

Topological Analogue in Graph Theory

東京工業大学 理学部 根上生也 (Seiya NEGAMI)

タイトルを日本語で平たく言うと、「グラフ理論におけるトポロジーのまね」ということになります。しかし「まね」と言ったのではなんなので英語でタイトルを付けました。どういう話かという、タイトルが示す通りにトポロジーの知識を使うとこんなグラフ理論の話ができますといったものです。理論的な意味でトポロジーをグラフ理論に応用するというよりも、多分に心理的で、あくまでその動機付をトポロジーから見いだして作った結果というのが正確なところではあります。初めにそういうトピックスを3つ私自身の結果として紹介して、最後に逆にグラフ理論的手法でPLトポロジーを研究するというイタリアの数学者たちの仕事を紹介します。

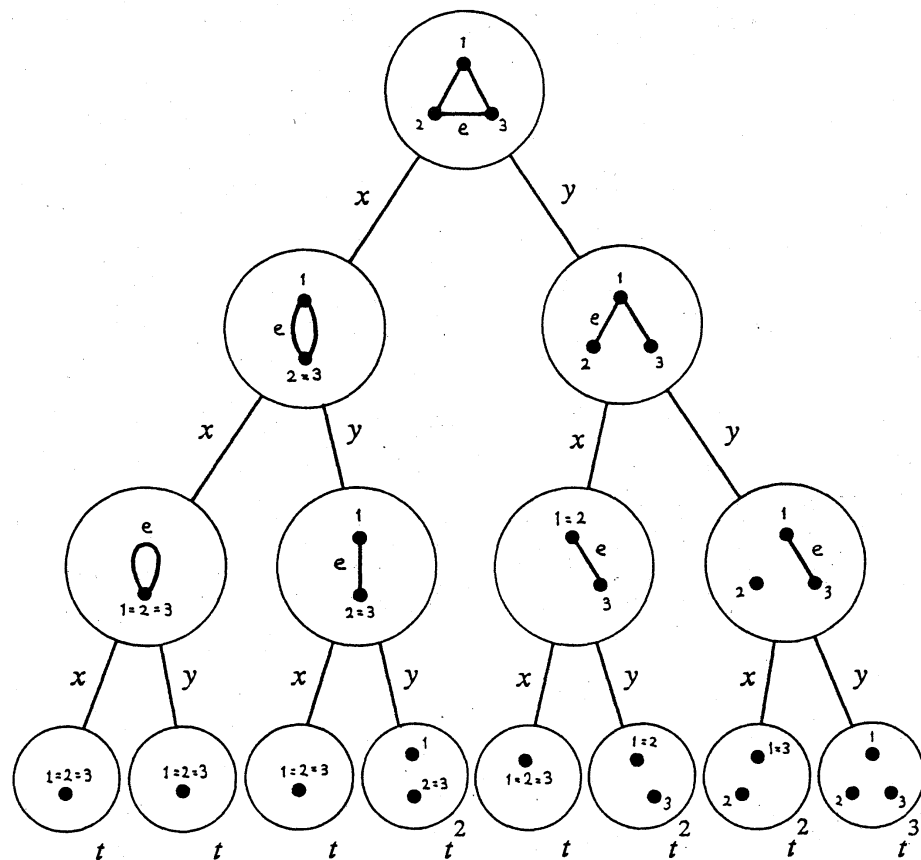
●グラフの多項式●

最初は昨今トポロジー界を賑わしている結び目・絡み目の不変量である Jones 多項式や Hoste 多項式のまねをして、グラフ G に3変数多項式 $f(G)$ を定義します。結び目・絡み目では交差の入れ換えとスミージングの基本操作で射影を変形しながら多項式を計算します。グラフの場合はその基本変形にあたる2つの操作は辺の除去 (deletion) と縮約 (contraction) です。辺の除去は言うまでもありませんが、縮約は辺を除去した後でその辺の両端点を同一視する操作だと思って下さい。辺がループでないときは幾何学的に辺を縮めていって最後に端点がつくというのと同じですが、ループのときは縮約は除去と同じことになります。

