

non-simple な *knot* は
Property P を持つか?

神戸大 中川 洋子

多分、"Cubes with knotted holes" [1] が著かれた頃は、
Poincaré Conjecture の反例を作れるかも知れないと言うことで
Property P の問題が考えられていたのではないだろうか。
今のところ、この方向に対しては否定的で、むしろ、全ての
non-trivial な *knot* が Property P を持ち、従って、その
knot manifolds が homeo なり、よってその *knot* は
互に *equivalent* であると言う問題の解決のために、
Property P の問題を考えようとする方が、妥当のようである。
([3], [6])

この報告では、上に掲げた *conjecture* を述べるに必要な
定義、従って、証明(?) の概略とを書き留めるだけとする。

Def. 与えられた *knot* K の *companion knot* とは
次の様な *knot* である。

W を k の regular neighborhood でけりい k を内部に含む solid torus とする. W の全ての meridional cell と k が交わっているなら, W の core が represent する knot type を, k の companion knot と呼ぶ.

Def. 与えられた knot k が simple knot であるとは, k の全ての companion knot が trivial であるとき.

Conjecture. knot k を non-simple knot とする.
このとき, k は Property P を持つ.

Ideas of proof. Dehn の方法により, homology 3-sphere M を作る. 即ち, $M \cong (S^3 - \text{int } V) \cup_{\mathcal{F}} S^1 \times D^2$, $\mathcal{F}$ は $\partial(S^1 \times D^2)$ ($S^1 \times D^2 = V'$ と表わす) から, ∂V への homeo で, $\partial V'$ の meridian を ml^{ν} ($\nu \neq 0$) に isotopic な ∂V 上の simple closed curve λ 写す写像とする. (m, l ; 夫々, ∂V の meridian と longitude を表わす.)

W を k の companion knot の regular neighborhood で, V を内部に含むものとするとき, 条件より, W は

knotted solid torus になっている。

M を $(S^3 - \text{int } W) \cup ((W - \text{int } V) \cup V') = M_1 \cup M_2$ と表わす。このとき、 $M_1 \cap M_2 = \partial W$ (knotted torus) になっている。従って、induced map: $\pi_1(\partial W) \rightarrow \pi_1(M_1)$ は mono. であるから、もしも、 $\pi_1(\partial W)$ から $\pi_1(M_2)$ への map. が mono. であるならば、
解けば、 $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) \pi_{1(\partial W)}^* \pi_1(M_2)$ となつて、 $\pi_1(M)$ は non-trivial, 即ち、 M は simply connected ではないことが解る。

Conjecture を 証明するためには、 $\pi_1(\partial W) \rightarrow \pi_1(M_2)$ なる homomorphism が、mono. であることを示せば十分である。

今、 $\pi_1(\partial W) \rightarrow \pi_1(M_2)$ なる homomorphism が mono. ではないと仮定すると、 ∂W 上の trivial ではない simple closed curve J があって、 M_2 で non-singular disk D を bound している。この D と $\partial V'$ との intersection を考える。 $D \cap \partial V'$ は、 n 個の $\partial V'$ の meridional curves より成るように surgery 出来る。1つの curve を考えると、 $\partial V'$ の meridian であるから $(1, \nu)$ -type の V の cable knot になっている。この n 個の intersection curves を link として

捕えて $l_1 \cup \dots \cup l_n = L'$ と表わす. すると、
 link $L = l_0 \cup L' = l_0 \cup l_1 \cup \dots \cup l_n$ (l_0 は、
 元の non-singular disk D の boundary J を
 表わす. 即ち, l_0 は W の cable knot である.) は、
 n 個の穴のあいた disk の boundary に 着いている。
 ここで link L の Alexander polynomial を
 $\Delta(t_0, \dots, t_n)$ で表わす. この polynomial を
 完全形形で得ることは (今のところ) 出来ていないが、
 Torres の方法 [7] によって、 $\Delta(t_0, 1, \dots, 1)$ 及び
 $\Delta(1, \dots, 1, t_n)$ を求めることが出来る. 二つを、求め
 るときは、直接に計算する方法 (link L が genus 0 で
 あることを用いて) と、linking number を用いて、
 夫々、 l_0, l_n の knots の Alexander polynomials
 $\Delta_{l_0}(t_0), \Delta_{l_n}(t_n)$ と関係づける方法とがある。

$g = |\mathcal{L}(l_i, l_j)|$ ($i, j \neq 0, i \neq j$) (条件より、任意の
 i, j に対し、 $|\mathcal{L}(l_i, l_j)|$ は一定となることが解るので)
 と、すると、 $\nu \neq 0$ より $g \neq 0$ が求まり、更に、
 $\Delta(t, \dots, t)$ を求めることにより、上の二つの方法で
 求めた $\Delta(t_0, 1, \dots, 1)$ 及び $\Delta(1, \dots, 1, t_n)$ が
 一致したら、矛盾が出てくる。(と、予想したのだが)

最初に、 $\pi_1(2W) \rightarrow \pi_1(M_2)$; mono. と仮定したと

が、誤りであった。よって、 M は *simply connected* であることが解り、与えられた *non-simple knot* は *Property P* を持つことがええる。

(注) 途中で *link* L を考えるが、 $n=1$ の場合 L は *annulus* の *boundary* となり、夫々が、 V 及び W の (*trivial* である) *cable knot* であることから、Schubert の結果より、この場合は起るべきことが、解る (*annulus* の *boundary* の *knot type* は *equivalent* であることが証明されている)。よって、*conjecture* が正しいと思つた理由で、 $n \geq 2$ の場合に、何か *invariant* (?) を見つけられて、一方から考えた時には、*genus 0* の *link* になっているし、もう一方からは l_0 と l_i ($i=1, \dots, n$) の *knot types* は異なるのだから、ある種の *invariant* が一致し得るであろうと云うが、*main idea* がある。この *invariant* (?) を、 L の *Alexander polynomial* を計算することによって、得ようとした。

色々な形で *polynomials* を求めようとしてゐるが、この方法では、何らかの条件が必要となりそうである。

REFERENCES

- [1] Bing, R.H. and Martin, J.M., "Cubes with Knotted Holes," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 155, 1971, 217-237.
- [2] González-Acuña, F., "Dehn's Construction of Knots," Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 15, 1970, 58-79.
- [3] _____, "On an Article by J. Simon," An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico, vol. 11, 1971, 43-54.
- [4] Hemple, J., "Simply Connected 3-Manifold is S^3 if it is the Sum of a Solid Torus and the Complement of a Torus Knot," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15, 1964, 195-199.
- [5] Simon, J., "Some Classes of Knots with Property P," Topology of Manifolds, Markham, 1970.
- [6] _____, "An Algebraic Classification of Knots in S^3 ," Ann. of Math., vol. 97, 1973, 1-13.
- [7] Torres, G., "On the Alexander Polynomial," Ann. of Math., vol. 57, 1953, 57-89.