (I).

補題 2.1. $U \subset \mathbb{C}^m$ は領域, $T(z) \in \mathcal{M}_0(\bar{U}; \mathcal{C}_0(X))$, $T(z)$ の特異点を ω_1 とする. $1 \in \rho(T(z_0))$ なる $z_0 \in U - \omega_1$ が存在すれば, $(1 - T(z))^{-1} \in \mathcal{M}_0(\bar{U}; \mathcal{B}_0(X))$ かつ $\Gamma(T(z)) \in \mathcal{M}_0(\bar{U}; \mathcal{C}_0(X))$

である。ただし

$$(2.1) \quad \Gamma(T(z)) = -\{(1-T(z))^{-1} - 1\} = -T(z)(1-T(z))^{-1}.$$

証明. 任意の $a \in U$ とする. a のある近傍 $U(a)$ で, $T(z)$ は (1.1) の形に表わされる. 注意 2 と 3 により, $P(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{C}_0(X))$ が存在して, $P(z)^2 = P(z)$, $P(z)T(z) = T(z)$ かつ $P(z)$ は $U(a)$ で (1.2) のように表わされるとしてよい. $P_0(z) = 1 - P(z)$ とおくと, $P_0(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}(Y))$ かつ $P_0(z)^2 = P_0(z)$ である. $z \in U(a) - \omega_1$ に対して, $1 \in \rho(T(z))$ と $1 \in \rho(T(z)P(z))$ は同値であり,

$$(2.2) \quad (1-T(z))^{-1} = P(z)(1-T(z)P(z))^{-1}(1+T(z)P_0(z)) + P_0(z) \\ = P(z)\{P(z)(1-T(z)P(z))^{-1}(1+T(z)P_0(z)) - 1\} + 1.$$

(1.4) により $t_{ij}(z)$ を定義すると, $t_{ij}(z) \in \mathcal{M}(U(a))$ かつ $1 \in \rho(T(z)P(z))$ と $\det(\delta_{ij} - t_{ij}(z)) \neq 0$ は同値である. いま, $U(a) - \omega_1$ で $\det(\delta_{ij} - t_{ij}(z)) \equiv 0$ とすると, $U - \omega_1$ が連結なるときから, 解析接続により任意の $z \in U - \omega_1$ に対して $1 \notin \rho(T(z))$ となる. これは $1 \in \rho(T(z))$ に反するから, $U(a) - \omega_1$ で $\det(\delta_{ij} - t_{ij}(z)) \neq 0$. そこで $\Delta_{ij}(z) = (\delta_{ij} - t_{ij}(z))^{-1}$ とおけば, $\Delta_{ij}(z) \in \mathcal{M}(U(a))$ かつ

$$(2.3) \quad P(z)(1-T(z)P(z))^{-1} = \sum \varphi_i(z) \Delta_{ij}(z) \otimes \psi_j(z)^*.$$

故に $P(z)(1-T(z)P(z))^{-1} \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathcal{C}_0(X))$. (2.1) により, 証明は明らか.

定理 2.1. (i) $U \subset \mathbb{C}^n$ を領域, $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}_0(x, x))$ とする。ある $z_0 \in U$ で $\alpha(T(z_0)) = 0$, 即ち $T(z_0)^{-1} \in \mathcal{B}_0(x, x)$ が存在するとする。そのとき $T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(x, x))$ で, $T(z)^{-1}$ の特異点集合は $\omega = \{z \in U; \alpha(T(z)) > 0\}$ と一致する。

(ii) $T(z)$ は (i) と同じで, $n = 1$ であるとする。そのとき, ω は高々 U の離散集合で, 各 $a \in \omega$ は $T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(x, x))$ の pole であり, $z = a$ における $T(z)^{-1}$ の Laurent 展開:

$$(2.4) \quad T(z)^{-1} = \frac{S_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{S_1}{z-a} + S_0(z)$$