グラフ G から辺 e の除去、縮約によって得られたグラフをそれぞれ $G - e$, G / e と書いて、 $f(G) = f(G; t, x, y)$ を次の2式で定義します。

$$(i) \quad f(\underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot}_n) = t^n.$$

$$(ii) \quad f(G) = x f(G/e) + y f(G - e) \quad (e \in E(G)).$$



$$f(G) = tx^3 + 3tx^2y + 3txy^2 + t^3y^3$$

図 1. グラフの展開

この定義では一見 $f(G)$ は(ii)の辺 e の取り方に依存してしまいそうですが、実際は well-defined で、図 1 のようなグラフの展開(resolution)を考察すると $f(G)$ は次のような展開を持つことが示されます。

$$f(G) = \sum_{Y \subseteq E(G)} t^{\omega(G-Y)} x^{|E(G)-Y|} y^{|Y|}$$

ここで、 $\omega(G)$ は G の連結成分数です。これを頼りによく考えると $f(G)$ からグラフ G に関するいろいろな情報を得ることができます。それを列挙すると以下の通り。曖昧な表現もありますが、詳細は [N1],[N2],[N5] を参照して下さい。

- ① 頂点数がわかる.
- ② 辺数がわかる.
- ③ 連結成分数がわかる.
- ④ 連結成分数・辺数を指定した部分グラフの個数がわかる.
- ⑤ カットセットのことがわかる.
- ⑥ 辺連結度がわかる.
- ⑦ tree, forest の個数がわかる.
- ⑧ 完全グラフ K_n の個数がわかる.
- ⑨ 一筆書き可能かどうかかわかる.
- ⑩ 単純グラフかどうかかわかる.
- ⑪ 頂点の彩色の総数がわかる.
- ⑫ 至るところゼロでない flow の総数がわかる.

こんなに多くのことがわかるのなら、さぞかし強力な不変量なのだろうと思われるでしょう。実際、今までに組合せ論の中で知られていた再帰的な構造を持つほとんどのグラフの多項式はこの $f(G)$ から導くことができます。例えば、染色多項式, flow 多項式, dichromatic 多項式, Tutte 多項式等。しかし、同型でないグラフが同じ多項式を持つ例はいくらでもあります。その事情を解析するために、また新たな多項式 $f^*(G) = f^*(G; t, x, y)$ を定義します。

