

準周期性渦度分布の不安定性と遷移

阪府大 工 村上洋一 (Youichi Murakami)

阪府大 工 福田浩昭 (Hiroaki Fukuta)

1 はじめに

対流のパターンに代表される周期的な空間構造は、流体系に限らずきわめて普遍的に観察されることはよく知られている。これは静止状態が不安定になる際、代表的な長さを持った不安定モードが選択されることが原因と考えられるであろう [1]。周期構造ほど普遍的に存在するものではないが、より複雑な構造として準周期構造と呼ばれるものがある。準周期性とは2つ以上の周期を持ち、その周期が互いに無理数倍のものを言う。簡単な例としては、 $\sin x + \sin \sqrt{2}x$ のような関数が考えられる。このような関数は周期が有理数倍のときとは異なり、特定の周期を持たない。巨視的な物理現象においても準周期構造が現れることがある。例としては、Lowe と Gollub [2] による液晶対流の実験がある。彼らはここで自発的に発生したロールに対してそれとは異なる周期を持った外力を加えて、近似的な準周期構造を実現している。また、側壁で囲まれた引き延ばされた渦列において渦列の周期と異なる不安定モードが臨界を与えることが理論的に計算されており、2次流として準周期渦列が発生することが予想される [3]。このような1次元的な準周期構造以外にも2次元的な準周期構造として準結晶状態がファラデー共鳴の実験で観察されている [4]。以上の例は定常状態として現れる準周期状態であるが、境界層流れにおいて2つの互いに無理数倍の攪乱を導入して非定常な遷移状態として実現される場合もある。

ここでは、簡単な定常的な準周期構造について考える。準周期構造に関する研究は主に発生機構に関するものがほとんどであり、このような状態がどのようにして不安定になっていくかという問題はほとんど手が着けられていない状況である。理論的な研究がない主な原因は線形の周期系において成立するフロケの定理のようなものが存在しないためであると考えられる。

2 主流と定式化

この研究では、準周期構造の持つ不安定性の機構の一般的な性質を解明することを念頭に置いて、次のような簡単な準周期平行流の線形安定性問題及びその時間発展を調べる。

$$U(y) = \sin y + \sin \omega y, \quad \omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

のような流れを考える。 $U(y) = \sin y$ はコルモゴロフ流と呼ばれており、周期平行流の典型例で数多くの研究がある。 ω は黄金比に選んでいる。実験例を理論的に説明するという立場ではないが、このような流れは Bondarenko et al [5] がコルモゴロフ流を実現したのと同様の装置を作ることにより実験室で再現することも可能である。

準周期関数を係数として持つ方程式を直接取り扱うのは困難なので、準周期流を近似することを考える。黄金比はフィボナッチ数列 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ の特性方程式の解であるので、フィボナッチ比 $\omega_n = F_{n+1}/F_n$ を用いて黄金比を近似することにする。もちろん、 $n \rightarrow \infty$ の極限で $\omega_n \rightarrow \omega$ である。このようにして

$$U(y) = \sin y + \sin \omega_n y, \quad \omega_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad (2)$$

を定義すると、これは単なる周期流であるので通常のようにフロケの定理を用いることができる。図1にフィボナッチ数の収束性がプロットしてある。このように値としては $\omega_8 = 55/34 = 1.6176..$ で極限にあたる黄金比 $(1 + \sqrt{5})/2 = 1.6180..$ と四捨五入して4桁合っていることがわかる。図2に主流がどのくらいずれているかが示されている。明らかであるが、長い領域をとればだんだんずれていく。準周期性がどの程度再現されているかイメージできると思う。なお、この主流をこの研究では**フィボナッチ流**と呼ぶ。また、 ω_n の場合 n 次のフィボナッチ流と呼ぶ。

さて、このような流れは実験室において薄い流体層で実現することが可能である。薄い層における流れは、速度に比例する底の抵抗を伴う2次元のナビエーストークス方程式で近似的に記述されることが知られている [6]。したがって、対応する渦度方程式は次のようにかける。

$$(\Delta \Psi)_t + \Psi_x \Delta \Psi_y - \Psi_y \Delta \Psi_x = \nu \Delta^2 \Psi - \lambda \Delta \Psi - \Delta F \quad (3)$$

ここで、すべての物理量は無次元化されているとする。 Ψ は流れ関数、 ν は動粘性率、 λ は底の抵抗係数であり、 $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ である。外力 F は定常な流れがフィボナッチ流になるように選ばれている。

3 線形安定性

フィボナッチ流（主流）の線形安定性は通常のように取り扱うことができる。主流に対して攪乱 ψ が小さいとして攪乱の非線形項を無視する。その後フロケの定理を適用して ψ を

$$\psi = \exp[\sigma t + i(\alpha x + \beta y)] \sum_{m=1}^{\infty} b_m \exp(imy) \quad (4)$$

