

場の量子論にあらわれる函数の解析性について.

東大理. 森本光生

§0. 場の量子論([2], [5])には, ある複素領域で整型(holomorphic)な函数の境界値として得られる超函数がしばしば登場する. 一方佐藤超函数論では, 二のような超函数が最も基本的な概念である. 従って, 場の量子論に現れる函数の解析性を調べるには, 佐藤超函数論が有効な手段であるし, また逆に物理学者が開発したこれらの函数の理論は, 我々の超函数論に良い例を提供する. 実際, 公理的な場の量子論が有効に用いられている“くさびの刃の定理”は, 佐藤超函数論に属する理論を産み出し, そしてこの定理の本質は層論の考え方で明らかになった([3]) 本稿では, 場の量子論で解析接続の方法で得られている Bargman-Hall-Wightman, Jost の定理と, 超函数論の立場から見ておす.

§1. 超函数論の復習([3], [4], [1]).

我々が考察する多様体は, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ である. $\mathbb{R}^N$ 上には実解析的函数のなる層 $\mathcal{A}$, (佐藤)超函数のなる層

/

が定義されている。 $\mathbb{R}^N$ の余接球バンドルは $\mathbb{R}^N \times \tilde{S}^{N-1}$ ($\tilde{S}^{N-1}$ は $N-1$ 次元の球面) に同型であるが, この上にある層 C が定義されている. 今 $\pi: \mathbb{R}^N \times \tilde{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ なる自然な射影とする. C の π による順像は ($\pi_* C$ と書かれる) $\mathbb{R}^N$ 上の層である.

定理 1. $\mathbb{R}^N$ 上の層の列として, 次の列は完全である:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \pi_* C \longrightarrow 0$$

また $u \in \mathbb{R}^N$ の任意の開集合とする. このとき次の線形空間の列は完全である:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(u) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}(u) \xrightarrow{\beta} C(u \times \tilde{S}^{N-1}) \longrightarrow 0,$$

ここで $\mathcal{A}(u)$ は u 上の実解析的函数のなる空間, $\mathcal{B}(u)$ は u 上の超函数のなる空間, $C(u \times \tilde{S}^{N-1})$ は $u \times \tilde{S}^{N-1}$ 上の C の断面のなる空間を表わす.

(写像 α, β の定義については文献 [3], [4], [1] のどこかを参照せよ.)

$\tilde{\mathbb{R}}^N$ で $\mathbb{R}^N$ の双対空間を表わし, $\tilde{S}^{N-1}$ は $\tilde{\mathbb{R}}^N$ の単位球と考える. Γ を $\mathbb{R}^N$ の開いた凸錐で頂角が原点にあるものとする. 今 Γ^+ で Γ の正の双対錐と $\tilde{S}^{N-1}$ の共通部分を表わす:

$$\Gamma^+ = \{ \eta \in \tilde{S}^{N-1} ; \langle y, \eta \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Gamma \}$$

== 2 == $\langle y, \eta \rangle$ は $\mathbb{R}^N$ と $\tilde{\mathbb{R}}^N$ の内積を表わす. $u \in \mathbb{R}^N$ なる開集合, $F(x) \in \mathcal{B}(u)$ とする.

定義 Γ に完全に含まれる開凸錐 Γ_j の増大列で Γ ととりつくものとする: $\Gamma_j \subset \Gamma_{j+1} \subset \Gamma$, $\Gamma_j \uparrow \Gamma$. 任意の j に対し, u の複素近傍 $\tilde{u}_j$ と

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j \cap T(\Gamma_j), \quad T(\Gamma_j) = \mathbb{R}^N \times \sqrt{-1} \Gamma_j$$

で整型な函数 f が存在して, $F(x) = \mathcal{B}\text{-}\lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$ となるとも, F は Γ 方向に解析的という. $\mathcal{B}\text{-}\lim$ は (佐藤) 超函数としての (コホモロジー的) 極限を表わす.