$$(i) \quad f^*(\underbrace{\cdot \cdot \dots \cdot}_n) = t^n.$$

$$(ii) \quad \text{ループでも切断辺でもない辺 } e \text{ に対して,}$$

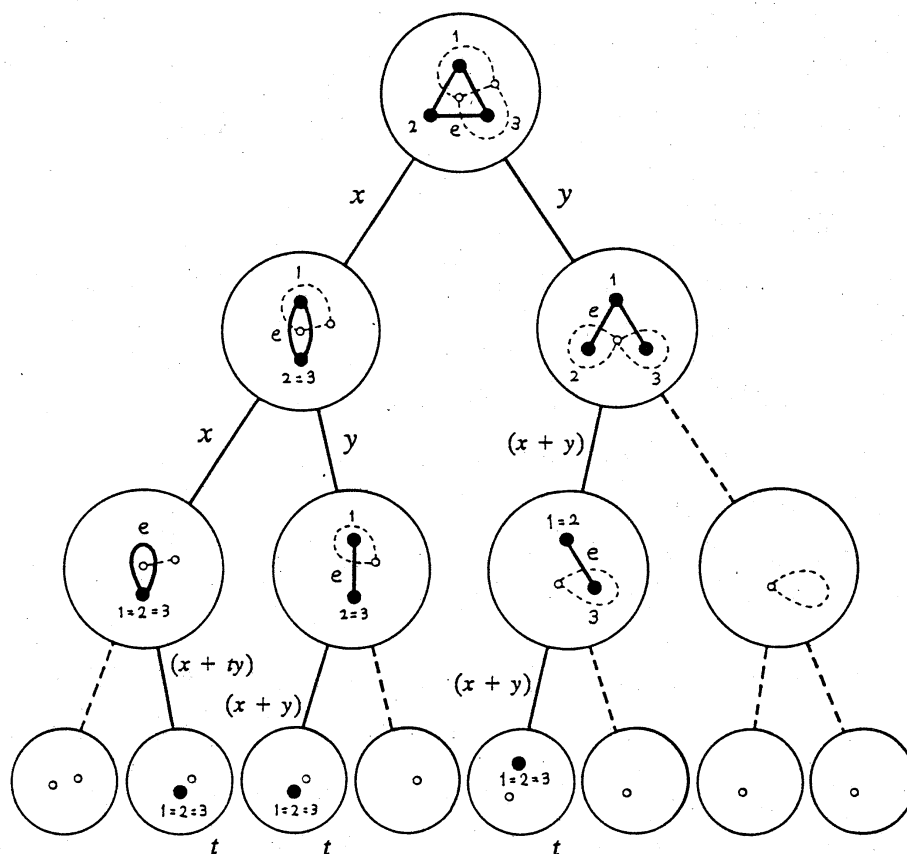
$$f^*(G) = y f^*(G/e) + x f^*(G-e).$$

$$(iii) \quad \text{ループ } e \text{ に対して,}$$

$$f^*(G) = (x + ty) f^*(G-e).$$

$$(iv) \quad \text{切断辺 } e \text{ に対して,}$$

$$f^*(G) = (x + y) f^*(G/e).$$



$$\begin{aligned}
 f^*(G) &= ty^2(x + ty) + txy(x + y) + tx(x + y)^2 \\
 &= tx^3 + 3tx^2y + 3txy^2 + t^2y^3
 \end{aligned}$$

図 2. グラフの双対展開

上の(i),(ii)だけで $f^*(G)$ を定義すれば、それは単に $f(G)$ において x と y を入れ換えたものになるだけです。(iii),(iv)は一見奇異ですが、次の定理を成立させるために必要です。その双対性からこの $f^*(G)$ をグラフ G の双対多項式 (dual polynomial)と呼びます。

定理 1. 平面的グラフ G とその任意の双対グラフ G^* に対して

$$f^*(G) = f(G^*)$$

が成立する。

この関係は、グラフの展開と同様に $f^*(G)$ を計算するための図2のようなグラフの(双対)展開に伴って双対グラフがどう変形されるかを考察すれば示せます。更に、 $f^*(G)$ が次のような展開を持つこともわかるでしょう。

$$f^*(G) = t^{\omega(G)} \sum_{X \subseteq E(G)} t^{\beta(G-X)} x^{|X|} y^{|E(G)-X|}$$

この展開式と $f(G)$ の展開式を比較すれば、 $f(G)$ と $f^*(G)$ の間には次の関係があることがわかります。

$$t^{\omega(G)-|V(G)|} \cdot f(G; t, ty, x) = f^*(G; t, x, y).$$

さて、ここで定理1の意味を考えてみましょう。一般には平面的グラフ G の双対グラフ G^* は一意的には決まりません。それは G の球面への埋蔵の仕方に依存して決まります。言いかえると、 G を違ったやり方で球面に埋蔵すると違った双対グラフが作れるのですが、定理1によりグラフは違えども多項式 $f(G^*)$ は同じということになります。したがって、1つのグラフの双対グラフを生成するような変形のもとでは多項式は変わらないことになります。そのような変形は図3、4に示されている2つのタイプしかないことがわかっています。

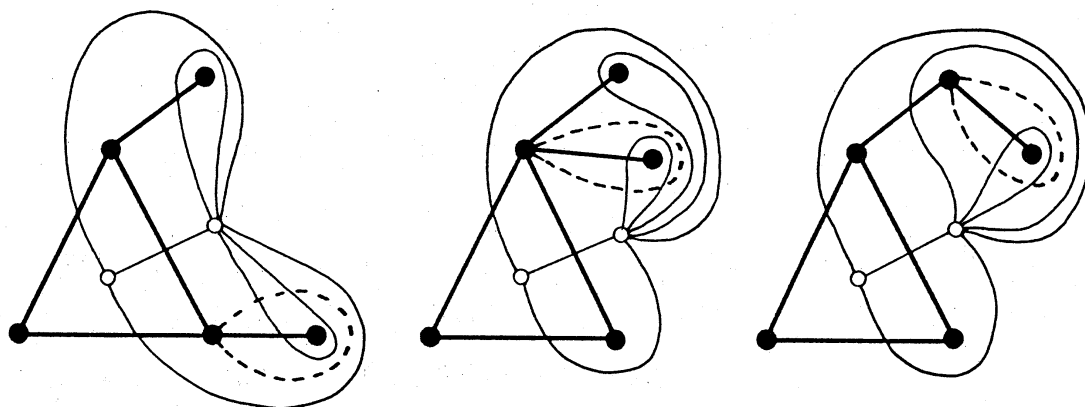


図3. ブロックの調整

ブロックの調整(arrangement of blocks)はグラフを切断頂点で2つに切り放し再び異なった頂点でくっつける操作です。図3では破線で囲まれている部分の位置が移動していますが、どのグラフも1つのグラフ(細い線で描かれている方)の双対になっています。