のようにおく。 $\alpha (> 0)$ は流れ方向 (x) の波数、 $\beta (0 < \beta < 0.5)$ は実のフロケ指数、 σ は求める必要のある増幅率であり複素数になりうる。係数 b_m は固有ベクトルの係数に対応する。この式を線形化された式に代入することにより解くべき行列式が得られる。無限の和であるところを有限の M に打ち切ってQR法のサブルーチンを用いて固有値 σ を求める。実際の数値計算においては十分な打ち切り数 M をとる必要がある。我々は例えば $n = 7, \omega_7 = 34/21$ に対して $M = 800$ をとっている。収束性に対しては M に対する固有値の変化を調べることにより、4から5桁の精度を確保している。非粘性の場合について扱い、その後粘性の効果を考慮する。なお、底の減衰項は増幅率を抵抗係数 λ だけシフトするだけであるので特に計算し直す必要はない。

図3に非粘性 ($\nu = \lambda = 0$) の場合の ω_n ($n = 1 \sim 7$) について、波数 α に対する最大増幅率 σ_r の変化が示されている。ここでは、フロケ指数 $\beta = 0$ とおいている。 β は増幅率を少し減少させる効果を示すので、本研究ではこれ以降考えない。 n が大きくなるにつれて増幅率曲線の重なる部分が増えていることがわかる。特に、興味のある最大増幅率を与える $\alpha \approx 0.8$ あたりの波数では、 $n \geq 5$ で収束しているとみなしてよいであろう。増幅率の大きさについてはこの程度の n で $n \rightarrow \infty$ を取り扱っているとみなせる。

図3からは準周期性の特徴的なことはわからない。次に、最大増幅率以外の増幅率を与える第2固有値以下のモードについて調べる。通常の流れの線形安定性を調べると、1つの波数に対して複数の不安定モードが一般に存在する。ちなみに、周期流の代表例であるコルモゴロフ流

は1つの不安定モードしか存在しないことが知られている [6]。図4に $\omega_6 = 21/13$ （ここでも非粘性）の場合の結果が示されている。特徴的なことは、5本の曲線が非常に近接している点である。特に、最大増幅率のところでその差が非常に小さくなっている。これ以外の不安定モードも存在するが大きさはかなり異なっているので、ここでは考察せず、最大増幅率に‘縮退’しているものについてその詳細を調べていく。完全に縮退しているわけではなく、その大きさは表1に示すように微妙に異なっている。振動数 σ_i はオーダー的には同じであるが、明らかに異なっている。なお、数値計算では5から6桁の精度がある。このような増幅率の分布の特徴を**増幅率縮退**とわれわれは呼ぶことにする。

この増幅率縮退が n （大きくなるほど準周期流に近づく）の増加とともにどのように変化するか示すために、表2にその個数をまとめた。このように n を増やすと増幅率縮退の程度は上がっていく。このことから理想的な準周期流においては無限の不安定モードが縮退していると推測される。また、定常モードの個数 N_S は単調に増加しないが、振動モード N_T は単調に増加している。振動モードはこの場合複素共役でるので2個として数え、総和 $N_n = N_S + 2N_T$ をとる。 $n \leq 8$ の範囲で次のような関係が成立する。

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-2}, \quad (n \geq 3), \quad N_1 = 1, \quad N_2 = 1, \quad (5)$$

これはフィボナッチ数の定義そのものである。このような関係式が成立する数学的な証明は知られていないが、単なる偶然とは考えにくい。この関係は流れ場を複雑にしていく過程と増幅率縮退モードの個数とは密接な関係があることを示唆している。

フィボナッチ流のこのような顕著な性質が粘性によって変化するかどうかを次に調べる。図5には横軸に動粘性率 ν をとり縦軸に増幅率縮退のモードの増幅率をとっている。動粘性率の増大とともに縮退は弱くなりモード間の差は大きくなる傾向があるが、 ν が0.1以下のオーダーではそれほど開いていないことがわかる。粘性の影響でこの縮退は簡単にはなくなるとみなすことができる。ただし、縮退したモード間での増幅率の大小関係は粘性の影響によって変化する。また、底の抵抗 λ は縮退には全く影響しない。なぜなら、 $\sigma_r(\lambda'(\neq 0)) = \sigma_r(\lambda = 0) - \lambda'$ の関係が成立するからである [7]。

図6に図4に対応する非粘性の場合の5種類の不安定モードの構造: $|\psi(y)|$ ($\psi(y) = \sum_{m=-800}^{800} b_m \exp(imy)$) が示されている。いずれも1つもしくは2つのピークをもっていることがわかる。いずれのピークも似ており、主流の変曲点を4つぐらい含んでいる。 $|\psi_2|$ と $|\psi_3|$ は非常によく似ているが、この図では位相が考慮されていないことに注意しよう。また、ピークとピークの間に小さい山の有無の違いがある。この小さな山の有無は不安定モードの時間発展を考える際重要になる。また、コルモゴロフ流などの通常の周期流においてはフロケモードはサイン波のように広がっており、局在化したピークをもたない。(近似) 準周期流に特有の構造と考えられる。なお、予想されることではあるが、動粘性率 ν によりモードの構造は緩やかになることを確認している。

4 不安定モードの発達過程の直接数値計算

増幅率縮退したモードのうち実際にどのモードが時間発展するかをここで調べる。広がった系では通常、波数の異なる不安定モードが多く存在し、そのうちどの波数の不安定モードが選択されるかが議論されることが多い [8]。われわれの問題はこれとは異なり、波数を1つに固定したと