定理 2 $F \in \mathcal{B}(u)$ に対する次の 2 条件は同値である:

- 1) F は Γ 方向に解析的である;
- 2) $\text{supp } \beta F \subset u \times \Gamma^+$

$\Rightarrow$ $\text{supp } \beta F$ は $\mathcal{C}$ の断面 βF の台を表わす. $\Leftarrow$ の定理に鑑み $\text{sing supp } F = \text{SSF} = \text{supp } \beta F$ とおき, 超函数 F の (分解された) 特異台と呼ぶ. 以上の 2 定理は [3] に証明されている. また層 $\mathcal{C}$ の佐藤先生によるエレガントな定義と層 $\mathcal{C}$ の一般論については [3] または [4] と参照された. 次に佐藤の基本定理を述べる (証明は [3], [4])

定理 3 $F \in \mathcal{B}(u)$ とし, $P(x, D)$ は m 次の実解析的係数をもつ 偏微分方程式 (線形) とある. もし $P(x, D)F(x) = 0$ ならば,

$\text{SSF} \subset \{(x, \eta) \in u \times \tilde{S}^{N-1}; P_m(x, \eta) = 0\}$ である. ただし P_m は P の主部を表わす.

§2. Bargman-Hall-Wightman の定理, Jost の定理

この節では, 場の量子論で周知な上記の2つの定理を復習する。まず記号の約束から始める。

$$\mathbb{C}^{4n} = \mathbb{C}^4 \times \cdots \times \mathbb{C}^4 \quad (n \text{ 個}), \quad \mathbb{R}^{4n} = \mathbb{R}^4 \times \cdots \times \mathbb{R}^4 \quad (n \text{ 個})$$

を考える。 $\mathbb{R}^{4n}$ は必要に応じて $\mathbb{C}^{4n}$ の実部とみなされる。今 $\mathbb{R}^4$ に正の光錐

$$V_+ = \{x \in \mathbb{R}^4; (x, x) > 0, x^0 > 0\}$$

を考える。 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$(x, x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2,$$

$$V_+^n = V_+ \times \cdots \times V_+ \quad (n \text{ 個}) \subset \mathbb{R}^{4n},$$

$$T_n = T(V_+^n) = \mathbb{R}^{4n} \times \sqrt{-1} V_+^n \subset \mathbb{C}^{4n} \quad \text{とおく。}$$

公理的な場の量子論には, T_n で整型な函数 f で実のローレンツ群で不変なものがある (例えば Wightman 函数) f の境界値 F 、 $F(x) = \lim_{y \downarrow x} f(x+iy)$ が物理的に意味のある量である。Bargman, Hall, Wightman; Jost の定理によると, この超函数 F は Jost 表で解析的に与えられることが結論できる。この辺の消息ともう少し詳しく記述しよう。

G は連結なローレンツ群, $G^{\mathbb{C}}$ はその複素化とある。 G は $\mathbb{R}^{4n}$ に, $(G^{\mathbb{C}} \text{ と } \mathbb{C}^{4n} \text{ に})$ 同様に作用させる:

$$G \ni g, \mathbb{R}^{4n} \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto g(x_1, \dots, x_n) = (gx_1, \dots, gx_n)$$

$G^{\mathbb{C}} \ni g, \mathbb{C}^{4n} \ni (z_1, \dots, z_n) \mapsto g(z_1, \dots, z_n) = (gz_1, \dots, gz_n)$.
 柱状領域 T_n は G で不変であるが $G^{\mathbb{C}}$ ではそうではない. そこで
 “拡張された柱” T_n' を次のように定義する:

$$T_n' = \bigcup_{g \in G^{\mathbb{C}}} g T_n,$$

T_n' はやはり柱状領域ではない. 次の2つの定理は周知である:

定理4 (Bargman-Hall-Wightman)

函数 $f(z)$ が T_n で整型かつローレンツ群 G で不変とある.
 このとき $f(z)$ は “拡張された柱” T_n' にまで一価に解析接続され, 複素ローレンツ群 $G^{\mathbb{C}}$ で不変になる.

この定理で, 一価に という所が自明ではない. この定理は本稿で用いないので, ここでは証明しない [2] または [5] と参照された.