において, $S_j \in \mathcal{C}_0(x, x)$, $j = 1, \dots, m$, $S_0(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}_0(x, x))$ である。特に

$$(2.5) \quad S_m = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

$$z \neq a \quad T(a) \varphi_j = 0, \quad T(a)^* \varphi_j = 0.$$

証明. (i) $z_1 \in U - \omega$ ($\neq \emptyset$) ならば, $T(z_1)^{-1} \in \mathcal{B}_0(x, x)$. z_1 の十分小さい近傍 $V(z_1)$ をとると, $\|T(z) - T(z_1)\| \leq \frac{1}{2} \|T(z_1)^{-1}\|^{-1}$, $z \in V(z_1)$. 故に $z \in V(z_1)$ に対して,

$$\begin{aligned} (2.6) \quad T(z)^{-1} &= \{T(z_1) + (T(z) - T(z_1))\}^{-1} \\ &= T(z_1)^{-1} \{1 - (T(z) - T(z_1))T(z_1)^{-1}\}^{-1} \\ &= T(z_1)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \{(T(z) - T(z_1))T(z_1)^{-1}\}^j. \end{aligned}$$

$\|(T(z) - T(z_1))T(z_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{2}$ より, 上の級数は $V(z_1)$ で一様収束する。故に $T(z)^{-1} \in \mathcal{A}(V(z_1); \mathcal{B}_0(x, x))$. 次に $a \in \omega$ とすると, $\alpha(T(a)) = \beta(T(a)) = n > 0$. $\mathcal{N}(T(a))$ の base $\{u_j; j = 1, \dots, n\}$,

$\mathcal{R}(T(a))$ のある補空間 $\mathcal{M}$ の base $\{q_j; j=1, \dots, n\}$, $\{u_j\}$ に対する biorthogonal base $\{x_j\}$ (i.e. $\langle u_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$) をとり,

$$R = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, x_j \rangle q_j = \sum q_j \otimes x_j^*,$$

$$\tilde{T}(z) = T(z) + R$$

とおく。明らかに $\tilde{T}(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}_0(x, x_1))$ かつ $\alpha(\tilde{T}(a)) = 0$ 。

故に a のある近傍 $V(a)$ で $\tilde{T}(z)^{-1} \in \mathcal{A}(V(a); \mathcal{B}_0(x_1, x))$ である。

一方, $T(z) = \tilde{T}(z) - R = (1 - R\tilde{T}(z)^{-1})\tilde{T}(z)$ より, $\alpha(T(z)) = 0$

と $1 \in \rho(R\tilde{T}(z)^{-1})$ は同値である。 $R\tilde{T}(z)^{-1} \in \mathcal{A}_0(V(a); \mathcal{C}_0(x_1))$,

$\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \in \mathcal{A}(V(a))$ であり, $1 \in \rho(R\tilde{T}(z)^{-1})$ はまた

$\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \neq 0$ と同値になる。いま $V(a)$ で $\det(1 -$

$R\tilde{T}(z)^{-1}) \equiv 0$ とすると, $V(a)$ で $\alpha(T(z)) > 0$ となる。 U が連結

だから, 解析接続により U で $\alpha(T(z)) > 0$ となり, $\alpha(T(z_0)) = 0$

に反する。故に $V(a)$ で $\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \neq 0$ 。補題 2.1 により

$(1 - R\tilde{T}(z)^{-1})^{-1} \in \mathcal{M}_0(V(a); \mathcal{B}_0(x_1))$ かつ $\Gamma(R\tilde{T}(z)^{-1}) = 1 -$

$(1 - R\tilde{T}(z)^{-1})^{-1} \in \mathcal{M}_0(V(a); \mathcal{C}_0(x_1))$ であるから,

$$(2.7) \quad T(z)^{-1} = \tilde{T}(z)^{-1} (1 - R\tilde{T}(z)^{-1})^{-1}.$$

$$= \tilde{T}(z)^{-1} - \tilde{T}(z)^{-1} \Gamma(R\tilde{T}(z)^{-1}).$$

明らかに $\tilde{T}(z)^{-1} \Gamma(R\tilde{T}(z)^{-1}) \in \mathcal{M}_0(V(a); \mathcal{C}_0(x_1, x))$ であるから,