しても多くの不安定モードが存在する。このような場合にすべての不安定モードが成長するのかそれとも特定のモードが成長すると他のモードの成長は抑制されるのか明らかではない。また、複数の平衡状態が存在するかもしれない。以上の点を明らかにするために基礎方程式 (3) を直接数値計算した。パラメータは $\lambda = 0.4$ と $\nu = 0.01$ に固定し、 $\omega_6 = 21/13$ の場合を扱う。最大増幅率はこの場合、 $\sigma \approx 0.15$ となる。空間領域は $[0, 4 \times 2\pi] \times [0, 13 \times 2\pi]$ に対して周期境界条件を適用した。 y 方向は主流が 1 周期入るよう大きくとってある。また、 x 方向はこうにとったので、線形不安定モードとしては $\alpha = 0.75$ のみが含まれるので、その波数とその高調波のみが励起されることが期待される。実際そのようになることが確認されている。通常の擬スペクトル法と積分因子法に基づく前進オイラー法を適用した。フーリエモードの数は x 方向に 64、 y 方向に 1024 をとり、 $\Delta t = 0.01$ としている。数値スキームのチェックは固有値問題で求めた増幅率と比較することで行い、通常 2 桁の精度が得られた。初期条件は定常なフィボナッチ流に小さな乱数を加えたもの、線形増幅モード ψ_2 を加えたもの、また、線形増幅モード ψ_3 を加えたものの 3 種類を用いた。

図 7 にフィボナッチ流に線形不安定モード ψ_2 を加えた場合の攪乱のみの流線の時間発展が示されている。定性的な様子を明らかにするのが目的であるので、等高線のレベルは統一されていない。(以下同様。) 初期の時刻では x 方向にのびた 2 つの渦列がある。これは不安定モードが y 方向に 2 つのピークを持つことの表われである。初期の時刻にはこのモードが線形増幅率にしたがって成長する ($t = 10$)。増幅につれて ($t = 20, 25$)、 x 方向の波数 α に関する高調波も成長するが、これはほとんど見えない。渦列のとなりの領域が変化していることに気づくであろう。そこに新たな渦列が生成されていく。これは増幅率がほとんど同じ別の不安定モードが非線形項から生じ成長したものと考えられる。このようにしてだんだん他のモードも成長して流れ場全体に渦列が生じる ($t = 50$)。つまり局在したモードを与えてもそのモードのみで平衡状態になるのではなく、複数のモードが励起されて平衡状態になるのである。定常な流れの最初の分岐で自由度の大きい状態 (理想的な準周期流の場合は無限自由度) に遷移するのは、通常とは異なり非常に興味深い。

さて、次にフィボナッチ流に不安定モード ψ_3 を加えた場合の時間発展が図 8 に示されている。図 7 で示した場合と非常によく似ているが、最終的にはすべての領域が攪乱で埋め尽くされることはなく、'窓' の領域が見られる。 ψ_2 と異なり、 ψ_3 はピークとピークの間に平らな部分がある。この部分では渦列が成長していない。成長の後、'窓' の領域が存在する攪乱とそうでない攪乱の 2 つのタイプに増幅モードは分類することができる。固有関数の何らかの対称性と関連しているようであるが、詳細については現時点では不明である。

微小な乱数を攪乱を主流に加えたものを初期条件とした場合の時間発展は図 7 と非常によく似ているので、図は省略する。しかしながら、ピークが同じ位置にある攪乱が複数あるので、同じ状態がどうかモードを固有モードを用いてスペクトル分解をして確かめる必要がある。ここでは詳しく述べないが、実数空間では同様に見えても固有モードの成分比は全く異なっている場合がある。

5 おわりに

最後に、数値的に得られた結果、その物理的な意味、これまでの研究との関連および今後の課題について言及する。本研究でわれわれは空間的準周期性が流れの安定特性にどのような効果を及ぼすかを解明するために近似準周期流としてフィボナッチ流を導入した。非粘性および粘性の弱い場合の線形安定性を計算することにより、最大増幅率をもつ‘縮退’した不安定モードが存在すること、及び、縮退した不安定モードの個数 N_n がフィボナッチ流の次数 n (主流の複雑さ) とともにフィボナッチ数の関係を満たしながら増大することを見出した。このことは純粋な準周期流の場合、無限に縮退した不安定モードが存在することを強く示唆している。この数学的証明は今後の課題である。これらの不安定モードがどのように時間発展するか、特に、不安定モードのどれが選択的に発達するかどうかを明らかにするために、底の抵抗の効果を取り入れた2次元ナヴィエーストークス方程式を直接数値計算した。主流に微小なランダムな攪乱を加えると、流れ場全体に渦列が広がったので、複数のモードが励起されることがわかった。また、特定の攪乱のみを主流に加えてもそのモードの成長をきっかけとして他の縮退した不安定モードも成長することが明らかになった。このように超臨界状態において多数のモードが励起されるのが従来研究されてきた流れの遷移過程と著しく異なっている。遷移過程においてどのようなモードが励起されどのような平衡状態をとるかまたその状態は初期条件に依存するかどうかといった問題は現在進行中である。また、この研究で扱った流れは最初の分岐で多数(理想的には無限の)自由度で記述される力学状態に遷移するので、従来のいわゆる乱流へのルートについての研究成果が直接適用できない。以前にも述べたが、この流れは実験的にも実現可能である。以上の結果が実験でどの程度はっきりと観察されるかを明らかにすることは大変興味深い。われわれの取り扱った問題は人工的すぎるといった印象を持ったかもしれないが、準周期性の流れの安定性に及ぼす影響はこの研究で初めて明らかになったことであり、どの程度普遍的に現れることかどうかは今後の興味ある課題である。せん断流の遷移において2つの攪乱を意図的に導入してその干渉の効果を実験的に調べることがよくあるが、このような場合非定常な準周期構造が過渡的に生じる。このような場合ここで見つかった結果が観察されるかもしれない。また、工業的な応用において混合促進は重要な位置を占めているが、準周期的な幾何学的な配置を何らかの形で利用することができるかもしれない。(自由度の高い状態に自発的に遷移することに着目。) なお、この結果はフィボナッチ数に特有の性質によるものではなく、無理数として黄金比の代わりに $\sqrt{2}$ を選んでも同様の結果が得られることを念のために確認してある。