定理5 (Jost)

$$T_n' \cap \mathbb{R}^{4n} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n}; \text{任意の } \lambda_j \geq 0, \sum \lambda_j > 0 \text{ に対し } \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \text{ が空間的である.} \right\}$$

ここで $x \in \mathbb{R}^4$ が空間的とは $(x, x) < 0$ のことであり, また x が時間的とは $(x, x) > 0$ のことである. 以後, $T_n' \cap \mathbb{R}^{4n}$ の点を Jost 点 と呼ぶことにする.

この二つの定理を組合せると次の系がいえ,

系 超函数 $F(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$ が与えられたとせよ. T_n で

型な函数 $f(z)$ が存在して, $F(x) = \lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$ という形をしており, かつ $F(x)$ が実のローレンツ群で不変だとせよ. $\Rightarrow$ の時, 超函数 $F(x)$ は J_0 対称で解析的である.

§3 我々の定理.

我々の目的は §2 の系と超函数論の層 $\mathcal{C}$ の考え方にあり見なおすことにある. 佐藤の基本定理を用いる証明のアイディアは佐藤幹夫氏による.

定理6. $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ が与えられたとする. $\Rightarrow$ のとき,

- 1) $\text{SSF} \subset \mathbb{R}^{4n} \times \{(V_+^n)^+ \cup (-V_+^n)^+\}$
- 2) F がローレンツ無限小変換群で不変であるならば, F は J_0 対称で解析的である.

条件の 1) の意味は 超函数 F が V_+^n 方向に解析的な超函数と $-V_+^n$ 方向に解析的な超函数の和と表わされるということである. 条件 2) の意味は次のとおりである:

定義 $F(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ がローレンツ無限小変換群で不変とは, ローレンツ群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の任意の元 L に対し,

$$\sum_{j=1}^n \psi(x_j) L\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

が成立することである. $\psi(x_j) = (x_j^0, x_j^1, x_j^2, x_j^3)$,

$L\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j^0}, \frac{\partial}{\partial x_j^1}, \frac{\partial}{\partial x_j^2}, \frac{\partial}{\partial x_j^3}\right)$, (これは転置行列を表わす) という略記をした.

σ_j の基底として

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

がとれるから、 F が無限小のロ-レ-ンツ変換で不変とは、次の6個の方程式が成立する=とてある。

$$\sum_{j=1}^n (x_j^0 \frac{\partial}{\partial x_j^k} + x_j^k \frac{\partial}{\partial x_j^0}) F(x) = 0, \quad k=1, 2, 3.$$

$$\sum_{j=1}^n (x_j^k \frac{\partial}{\partial x_j^l} - x_j^l \frac{\partial}{\partial x_j^k}) F(x) = 0, \quad 1 \leq k < l \leq 3.$$

§4. 定理の証明.

定理5の証明, (J_{∞} の幾何学的性質が以上の理解に必要となるので、 J_{∞} の定理の証明をきちんと再現しておく.)

1° $n=1$ の場合.

$$T_1' = \bigcup_{g \in G^{\mathbb{C}}} g \{ z = x + \sqrt{-1}y, y \in V_+ \} \text{ とあるとき,}$$

“ $T_1' \cap \mathbb{R}^4 =$ 空間的円盤全体” という等式を示せばよい.

まず包含関係 $\supset$ を示す.

↑

$T_1' \cap \mathbb{R}^4 \ni g z$ とする. $z = x + iy$, $(y, y) > 0$, $y^0 > 0$ である.

$$\begin{aligned} \text{実数} &= (g z, g z) = (z, z) = (x + iy, x + iy) \\ &= (x, x) - (y, y) + 2\sqrt{-1}(x, y) \end{aligned}$$

であるから, $(x, y) = 0$. 今 y が空間的であるから, x は空間的であるか, 又はゼロである. いづれ $|x| = 1$ して.