$T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(V(a); \mathcal{B}_0(x_1, x))$ 。

(ii) (2.7) と $T(a)T_m = T_m T(a) = 0$ より明らか。

定理 2.2. $U \subset \mathbb{C}^n$ の領域, $T(z) \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(x, x_1))$ とする。

もしある $z_0 \in U$ に対して $\alpha(T(z_0)) = 0$ ならば, $T(z)^{-1} \in M_0(U; B_0(x_1, x_1))$ 。

証明. 大体定理 2.1 (i) と同様である。

定理 2.3. $U \subset \mathbb{C}^m$ は領域, $T(z) \in M_0(U; \mathbb{C}_\infty(x))$ とする。

もしある $z_0 \in U$ に対して, $1 \in \rho(T(z_0))$ ならば, $(1 - T(z))^{-1} \in M_0(U; B_0(x))$ かつ $\Gamma(T(z)) \in M_0(U; \mathbb{C}_\infty(x))$ 。

証明. 次の補題 2.2 より明らか。

補題 2.2. U は $\mathbb{C}^m$ の領域, $T(z) \in M_0(U; B(x))$ (定義 3 を参照), $T(z)$ の特異点を ω とする。ある開集合 $V \subset U - \omega$ で $T(z) \in \mathcal{A}(V; \mathbb{C}_\infty(x))$ ならば, 実は $T(z) \in M_0(U; \mathbb{C}_\infty(x))$ 。

§ 3. $T(z)^{-1}$ の解析的性質 (II) - generalized Jordan chain.

定理 3.1. $U \subset \mathbb{C}^1$ は領域, $T(z) \in \mathcal{A}_0(U; B_0(x, x))$ とする。

ある $z_0 \in U$ で $\alpha(T(z_0)) = 0$ とするとき,

i) $T(z)^{-1} \in M_0(U; B_0(x_1, x_1))$, $\omega = \{z \in U; \alpha(T(z)) > 0\}$

は U の離散集合で, 各 $a \in \omega$ は $T(z)^{-1}$ の pole,

ii) $a \in \omega$ のまわりの $T(z)^{-1}$ の Laurent 展開:

$$(3.1) \quad T(z)^{-1} = \frac{S_{m-1}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{S_1}{z-a} + S_0(z),$$

$$(3.2) \quad S_{m-l} = \sum_{j=1}^{r_l} [\langle \cdot, \varphi_j^0 \rangle \varphi_j^l + \langle \cdot, \varphi_j^1 \rangle \varphi_j^{l-1} + \dots + \langle \cdot, \varphi_j^{l-1} \rangle \varphi_j^0] \\ + \sum_{j=1}^{r_{l-1}} [\langle \cdot, \varphi_j^0 \rangle \varphi_j^{l-1} + \dots + \langle \cdot, \varphi_j^{l-2} \rangle \varphi_j^0] + \dots \\ + \sum_{j=1}^{r_1} [\langle \cdot, \varphi_j^0 \rangle \varphi_j^1 + \langle \cdot, \varphi_j^1 \rangle \varphi_j^0] + \sum_{j=1}^{r_0} \langle \cdot, \varphi_j^0 \rangle \varphi_j^0,$$

$$(3.3) \quad T_0 \varphi_j^k + T_1 \varphi_j^{k-1} + \cdots + T_k \varphi_j^0 = 0, \quad \begin{cases} j = 1, \dots, r_{m-k} \\ k = 0, 1, \dots, m \end{cases}$$