REFERENCES

- [1] M. C. Cross and H. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993); A. C. Newell, T. Passot and J. Lega, Annu. Rev. Fluid Mech. **25** 399 (1993).
- [2] M. Lowe and J. P. Gollub, Phys. Rev. A **31**, 1893 (1985).
- [3] H. Fukuta and Y. Murakami, Phys. Rev. E **57**, 449 (1998).
- [4] B. Christiansen, P. Alstrøm, and M. T. Levinsen, Phys. Rev. Lett. **68**, 2157 (1992); W. S. Edwards and S. Fauve, Phys. Rev. E **47**, R788 (1993).
- [5] N. F. Bondarenko, M. Z. Gak and F. V. Dolzhanskii, Izv. Atmos. Oceanic Phys. **15** 711 (1979)
- [6] L. D. Meshalkin and Y. G. Sinai, Prikl. Math. Mekh. **25** 1149 (1961); K. Gotoh, M. Yamada and J. Mizushima, J. Fluid Mech. **127** 45 (1983).
- [7] F. V. Dolzhanskii, V. A. Krymov and D. Yu. Manin, Sov. Phys. Usp. **33** 495 (1990);
- [8] A. V. Getling, Sov. Phys. Usp. **34** 737 (1991).

α	σ_r	σ_i
0.8	5.68189×10^{-1}	$\pm 4.1137 \times 10^{-2}$
0.8	5.66425×10^{-1}	$\pm 2.9067 \times 10^{-2}$
0.8	5.66364×10^{-1}	$\pm 2.9222 \times 10^{-2}$
0.8	5.65215×10^{-1}	0
0.8	5.65213×10^{-1}	0

表 I

n	ω_n	N_S	N_T	$N_S + 2N_T$
1	2/1	1	0	1
2	3/2	1	0	1
3	5/3	2	0	2
4	8/5	1	1	3
5	13/8	1	2	5
6	21/13	2	3	8
7	34/21	1	6	13
8	55/34	1	10	21

表 II

FIGURE CAPTIONS

図 1

フィボナッチ比の収束性。

図 2

近似準周期流（フィボナッチ流）と理想的な準周期流との比較。

図 3

非粘性の場合 ($\nu = 0, \lambda = 0$) の波数 α に対する最大増幅率 σ_r ($\omega_n, n \leq 7$)。 ω_6 の最大増幅率曲線は ω_7 の場合と非常に近い。

図 4

$\omega_6 = 21/13$ の場合の増幅率曲線 σ_r 。第 6 固有値まで示されている。第 5 固有値までは最大値のところではほぼ同じ値をとることがわかる。黒丸は定常モード (σ : 実数, $\sigma_i = 0$)、白丸は進行波モード (σ : 複素共役, $\sigma_i \neq 0$)

図 5

粘性 ν の縮退した最大増幅率 $\sigma_r(\alpha = 0.75, \omega_6 = 21/13)$ に対する影響。5 つのモードのうち最大ものを σ_L 、最小ものを σ_S としている。

図 6

縮退した最大増幅モードの空間構造（振幅の大きさ） $|\psi_1|$ 。ただし、非粘性の場合 $\nu = \lambda = 0$, $\omega_6 = 21/13$ 比較のため 6 次のフィボナッチ流 $U_6(y)$ とその 2 階微分が示されている。

図 7

主流と微小な線形増幅モード ψ_2 の時間発展。 $\nu = 0.01, \lambda = 0.4$ of $\omega_6 = 21/13$. 攪乱のみの流線が示されている。

図 8

主流と微小な線形増幅モード ψ_3 の時間発展。 $\nu = 0.01, \lambda = 0.4$ of $\omega_6 = 21/13$. 攪乱のみの流線が示されている。

TABLE CAPTIONS

表 I

増幅率 σ_r ($\omega_6 = 21/13, \nu = 0, \lambda = 0$)

表 II

縮退最大増幅モードの個数: $\nu = 0, \lambda = 0$. N_S : 定常解の個数 ($\sigma_i = 0$); N_T : 進行波解の個数 ($\sigma_i \neq 0$).

