

3-Manifolds, Spines and Graphs

相模工大 津久井康之 (Yasuyuki Tsukui)

§0. [1] では 3-manifold M の ball covering $\mathcal{B}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ から M の almost spine $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ を通して、その一部 $P_i = \mathcal{P}(\mathcal{B}|B_i)$ の singular locus を球面グラフとして考察した。ここでは P_i ($i=1,2,3,4$) 相互の matching が M を決定するとして、むしろ、各 P_i の性質の M への影響を調べた。しかし $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ の singular locus 全体が M を決定しているので、ここではこの視点からの中間報告をする。

§1.

Def. compact connected manifold M^3 に対して M 内の (closed) 3-balls B_i の set $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ は (1) $\bigcup B_i = M$, (2) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は 2-manifold (connected を要求しない).

であるとき M の ball covering といい、 M に対して k

の最小数を M の covering number と呼び $b(M)$ と記す。

Def. connected closed 3-manifold M は、

$M \neq M' \# (S^1 \times S^2)$ か、 $M \neq M' \# (S^1 \times_{\tau} S^2)$ のときに handle free と呼ばれる。

closed 3-manifold M^3 については $2 \leq b(M) \leq 4$ で、 $b(M^3)=2,3$ なる M^3 の分類問題は解決している。

$M^3 \neq S^3$ なる closed handle free 3-manifold M については $b(M)=4$ である。以後 handle free 3-manifold について考察をするが、表現の分りやすさのために $M \cong S^3$ の場合には、ball covering $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ について常に $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ を仮定し、何々には明記しないこととする。

Prop. 1. $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を handle free な M^3 の ball covering とすると、 $B_i \cap B_j$ は finite 2-disks ($i \neq j$) である。

Def. $\mathcal{B}^3 = \mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^2 = \{D \mid B_i \cap B_j \supset D : \text{connected component } i \neq j\}$$

$$\mathcal{B}^1 = \{A \mid B_i \cap B_j \cap B_k \supset A : \text{connected component } i < j < k\}$$

$$\mathcal{B}^0 = \{p \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \supset p : \text{connected component}\}$$

$\mathcal{B}^i$ はそれぞれ i -cell の集合で ball, face(disk), edge, vertex と呼ばれる。

Prop. 2. ([1] Prop. 6)

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ を handle free M^3 の ball covering 2".

$\exists D, \exists D' \in \mathcal{B}^2(M)$ s.t. $D \cap D' \supset 2$ 以上の components



$\exists \mathcal{B}' = \mathcal{B}'(M) : M \text{ の ball covering, } \#\mathcal{B}' < 4 \text{ or } \#\mathcal{B}'^0 < \#\mathcal{B}^0.$

(注) [1] の Proposition 6 の 2) $<$ は $\leq$ の誤記)

この Prop. 2. のくり返し適用により、handle free M^3 の ball covering $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ については、

$\forall D_i, \forall D_j \in \mathcal{B}^2$ $D_i \neq D_j$ に対して $D_i \cap D_j = \begin{cases} \emptyset & \text{or} \\ \text{an arc} \end{cases}$
としてよいから、

$\mathcal{B}^{(2)} = \mathcal{B}^0 \cup \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ は cell complex とできる。

(このとき ball covering $\mathcal{B}$ を nice という)

§2.

Def. $\mathcal{B}$ を handle free M^3 の ball covering で上記の性質をもつものとする。

$E_\lambda = \{e \in \mathcal{B}^1 : e \subset B_i \cap B_j \cap B_k, \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}\}$

(E_λ は $\mathcal{B}_\lambda^3$ に含まれない $\mathcal{B}^1$ の元の set), $\lambda = 1, 2, 3, 4.$

$E = \mathcal{B}^1 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$

$V = \mathcal{B}^0$

Prop. 3. M^3 を handle free, B を M の nice な ball covering とすると $G = (V(B), E(B))$ は単純グラフである。

Def. グラフ $G = (V, E)$ が edge k -colourable

$\iff \exists c: E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ (onto) map
such that $e, e' \in E$ e と e' が 共通 vertex を持つ
ならば $c(e) \neq c(e')$