$$(g z, g z) = (z, z) = (x, x) - (y, y) < 0.$$

次に包含関係 $\subset$ を示す. x が実 $(x, x) < 0$ とする. 適当に空間的回転によつて,

$$x = (x^0, x^1, 0, 0), \quad |x^0| < x^1$$

と (2.7) 今 α 複素数 $0 < \alpha < \pi$ を考える, $\hat{z} = g_\alpha z$:

$$g_\alpha: \begin{cases} \hat{z}^0 = \frac{1}{2} \cos \alpha z^0 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \sin \alpha z^1 \\ \hat{z}^1 = \frac{1}{2} \cos \alpha z^1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \sin \alpha z^0 \\ \hat{z}^2 = z^2 \\ \hat{z}^3 = z^3. \end{cases}$$

$$(Im g_\alpha x, Im g_\alpha x) = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha ((x^1)^2 - (x^0)^2)$$

$$Im (g_\alpha x)^0 = \frac{1}{2} \sin \alpha x^1$$

であるから, $0 < \alpha < \pi$ に対して $g_\alpha x \in T_1$ である.

注意. $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^4$ で任意の $j = 1, 2, \dots, n$ に対して, $(x_j, x_j) < 0$ かつ $|x_j^0| < x_j^1$ が成立するとせよ. このとき $g \in G^{\mathbb{C}}$ が存在して,

$gx_j \in T_1$ が任意の j に対して成立するようにできる.

① 上で考えた複素カーレンツ変換 g_α ですべての x_j は一せいに T_1 の中にうつる.

2° n が一般の場合.

包含関係 $\subset$ をまず示す. $(z_1, \dots, z_n) \in T_n' \cap \mathbb{R}^{4n}$ とする. $g \in G^{\mathbb{C}}$ が存在して, $(gz_1, \dots, gz_n) \in T_n$ となっている. 故に $gz_j \in T_1$. 今 T_1 が凸であるから

$\sum \lambda_j gz_j = g \sum \lambda_j z_j \in T_1$. つまり $\sum \lambda_j z_j$ は $T_1' \cap \mathbb{R}^4$ に属する. 1° により, $\sum \lambda_j z_j$ は空間的である.

次に包含関係 $\supset$ を示そう. $\forall \lambda_j \geq 0, \sum \lambda_j > 0$ に対して $\sum \lambda_j z_j$ が空間的である. $\Rightarrow$ α と $\pm$ 凸錐 K

$$K = \left\{ \sum \lambda_j z_j ; \lambda_j \geq 0, \sum \lambda_j > 0 \right\}$$

は光錐と交らない. 故に2枚の超平面 α, β が存在して,

1) α と β は光錐に接する.

2) α は凸錐 K と正の光錐と分離する.

1) β は凸錐 K と負の光錐と分離する

ようにできる. いま α と β の方程式をそれぞれ

$$\sum_{\mu=1}^4 \alpha_\mu x^\mu = 0 \quad \sum_{\mu=1}^4 \beta_\mu x^\mu = 0$$

とする. $\Rightarrow$ とすると,

$$\left\{ \begin{aligned} (\alpha, \alpha) &= 0, & (\beta, \beta) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} (\alpha, l) > 0 \quad \forall l \in V_+, & (\alpha, k) < 0, \quad \forall k \in K \\ (\beta, l') > 0 \quad \forall l' \in V_+, & (\beta, k) < 0, \quad \forall k \in K \\ (\alpha, \beta) < 0 \end{cases}$$

と (2) より、いま同様に β と

$$\alpha = (1, 1, 0, 0), \quad \beta = (-1, 1, 0, 0)$$

と (2) より、 α と β の任意の $k \in K$ に対して、

$$k^0 - k^1 < 0 \quad \text{かつ} \quad -k^0 - k^1 < 0,$$

$$\text{つまり} \quad |k^0| < k^1$$

が成立する。故に、1° の注意により $g \in G^0$ が存在して
— せいに $g z_1, \dots, g z_n \in T_1$ となる。つまり

$$g(z_1, \dots, z_n) \in T_n, \quad (z_1, \dots, z_n) \in T_n'.$$

(証明おわり)

定理 6 の証明

$F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ がロ-ルニツ無限小変換群で不変ならば、
佐藤の基本定理 (定理 3) により、

$$SS F \subset \left\{ (x, \eta) \in \mathbb{R}^{4n} \times \tilde{S}^{4n-1}; \sum_{\forall L \in \mathcal{G}} t x_j L \eta_j = 0 \right\}$$