图 1

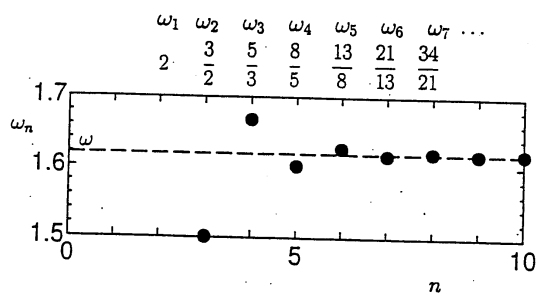


图 2

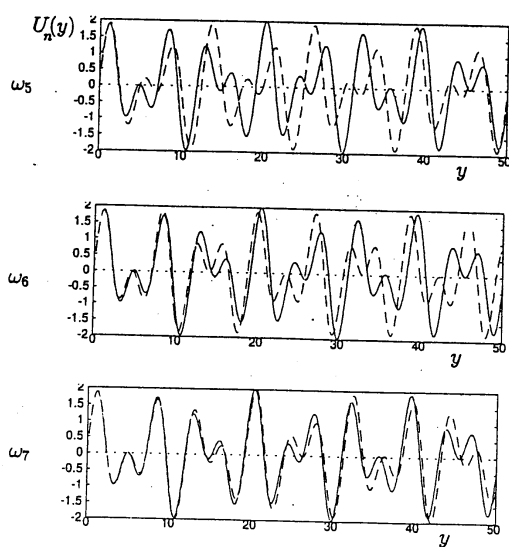


图 3

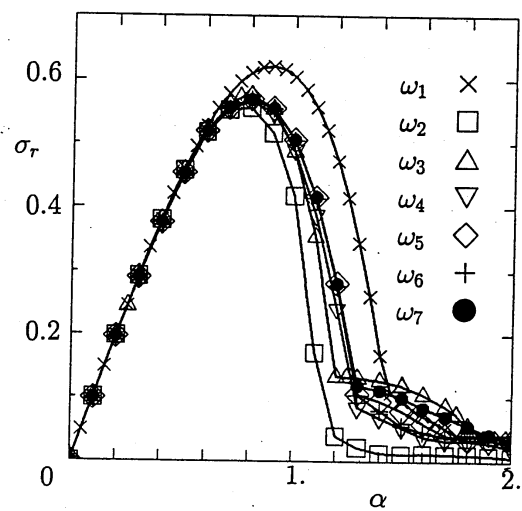


图 4

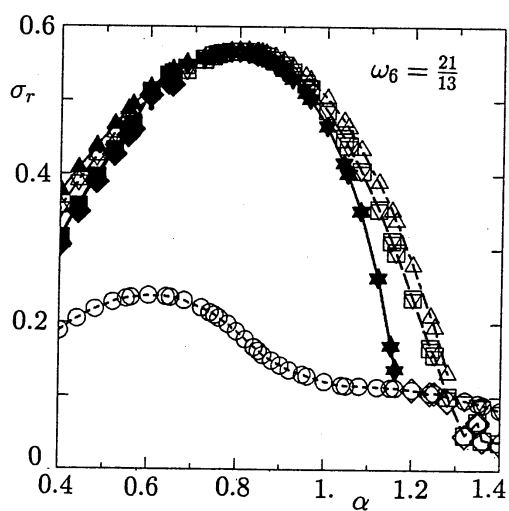


图 5

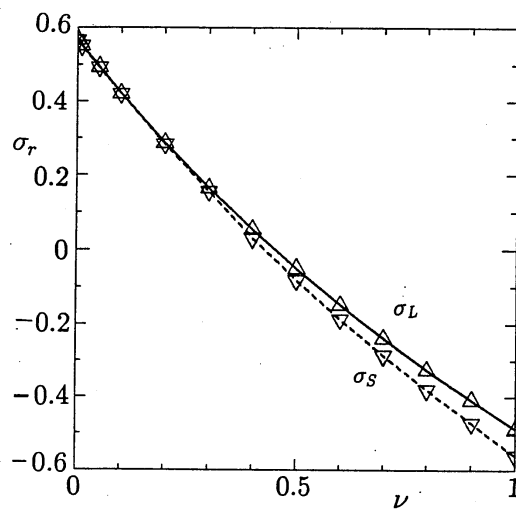
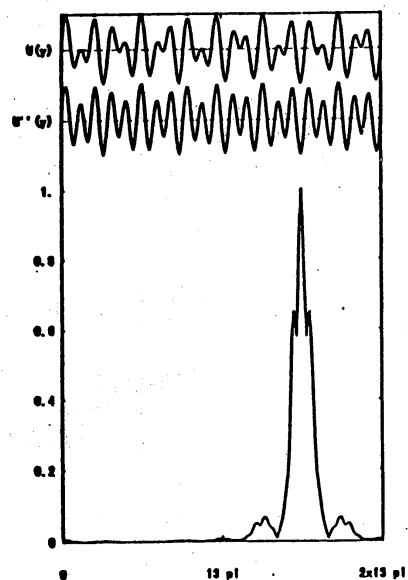