$$(3.3') \quad T_0^* \psi_j^k + T_1^* \psi_j^{k-1} + \cdots + T_k^* \psi_j^0 = 0 \quad \begin{cases} k = 0, 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, r_{m-k} \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \varphi_j^k \in \mathfrak{X}, \quad \{\varphi_j^k; j=1, \dots, r_{m-k}\} \quad \text{は 1 次独立,}$$

$$(3.4') \quad \psi_j^k \in \mathfrak{X}^*, \quad \{\psi_j^k; j=1, \dots, r_{m-k}\} \quad \text{は 1 次独立,}$$

$$(3.5) \quad \{\varphi_j^0; j=1, \dots, r_m = \alpha(T(a))\} \quad \text{は } \mathcal{Y}(T(a)) \text{ の base}$$

$$(3.5') \quad \{\psi_j^0; j=1, \dots, r_m = \alpha(T(a)^*)\} \quad \text{は } \mathcal{Y}(T(a)^*) \text{ の base}$$

ただし $\{T_0, \dots, T_m\}$ は $T(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (z-a)^j T_j$ よりきく,

注意. $(\varphi_j^0, \dots, \varphi_j^{l-1})$ ($j=r_{m-l+1}, \dots, r_{m-l+1}$) は $k=0, \dots, l-1$ に対して (3.3) の関係をもたし, φ_j^l は存在しない。このような $(\varphi_j^0, \dots, \varphi_j^{l-1})$ を長さ l の (generalized) Jordan chain ($z=a$ において $T(z)$ は associate (た) とよぶ)。また (3.3) - (3.5) を満たす $\{(\varphi_j^0, \dots, \varphi_j^{l-1}); j=r_{m-l+1}, \dots, r_{m-l+1}, l=1, \dots, m\}$ を ($z=a$ において $T(z)$ は associate (た) Jordan chain の完全な 1 組とよぶ。上の $\{(\varphi_j^0, \dots, \varphi_j^{l-1}); j=r_{m-l+1}, \dots, r_{m-l+1}, l=1, \dots, m\}$ は, ($\bar{z}=\bar{a}$ において $T(\bar{z})^*$ は associate (た) Jordan chain の完全な 1 組である。 $\{(\varphi_j^0, \dots, \varphi_j^{l-1})\}$, $\{(\psi_j^0, \dots, \psi_j^{l-1})\}$ がともに Jordan chain の完全な 1 組で, かつ (3.1) (3.2) により $T(z)^{-1}$ の Laurent 展開の主要部を与えるとき, pair をなすというようにする。

iii) $r_0 = 0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_m = \alpha(T(a))$ は unique である (完全な 1 組をなす Jordan chain のとり方によらない),

iv) $\{(q_j^0, \dots, q_j^{l-1})\}$ (or $\{(\psi_j^0, \dots, \psi_j^{l-1})\}$) が完全な 1 組
 ならば, z に対して pair をなす完全な 1 組 $\{(q_j^0, \dots, q_j^{l-1})\}$ (
 resp. $\{(\psi_j^0, \dots, \psi_j^{l-1})\}$) を求めることが出来る。

証明. 略

系. $T(z)$ は定理 3.1 のとおりとする. $a \in U$ が $T(z)^{-1}$ の
 simple pole となる必要十分条件は, $\alpha(T(a)) > 0$ かつ
 $R(T(a)) + T'(a)N(T(a)) = \mathcal{X}_1$ なることである。

§ 4. 応用 - 閉作用素の振動.

$A_0 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X})$, $\rho(A_0) \neq \emptyset$ とする. $R_0(z) = (z - A_0)^{-1}$, $z \in \rho(A_0)$
 とおく. 明らかに $R_0(z) \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $R_0(z) \in \mathcal{M}_0(\bar{\rho}(A_0);$
 $\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. $\rho(A_0) \neq \emptyset$ より $A_0^* \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X}^*)$, かつ $\rho(A_0^*) = \rho(A_0)^*$
 $= \{\bar{z} \in \mathbb{C}; z \in \rho(A_0)\}$, $\bar{\rho}(A_0^*) = \bar{\rho}(A_0)^*$.

