

半局所化について

広島大理 大川哲介 (Tetsusuke Ohkawa)

A. K. Bousfield は [1], [2] に於いて, 空間及びスペクトラムの, 一般ホモロジーによる局所化の概念を導入した. ここで, その類似概念である半局所化の概念を導入する.

§1. まず局所化について復習する. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を圏, $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を共変関手とする. $f \in \text{Mor } \mathcal{A}$ が $\mathcal{F}$ -iso であるとは $\mathcal{F}(f)$ が iso なることを云う. $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ が $\mathcal{F}$ -local であるとは, 任意の $\mathcal{F}$ -iso $f: Y \rightarrow Z$ (in $\mathcal{A}$) に対し, $f^*: [Z, X] \xrightarrow{\text{注}} [Y, X]$ が全単射なることを云う. $f: X \rightarrow Y$ (in $\mathcal{A}$) が $\mathcal{F}$ -局所化写像であるとは, f が $\mathcal{F}$ -iso であり, $\mathcal{F}(Y)$ が $\mathcal{F}$ -local となることを云う.

$\mathcal{C}, \mathcal{A}$ を CW 複体 (又は CW スペクトラム) の圏, $\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{A}}$ をそのホモトピー圏とする. $\text{Gr } \mathcal{A}$ を次数付アーベル群の圏, $h: \tilde{\mathcal{C}} \text{ (又は } \tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \text{Gr } \mathcal{A}$ を一般ホモロジー関手とする. この時, Bousfield [1], [2] による次の基本定理が成立する. (注: $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, X)$ を $[Z, X]$ と略記した. 以下同様)

定理0. 任意の $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ (又ハ $\text{Ob}(\mathcal{F})$) に対し適当なる Y を取り, $f: X \rightarrow Y$ が h -局所化写像である様に₃ することが出来る.

この Y を $L_h X$ で表わす. これが同型を除いて一意なる事は定義よりすぐわかる. $h_*(-) = \pi_*(E \wedge (-))$ (E : スペクトラム) と書ける時, L_h を L_E と表わす. さて $n \in \mathbb{Z}$ (又ハ $n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$), $\text{Gr}^n \mathcal{A}_h$ を, 次数を n より小なるものに制限した次数付アーベル群の圏とする. 一般ホモロジー h に対し関手 $(h, n): \mathcal{C}$ (又ハ $\mathcal{F}$) $\rightarrow \text{Gr}^n \mathcal{A}_h$ を $(h, n)(X) = (h_i(X))_{i < n}$ で定義する. これについて次が成立する.

定理1. (h, n) についても 定理0 と全く同じ局所化写像の存在定理が成立する.

X の (h, n) -局所化 $L_{(h, n)} X$ を $L_h^n X$, $L_E^n X$ 等で表わす. これは X の h -半局所化と云っても良いであろう.

(n をどこに出すかが問題だが)^(註) ここで, さらにホモロジーの次元を一つの特定次元に限って同様なことが成立するかどうかという疑問が出るが, これについては次の反例がある.

(註) (特に断わらぬ限り $n=0$ に限っても一般性を失わぬ.)

例 1. $X = P^2$ (実 2 次元射影空間), $\mathcal{F} = H_2(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
 $: \tilde{C} \rightarrow Qh$ とするとき, X の $\mathcal{F}$ -局所化は存在しない. ス
 ペクトラムの場合も, P^2 は その 懸垂スペクトラムと見れ
 ば同様.

非安定の場合の局所化・半局所化については次の結果があ
 る. $L_h X$ を $L_h(X)$ などとも書くことにする.

定理 2. (Bousfield, 岩瀬, Ho) i) X が H -空間, A_n -空間
 ($n \leq \infty$), ホモトピー n 回ループ空間 ($n \leq \infty$) の構造を持つ
 なら, その h -局所化 $L_h(X)$ も同様の構造を自然に持ち,
 しかも局所化写像 $\mathcal{f}: X \rightarrow L_h(X)$ がその構造を保つ様に
 出来る. ii) h -local な空間の直積, レトラクト, ホモトピー
 逆極限も h -local となる

定理 3. h -半局所化及び h -半局所的な空間について,
 上記定理 2 の i), ii) と同様な結果が成立する

定理 4. i) X が h -local なら ΩX もそうなる. ii) X が
 (h, n) -local なら ΩX は $(h, n-1)$ -local iii) X が $(h,$
 $n)$ -local なら $(h, n+1)$ -local であり, さらに h -local でもある

上記定理 4 の iii) は X がスペクトラムの場合も成立する。
 これより X が空間又はスペクトラムの時、次の様な tower が
 自然に構成される。

$$X \rightarrow \cdots \rightarrow L_h^{n+1} X \xrightarrow{g_n} L_h^n X \xrightarrow{g_{n-1}} L_h^{n-1} X \rightarrow \cdots$$

§2. 以下安定の場合、即ち圏 $\mathcal{S}$ 又は $\tilde{\mathcal{S}}$ で考える。

例 2. $h_* = \pi_*$ のとき $L_h^n(X)$ は n 次元以上のホモトピーを消したスペクトラムであり、上記 tower は Postnikov system に他ならぬ。

例 3. h が周期的な場合 (例えば $h = K$)、 $L_h^n(X) \cong L_h(X)$ (in $\tilde{\mathcal{S}}$) ($\mathcal{S}$ で書けばホモトピー同値 $L_h^n(X) \simeq L_h(X)$)

例 4. $h = \pi \oplus K$ のとき $\operatorname{holim}_{n \rightarrow -\infty} L_h^n(X) \simeq L_K(X)$,
 $\operatorname{holim}_{\infty \leftarrow n} L_h^n(X) \simeq X$

例 5. h_* が connective なら $\operatorname{holim}_{n \rightarrow -\infty} L_h^n(X) \simeq pt$, さ
 らに X も connective なら $\operatorname{holim}_{\infty \leftarrow n} L_h^n(X) \simeq L_h(X)$

以上の事柄の証明については準備中の論文を参照されたい。
 X が環スペクトラムなら, $L_H X$ も自然にそうなるが, $L_H^{\mathbb{Z}}(X)$
 は必ずしもそうならないし, 半局所化と smash 積の関係は
 良く分かっておらず, これが計算の障害となっている。

文献

- [1] A.K. Bousfield, The localization of spaces with respect to homology, *Topology* 14 (1975), 133-150
- [2] —, The localization of spectra with respect to homology, *ibid* 18 (1979) 257-281