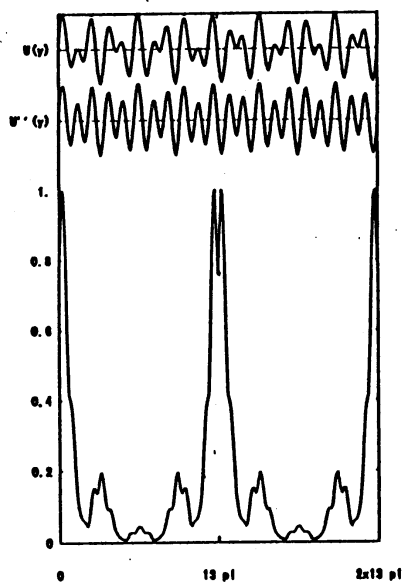
图 6

Inviscid $\omega_0 = \frac{21}{13}$ ($\alpha = 0.75$)

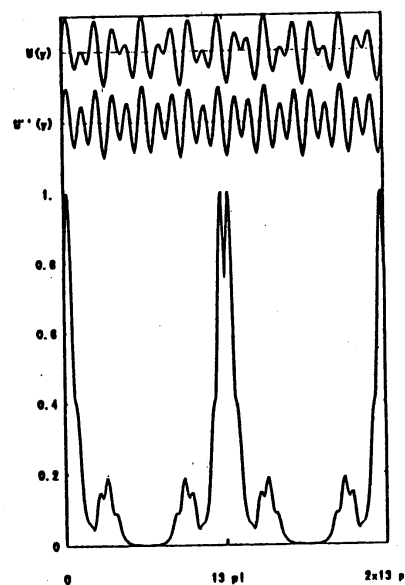
14.1



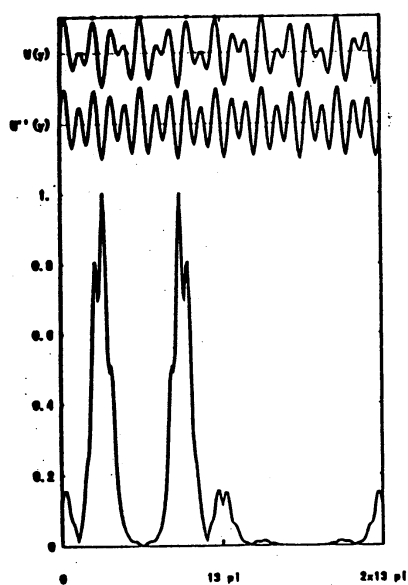
14.2



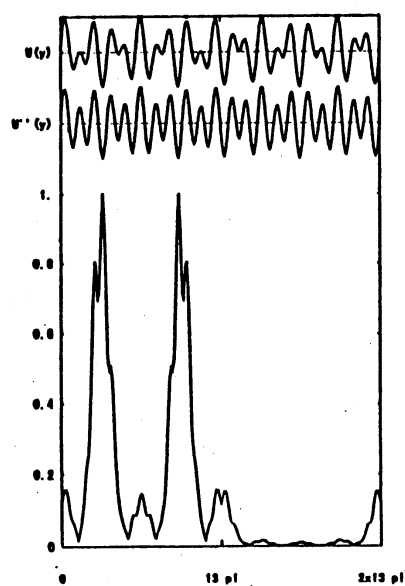
14.3



14.4



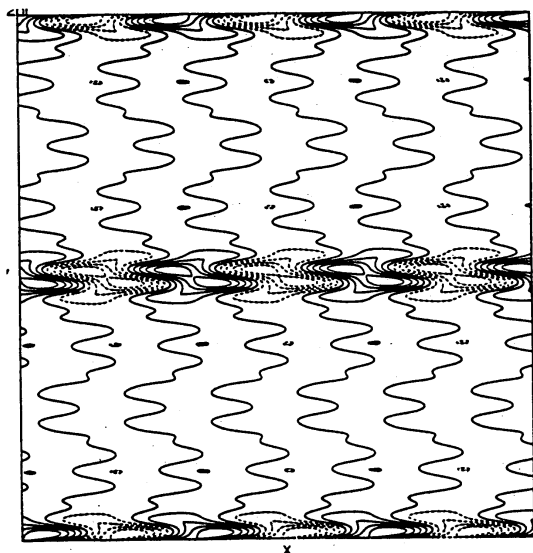
14.5



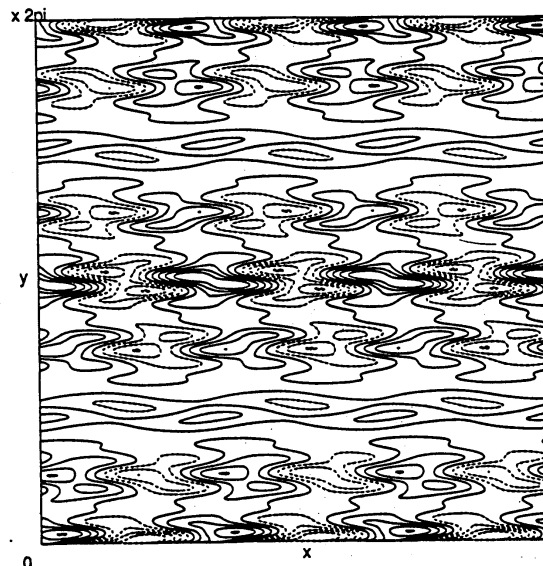
7

Time-evolution (ψ_1)