$B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X}_1, \mathcal{X})$, $C \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X}, \mathcal{X}_1)$ が次の仮定を満たすとする:

$$(A.1) \quad \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(C), \quad \mathcal{D}(A_0^*) \subset \mathcal{D}(B^*).$$

(A.2) ある $z \in \rho(A_0)$ に対して, $CR_0(z)B \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X}_1)$ が有界
 な振動 $Q_0(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_1)$ をもつ。

$$(A.3) \quad \exists z_0 \in \rho(A_0); \quad 1 \in \rho(Q_0(z_0)).$$

上の仮定のうち (A.1) と (A.2) から次のことが導かれる:

$$(4.1) \quad i) \quad CR_0(z) \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_1));$$

$$ii) \quad B^*(z - A_0^*)^{-1} \in \mathcal{A}(\rho(A_0)^*; \mathcal{B}(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}_1^*));$$

iii) densely defined operator $R_0(z)B$ は有界である, z の unique 拡張 $\in [R_0(z)B]$ で表わすと, $[R_0(z)B] \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(x_1, x))$;

$$iv) [R_0(z_1)B] - [R_0(z_2)B] = -(z_1 - z_2) R_0(z_1) [R_0(z_2)B];$$

$$v) \exists [CR_0(z)B] = Q_0(z) \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(x_1));$$

$$vi) Q(z_1) - Q(z_2) = -(z_1 - z_2) CR_0(z_1) [R_0(z_2)B];$$

$$vii) \mathcal{R}([R_0(z)B]) \subset \mathcal{O}(C), \quad C[R_0(z)B] = Q_0(z).$$

証明は Kato [1] による.

$\mathcal{V} = \{z \in \rho(A_0); 1 \in \rho(Q_0(z))\}$ とする. $\mathcal{V}$ は $\mathbb{C}$ の open set である, $\mathcal{V} \neq \emptyset$. $z \in \mathcal{V}$ のとき $R_1(z) \in \mathcal{B}(x)$ を次のように定義する:

$$(4.2) \quad R_1(z) = R_0(z) + [R_0(z)B](1 - Q_0(z))^{-1}CR_0(z).$$

$R_1(z)$ は次の性質をもつ:

$$(4.3) \quad i) R_1(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{V}; \mathcal{B}(x)), \quad CR_1(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{V}; \mathcal{B}(x, x_1)),$$

$$[R_1(z)B] \in \mathcal{A}(\mathcal{V}; \mathcal{B}(x_1, x));$$

$$ii) CR_1(z) = CR_0(z) + Q_0(z)CR_1(z);$$

$$iii) [R_1(z)B] = [R_0(z)B] + [R_1(z)B]Q_0(z);$$

$$iv) R_1(z) = R_0(z) + [R_0(z)B]CR_1(z) \\ = R_0(z) + [R_1(z)B]CR_0(z);$$

$$v) \mathcal{R}([R_1(z)B]) \subset \mathcal{O}(C), \quad Q_1(z) = C[R_1(z)B] \in \mathcal{A}(\mathcal{V};$$

$$\mathcal{B}(x_1));$$

$$vi) \quad (1 - Q_0(z))(1 + Q_1(z)) = (1 + Q_1(z))(1 - Q_0(z)) = 1.$$

$z \in V$ のとき, $\mathcal{R}(R_1(z)) = \{0\}$ かつ $\mathcal{R}(R_1(z))^{\perp} = \mathcal{X}$. さらに

$$(4.4) \quad R_1(z_1) - R_1(z_2) = -(z_1 - z_2) R_1(z_1) R_1(z_2).$$

故に $\mathcal{R}(R_1(z))$ は z によらない。これを $\mathcal{Q}$ とかき $A_1 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X})$ を次のように定義する:

$$A_1 = z - R_1(z)^{-1}, \quad \mathcal{Q}(A_1) = \mathcal{Q}.$$

$z_1 - R_1(z_1)^{-1} = z - R_1(z)^{-1}$ より A_1 の定義は z によらない。しかも $R_1(z) = (z - A_1)^{-1}$, $z \in V$. $A_1 \supset A_0 + BC$, $A_1 \supset A_1 - BC$ は容易にわかる。また $A_1 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X})$ は, 方程式 (3.3) iv) より, 1 意的に定まる。我々は, A_0 と A_1 の *spectra* の関係を調べる。