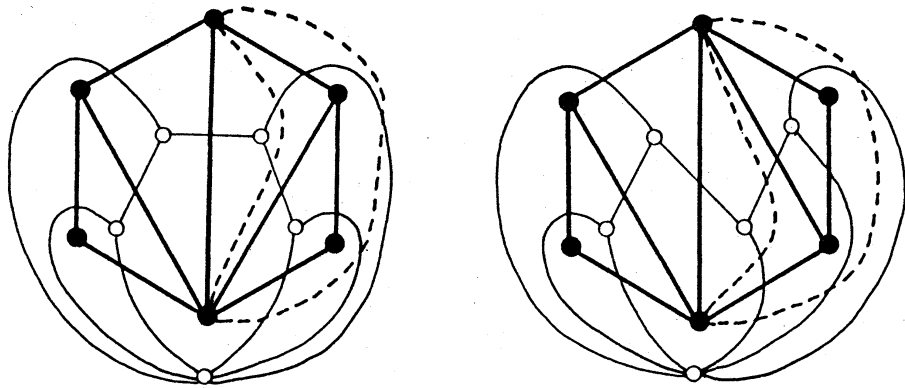


図4. 2頂点間での反転

2頂点間での反転(turning around two vertices)ではグラフを2つの頂点で切断して一方を反転して付け直します。ただし、付ける場所はもとの2つの頂点からずれてはいけません。

これらの操作を繰り返して一方から他方に移れるとき、2つのグラフは2-同型(2-isomorphic)であると言います。つまり、1つのグラフの双対になっているグラフは互いに2-同型になり、同じ多項式を持ちます。平面的グラフに議論を限らなくても、多項式に関しては同様です。

定理2. 2つのグラフ G と G' が2-同型ならば、 $f(G) = f(G')$ となる。

一般には3頂点以上のところでグラフを分解して付け変えると $f(G)$ は変化してしまいます。そこで、当初は定理2の逆「 $f(G) = f(G')$ ならば G と G' は2-同型」を予想していたのですが、最近その予想の反例が見つかってしまいました。(残念…) 仮に予想が正しいとすると、3-連結グラフに関しては $f(G)$ が同型性判定の完全な不変量になってしまうので、確かに虫が良すぎたのですが…。

● 球面的種数と virtual planar graphs ●

今度は3次元多様体に幾何学的構造を入れる話の類似品です。グラフ自身は自然に距離空間になりますが、本来の意味で幾何学的構造を入れるべき対象ではありません。しかし、グラフの中には曲面が潜在的に付随していると考えた方がよいものがたくさんあります。(そういう議論は[N6]で十分になされています。)そこで、その曲面を経由して幾何学的構造を考えることにします。特に、ここでは球面的構造だけ扱います。

連結グラフ G と $\tilde{G}$ が次の条件(i),(ii)を満たすとき、 $\tilde{G}$ は $p : \tilde{G} \rightarrow G$ を持つ G の被覆(covering)であると言います。

(i) $p : V(\tilde{G}) \rightarrow V(G)$ は全射である。

(ii) 各頂点 $v \in V(G)$ とその逆像 $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$ に対して、

$$p|_{N(\tilde{v})} : N(\tilde{v}) \rightarrow N(v)$$

は全単射である。ここで、 $N(v)$ は v に隣接する頂点全体の集合である。

これで定義されるものはトポロジーでいうところの被覆空間と同じものです。それをグラフに制限して組合せ的に定義するとこうなります。被覆される方のグラフはいつも有限なものしか扱いませんが、被覆する方は無限グラフでもよいことにします。特に、 $p^{-1}(v)$ がちょうど n 個の頂点から成っているときには、 G は n 重被覆(n -fold covering)だと言います。

更に、 G の自己同型群 $\text{Aut}(G)$ の部分群 A に対して、

$$(iii) \quad p(x) = p(y) \ (x, y \in V(\tilde{G})) \Leftrightarrow \exists \tau \in A, \tau(x) = y$$

となっているとき、 G を変換群 A を持つ正則被覆(regular covering)と呼びます。簡単に言うと、正則被覆とはある群 A に関して対称的な被覆のことです。頂点の次数が一定のグラフを正則グラフと言いますが、正則なグラフによる被覆ではありません。誤解のないように。