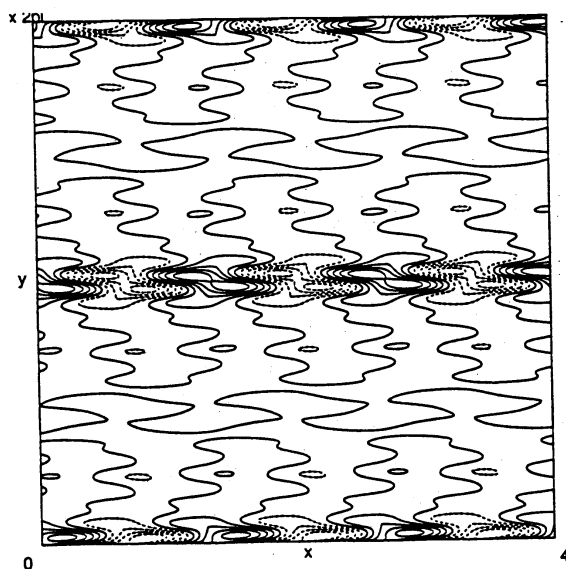
$$\omega_b = 21/13, \quad \lambda = 0.4, \quad \nu = 0.01$$



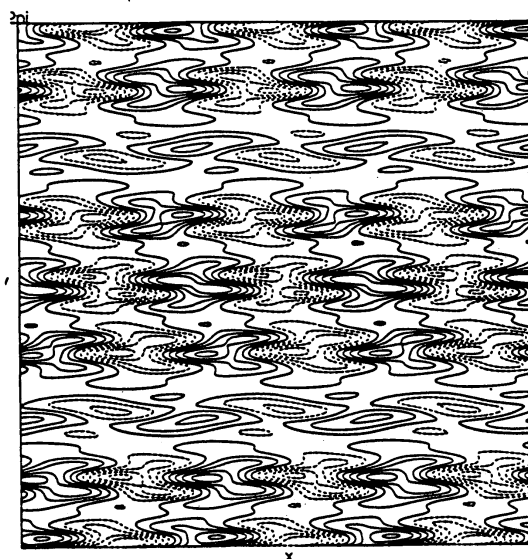
$T=0$



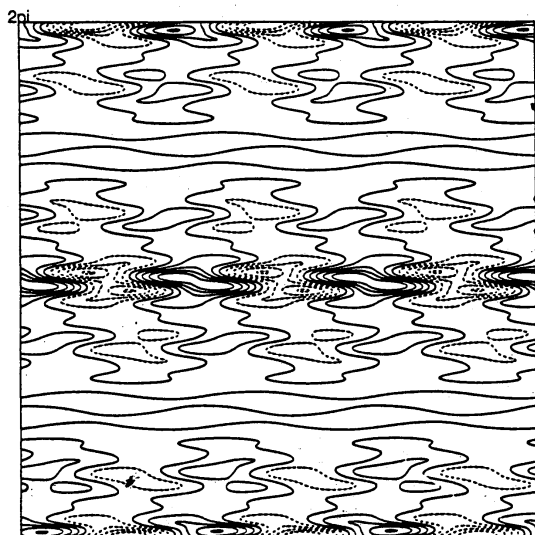
$T=25$



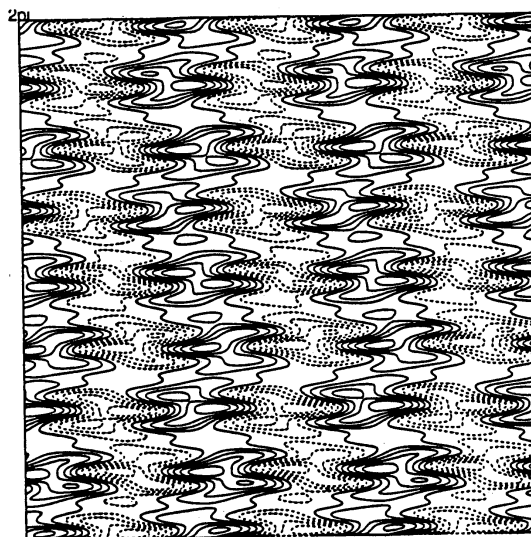
$T=10$



$T=30$



$T=20$

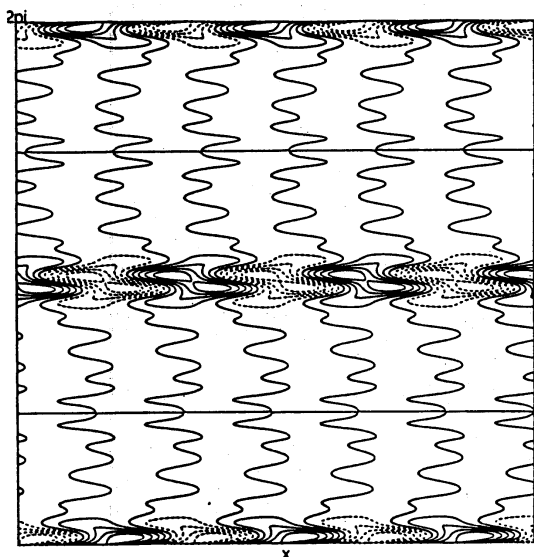


$T=50$