補題 4.1. U は領域で, $U \subset \overline{P}(A_0)$, $1 - Q_0(z) \in \mathcal{M}(U; \mathcal{C}_0(\mathcal{X}_1))$ とする。ある $z_0 \in U$ に対して $1 \in \rho(Q_0(z_0))$ ならば, $U \subset \overline{P}(A_1)$.

証明. 定理 2.2 と (4.2) より明らか。

定理 4.1. $P(A_0)$ を連結成分にわけると $P(A_0) = \bigcup P_j(A_0)$ (従って $\overline{P}(A_0) = \bigcup \overline{P}_j(A_0)$ となる)。

(i) $Q_0(z) \in \mathcal{A}(P_j(A_0); \mathcal{C}_0(\mathcal{X}_1))$ かつ ある $z_j \in P_j(A_0)$ に対して $1 \in \rho(Q_0(z_j))$ ならば, $\overline{P}_j(A_0)$ は $\overline{P}(A_1)$ のある連結成分。

(ii) (i) の仮定が各 j について成立し, $\sigma(A_0)$ が内実をもたないならば, $\overline{P}(A_0) = \overline{P}(A_1)$ (このときは $\sigma_e(A_0) = \sigma_e(A_1)$)。

証明. 補題 2.2, 定理 2.3 および $P_j(A_0)$ が open なることから明らか。

仮定 (A.3) より $R_j(z_0) = \tilde{A}_j$, $\tilde{A}_1 - \tilde{A}_0 = DF$, $D = [R_0(z_0)B]$,
 $F = (1 - Q_0(z_1))^{-1} C R_0(z_0)$ とおくと, 定理 4.1 を用いることができる.
 たとえば, (i) の条件は, $Q_0(z) - Q_0(z_j) \in \mathcal{A}(p_j(A_0); \mathcal{C}_\infty(x_1))$
 におきかえてもよい.

また $A_0, A_1 \in \mathcal{L}_\infty(x)$, $p(A_0) \cap p(A_1) \ni z_0$; $R_1(z_0) - R_0(z_0) = DF$,
 $\exists D \in \mathcal{B}(x_1, x)$, $\exists F \in \mathcal{B}(x, x_1)$ なる仮定から出発して, $\tilde{Q}_0(\tilde{z}) =$
 $F(\tilde{z} - R_0(z_0))^{-1} D$, $\tilde{z} = (z_0 - z)^{-1}$, に適当な条件を仮定することにより
 定理 4.1 を用いることができる.

次に補題 4.1 の仮定のもとで, Weinstein Anouzajin の公式の
 ある variant を与える. 定理 2.1 (または 2.2.) の証明のとき
 と同じ考え方で, 各 $a \in U$ に対して, a のある近傍 $U(a)$ を
 とると, $T(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}(x_1))$, $S(z) \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathcal{C}_0(x_1))$ が
 存在して, $(1 - T(z))^{-1} \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}_0(x_1))$ かつ $z \in U(a)$ で

$$(4.5) \quad 1 - Q_0(z) = (1 - S(z))(1 - T(z))$$

が成立するようにできる. § 1.2 の定義で,

$$(4.6) \quad w(z) = \det(1 - S(z)), \quad z \in U(a)$$

とおく. $w(z) \in \mathcal{M}(U(a))$, $w(z) \neq 0$ は明らか. 簡単な計算により

$$(4.7) \quad \frac{w'(z)}{w(z)} = -\text{tr}(1 - S(z))^{-1} S'(z)$$

を得る. $w(z) \in \mathcal{M}(U(a))$ より, 各 $a \in U(a)$ で $w(z)$ は次の形の

展開をもつ：

$$(4.8) \quad w(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n \neq 0, \quad -\infty < n < \infty.$$