このとき $E_i = \{e \in E : c(e) = i\}$; E の colouring

$$\bar{G}_i = (V, E - E_i)$$

$$\bar{G}_{ij} = (V, E - E_i - E_j)$$

Prop. 4. $G = (V, E)$ を Prop. 3 のグラフとする。

- * {
- (1) G は simple 4-regular (quartic), non planar.
 - (2) G は edge 4-colourable, 以下 1 の colouring について
 - (3) $\bar{G}_i$ は planar で S^2 への embedding は unique
 - (4) $\bar{G}_{ij} \cong \bar{G}_{kh}$, $\{i, j, k, h\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Prop. 5. handle free M^3 が orientable

$\iff$

$G = (V, E)$ が bi-partite (2部グラフ).

§3.

Def. Prop. 4. の性質 $\star$ を持つグラフ $G=(V, E)$ を Qpp . (Quartic partially planar) と呼ぶ。

ここまでで、handle free な M^3 の nice な ball covering から Qpp グラフが作られることをみた。また, nice でない ball covering を nice にする (Prop. 2) operations A と B は ball covering の幾何的な reduction によってなされる [1]。ここではこの逆の問題について考える。

Prop. 5. $G=(V, E)$ を Qpp とし, $\{E_i\}$ をその1つの edge colouring とすると, closed 3-manifold M^3 とその nice な ball covering が存在して $G \cong G(\mathcal{P})$ 。

G に対して $\overline{G}_i$ を 3-ball B_i の境界 ∂B_i に置き, ($i=1, 2, 3, 4$) G による指定に沿って B_i 's を貼り合せると M^3 を得る。ここでは M は一般に handle free かどうかは不明である。

Prop. 6. B_i を handle free M_i^3 の nice な ball covering とし $G_i = G(B_i)$ を Qpp graph とする ($i=1, 2$). $h: G_1 \cong G_2$ を edge-colouring を保存する同型写像と

すると $M_1 \cong M_2$ 。

Def. $h: (V_1, E_1) \rightarrow (V_2, E_2)$ が edge colouring を保存する $\Leftrightarrow \forall e, e' \in E_1, c_1(e) = c_1(e') \rightarrow c_2(h(e)) = c_2(h(e'))$

但し $c_1: E_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, c_2: E_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ は colouring.

§4.

$G = (V, E)$ を Qpp graph とする。 E の全ての edge に向きを与えておく (任意)。 群の表示 π_i を次のように定める。

$$\pi_i(G) = \langle E; E_j, E_k, E_h, \overline{G}_{ij}, \overline{G}_{ik}, \overline{G}_{ih} \rangle$$

$$\text{但し } \{i, j, k, h\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

ここで $\overline{G}_{ij} = \{C_{ij}^1, C_{ij}^2, \dots, C_{ij}^m\}$ は cycle の set で、各 cycle C_{ij}^l について任意の1の向きに向きづけられた E の元を読んで得られる words を表わす。

Prop. 7. $\pi_1(M) \cong \pi(G(\beta(M)))$ (全ての π_i は同型)

注) 1. 略して $\pi_i(G) = \langle E_i; \overline{G}_{ij}, \overline{G}_{ik}, \overline{G}_{ih} \rangle$ としてもよい。

2. $|E_i| = \frac{1}{4}|E| = \frac{1}{2}|V|$ で各表示とも生成元の個数は同じ。

3. relater の個数は余分なものがある。

§5.

予想1. Qpp graph の edge colouring は unique.

すなわち、Qpp graph の全ての同型は colouring 保存.

予想2. S^3 を represent する Qpp graph はない.

すなわち、 S^3 の ball covering は全て幾何的に reduce する.

予想3. Qpp が bi-partite (M が orientable) ならばそれが表現する M^3 は handle free.

注意 handle free M^3 に対してその Qpp graph G は、 $|G|$ が ball covering $\mathcal{B}$ を almost spine ($\cup \partial B_i$) と見たときの singular locus 全体であるから、 M^3 に embed されていると考えてよい。 G 全体はもちろん M で compressible ではないが G_i は全て M で contract する。

参考文献

- [1] 津久井康之, 3-Manifold の Normal spine と Ball covering, 数理解析研究所講究録 524 "多様体と Fake Surfaces" (1984) 9-20.