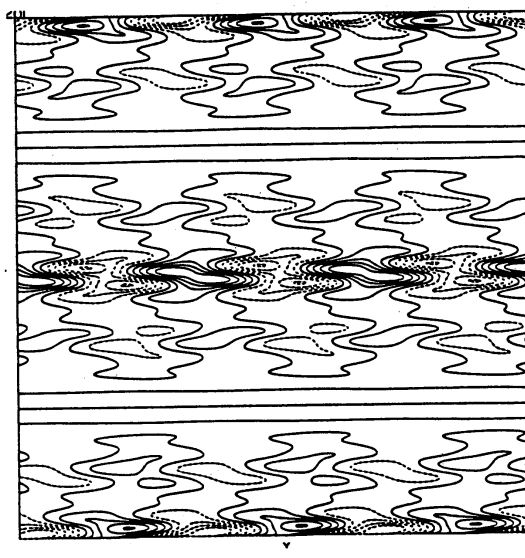
Fig. 8.

Time-evolution (ψ_2)

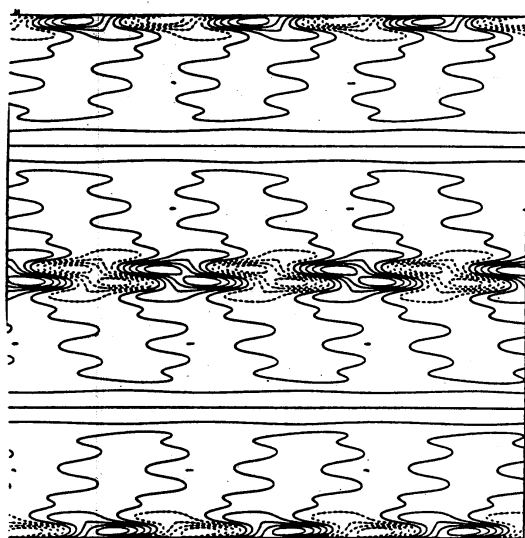
$$\omega_b = 21/13, \quad \lambda = 0.4, \quad \nu = 0.01$$



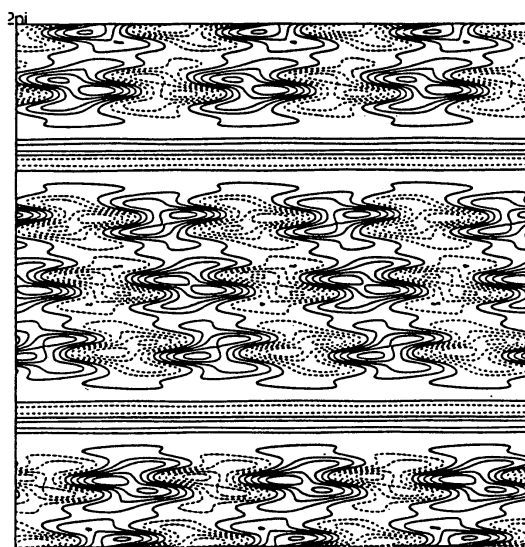
$T=0$



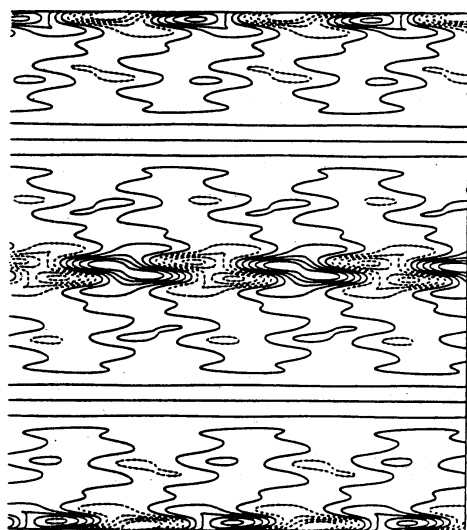
$T=20$



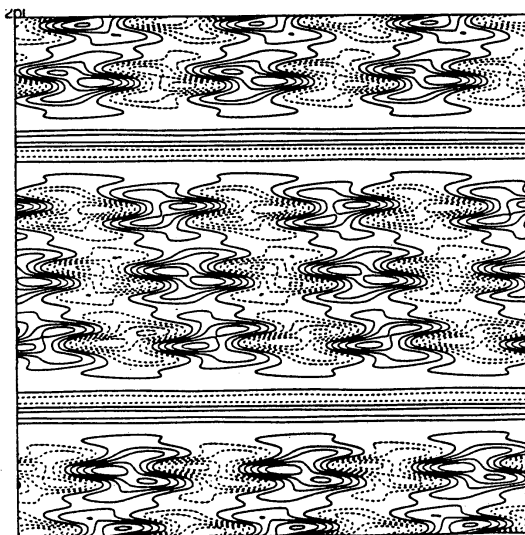
$T=5$



$T=25$



$T=15$



$T=55$