ここで、グラフが球面ぽいかどうかを評価する不変量を2つ定義します。まず、

グラフ G の球面的種数(spherical genus) $\text{sph}(G)$ を G の正則な n 重被覆で平面的はものが存在する最小の n と定義します. また, $\text{sph}'(G)$ を平面的 n 重被覆が正則であることを要請せずに考えた n の最小値とします. 任意の木(tree)でない連結グラフの普遍被覆(universal covering)は無限の木なので平面的です. つまり, どんな連結グラフに対しても平面的な(正則)被覆が存在するので, n が無限大 ∞ になることも許せば $\text{sph}(G)$ と $\text{sph}'(G)$ はどちらも確定した値を持つことになります.

$$\text{sph}'(G) \leq \text{sph}(G) \leq \infty.$$

特に, $\text{sph}(G)$ ($\text{sph}'(G)$) が有限のとき, G は (weakly) virtually planar であると言います. この命名は勿論 virtual Haken 多様体のまねです.

定理3. 連結グラフ G が virtually planar であるための必要十分条件は, G が平面的であるか射影平面的であることである.

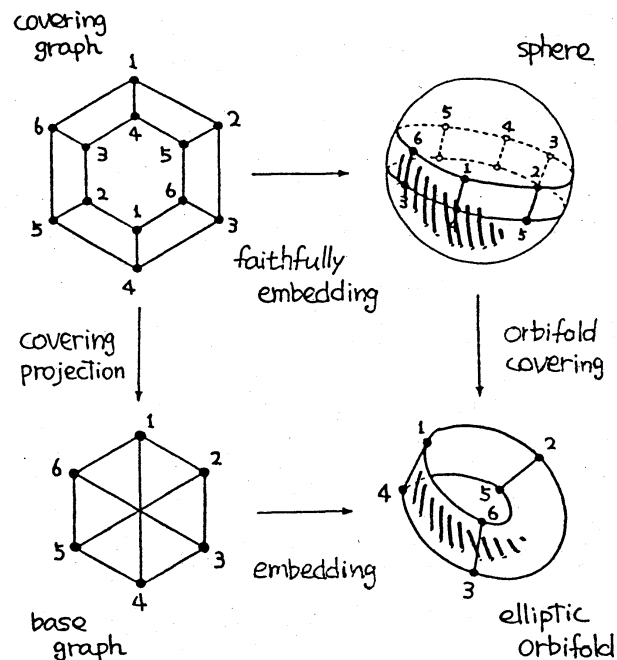


図5. グラフの被覆と orbifold の被覆

この定理を示すために図5のような図式を考えます。左側の被覆の存在が今仮定されています。上のグラフが G の有限平面的正則被覆 $\widetilde{G}$ です。 $\widetilde{G}$ は球面に埋蔵可能ですが、更に適当な条件のもとでは、被覆変換群 A に関して対称的に埋蔵でき、 A は球面の上の変換群に拡張します。そこで、球面をその変換群で割って得られる orbifold を考えると $\widetilde{G}$ を A で割ったグラフ、即ち、 G はそこに自然に埋蔵されます。その orbifold は elliptic なので、それは多様体としては球面または射影平面になっています。したがって、 G は平面的または射影平面的です。

この議論はあくまで基本的なアイディアで、グラフ理論的に詰めなければならぬところは随所にあります。詳しくは[N4]を御覧下さい。

さて、定理3の意味を考えてみましょう。図5の関係から、 G が射影平面的ならば、 G が埋蔵されている射影平面ごと2重被覆を取ると球面に埋蔵された G の平面的2重被覆が得られます。つまり、射影平面的グラフの球面的種数は2になります。また、平面的グラフの球面的種数は明らかに1です。したがって、定理3は球面的種数が有限ならばその値は1または2だと主張しています。

定理4. 任意の連結グラフ G に対して、 $\text{sph}(G) = 1, 2$ または ∞ である。

現在のところ、 $\text{sph}'(G)$ についてはよくわかっていません。しかし、手応えとしては $\text{sph}(G) = \text{sph}'(G)$ ではないかと思われれます。例えば、完全グラフ K_n に関しては次のような結果が容易に示されます。

定理5.

$$\text{sph}(K_n) = \text{sph}'(K_n) = \begin{cases} 1 & (n = 1, 2, 3, 4) \\ 2 & (n = 5, 6) \\ \infty & (n \geq 7) \end{cases}$$