と成る。== (2) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n}$ と $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \tilde{S}^{4n-1} \subset \tilde{\mathbb{R}}^{4n}$ の成分は列ベクトルと (2) 表
わされている。 $x \in \text{Test}$ であると定理 5 の証明により、
 $\forall j$ に対して $|x_j^0| < x_j^1$ ----- (*)

が成り立つことより、今 $L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ により

$\sum_{j=1}^n x_j L \eta_j$ は計算ある。まず $\eta \in (V_+^n)^+$ とすると、

$\eta_j^0 \geq |\eta_j^1|$, $\forall j$, かつ $\exists j_0$ に対し $\eta_{j_0}^0 > 0$ (#)
が成り立っている。(*)と(#)を用いると次の評価が得られる。

$$\begin{aligned} \sum x_j L \eta_j &= \sum (x_j^0 \eta_j^1 + x_j^1 \eta_j^0) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (x_j^0 \eta_j^1 + |x_j^0| \eta_j^0) \\ &\geq \sum (x_j^0 \eta_j^1 + |x_j^0| |\eta_j^1|) \geq 0. \end{aligned}$$

次に $\eta \in (-V_+^n)^+$ とすると

$\eta_j^0 \leq -|\eta_j^1|$, $\forall j$, かつ $\exists j_0$ に対し, $\eta_{j_0}^0 < 0$ (a)
が成り立っている。(*)と(a)を用いる

$$\begin{aligned} \sum x_j L \eta_j &= \sum (x_j^0 \eta_j^1 + x_j^1 \eta_j^0) \\ &\leq \sum (x_j^0 \eta_j^1 + |x_j^0| \eta_j^0) \\ &\leq \sum (x_j^0 \eta_j^1 - |x_j^0| |\eta_j^1|) \leq 0. \end{aligned}$$

故に ローレンツ無限小変換で不変な $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{4n})$ の特異

台 $\text{SS} F$ は、正と負の“光錐” $(V_+^n)^+$, $(V_+^n)^+$ と交らない。

一方仮定より F の特異台 $\text{SS} F$ は $\mathbb{R}^n \times (V_+^n)^+$ と

$\mathbb{R}^n \times (-V_+^n)^+$ に含まれている。よって、 $\mathcal{J}$ 対象の上には F の

特異台は存在しない。よって定理1により F は J_{∞} 上で
解析的である。 (証明おわり)

文献

- [1] 柏原正樹 超函数の構造について 数学のあゆみ 15-1
(1970) pp. 9-71.
- [2] Jost, R. The General Theory of Quantized
Fields, AMS, Providence, Rhode Island (1965)
- [3] MORIMOTO, M. Sur la décomposition du
faisceau des germes de singularités d'hyper-
fonctions, J. Fac. Sci, Univ. Tokyo (吉田記念号)
(近刊)
- [4] 佐藤幹夫-河合隆裕 超函数の構造について. 堅田三三
ホジウ報告集「Hyperfunctions - その応用と代数的幾
何の Symposium」(1970) pp. 4.1-4.30.
- [5] Streater, R.F - Wightman, A.S. PCT,
Spin, Statistics and all that, Benjamin,
New York (1964)

おわびと訂正

河合隆裕 - 柏原正樹

このシンポジウムの際、ス人とも、「佐藤による
 δ 関数の曲面波展開」(当報告 Part III p.35.)
 に関して、“結果は正しいけれど佐藤
 先生の証明はいささか疑わしい”と
 一度ならず申しよしたか、まことに取っ払い
 ことに、佐藤先生の証明は全く正しく、
 この発言は両人の計算洞察^(*)の不足を
 示す以外の何物でもありませんでした。
 讀しんでおわびと訂正をさせて頂くとと
 もに佐藤先生には改めて“やっぱり違うな”
 という賛嘆の言葉を呈しておわびにかえさ
 せて頂きたいと存じます。

(*)ある所で 漸次式に関する Euler の等式が使われていること
 を見抜けなかった。