このとき我々は, $n(b; w) = n$ とおく。明かには

$$\begin{aligned} (4.9) \quad n(b; w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(b, \epsilon)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint \operatorname{tr} (1-S(z))^{-1} S'(z) dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \operatorname{tr} \oint (1-Q_0(z)) Q'_0(z) dz. \end{aligned}$$

実際 $(1-Q_0(z))^{-1} Q'_0(z) = (1-T(z))^{-1} (1-S(z))^{-1} [(1-S(z))T'(z) + S'(z)(1-T(z))] = (1-T(z))^{-1} T'(z) + (1-T(z))^{-1} (1-S(z))^{-1} S'(z) (1-T(z))$ であるから。 $Q'_0(z) = -C R_0(z) [R_0(z) B]$ を用いて,

$$\begin{aligned} (1-Q_0(z))(-Q'_0(z)) &= (1-Q_0(z))^{-1} C R_0(z) [R_0(z) B] \\ &= C R_1(z) [R_0(z) B]. \end{aligned}$$

故に次の式を得る：

$$n(b; w) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{tr} \oint C R_1(z) [R_0(z) B] dz.$$

$U(a) \subset \bar{p}(A_0) \cap \bar{p}(A_1)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \oint C R_1(z) [R_0(z) B] dz &= \operatorname{tr} \oint [R_0(z) B] C R_1(z) dz \\ &= \operatorname{tr} \oint \{R_1(z) - R_0(z)\} dz. \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned} (4.10) \quad n(b; w) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \operatorname{tr} \oint R_1(z) dz - \operatorname{tr} \oint R_0(z) dz \right\} \\ &= n(b; A_1) - n(b; A_0), \end{aligned}$$

すなわち $n(b; A_j)$ は, $b \in p(A_j)$ ならば 0, $b \in \sigma_p(A_j)$ ならば A_j の固有値 b の代数的重複度を表わす。

定理 4.2. 補題 4.2 の仮定のもとに, 各 $a \in U$ のある近傍で (4.5), (4.6) により $w(z)$ を定義する。そうすると, Weinstein-Aronszajn の公式 (4.10) が a の同じ近傍で成り立つ。

注意. $\mathfrak{H}_1$ が Hilbert space ならば, $Q_0(z) \in M_0(U; \mathbb{C}_p(\mathfrak{H}_1))$ のときには, $\nu \geq p$ として $\det_\nu(1 - Q_0(z)) = w(z)$ なる order ν の determinant を定義することが出来る。このとき $\nu > 1$ ならば, $w(z)$ は $a \in \sigma_p(A_0)$ を essential singularity とする。しかし $w(z)$ の特異点と零点は U 内で離散集合をなし, Weinstein-Aronszajn の公式は, 次の形で成り立つ:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w'(z)}{w(z)} dz = n(b; A_1) - n(b; A_0).$$

この場合は, U 全体で同一の $w(z) = \det_\nu(1 - Q_0(z))$ を用いることが出来る。

文献

- [1] Kato, T., Wave operators and similarity for some non-self-adjoint operators, Math. Ann. 162 (1966) 258-277.
- [2] Schechter, M., Fredholm operators and the essential spectrum, Lecture note, Courant Inst. Math. Sci. New York Univ. (1965)
- [3] Visik, M.I. and Lyusternik, L.A., Solution of some perturbation problems in the case of matrices and self-adjoint or non-

self-adjoint equations, Russian Math. Surveys, 15 no. 3
(1960) 1-73.