(証明) $n = 1, 2, 3, 4$ のときは K_n は平面的なので1, $n = 5, 6$ のときは射影平面的なので sph, sph' の両者とも2になります。実際、 K_6 は図6のように正二十面体のフレームによって2重に被覆されます。 $n \geq 7$ のときは K_n の次数は6以上。一方、有限の平面的グラフには次数5以下の頂点が必ず存在するので、

K_n の有限平面的被覆は存在できません。■

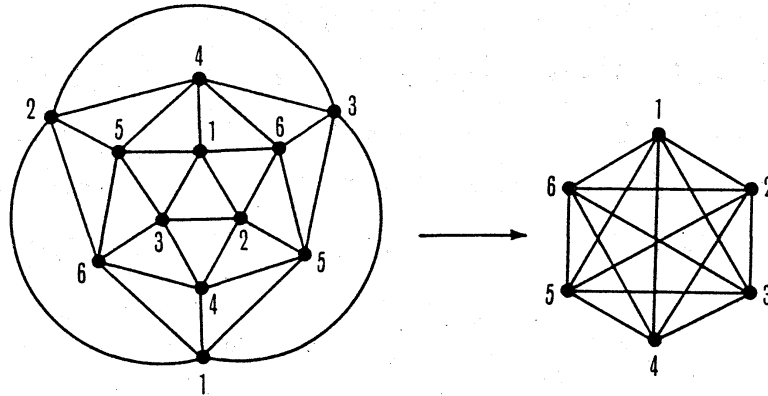


図6. 正二十面体グラフと K_6

● virtual k -factorability ●

今度はあえて言うと群の end の個数の類似品です。群の end の個数というのはその群を基本群に持つ多面体の普遍被覆空間の end (コンパクトな部分集合を除去したときのコンパクトでない連結成分) の個数の下限です。Epstein[E]により, 有限群の end の個数は0で, 無限群の end の個数は $1, 2, \infty$ のどれかになることが示されています。有限群の場合を無視すると $1, 2, \infty$ となって球面的種数と同じです。そこで, 他にも $1, 2, \infty$ しか値を取らないようなグラフの不変量はないものだろうかと思いを巡らせた末, 発見したのがここで紹介する virtual k -factorability です。

球面的種数と同様に, 連結グラフ G の virtual k -factorability $\text{E}_k(G)$ を G の n 重被覆で k -因子を持つものが存在する最小の n と定義します。 k -因子 (k -factor) とは G の生成部分グラフ (頂点をすべて含むグラフ) で k -正則になっているものです。特に, 1 -因子は頂点が2つずつ辺で組にされているので, 完全マッチングと思って差し支えありません。

例えば, 長さが奇数のサイクル C_{2n+1} は頂点の数が合わないのでどう頑張っても 1 -因子は持ちません。しかし, それを長さが2倍のサイクルで被覆してやる

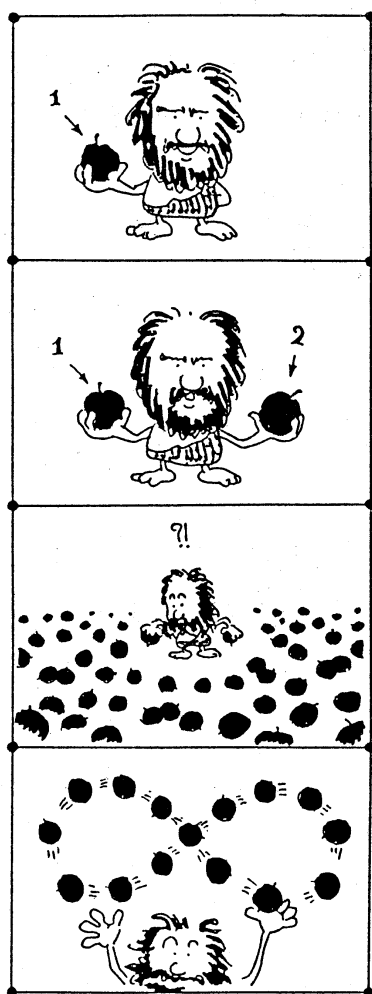
と、頂点数が偶数になるので辺を1つおきにとっていけば1-因子が作れます。したがって、 $\exists_1(C_{2n+1}) = 2$ になります。一方、長さが偶数のサイクル C_{2n} に対しては $\exists_1(C_{2n}) = 1$ です。また、頂点が奇数の木はどんなk-因子も持たないし、自分自身以外には被覆が存在しません。こういう場合には $\exists_k(G) = \infty$ と定めまします。これはk-因子を持つ無限被覆が存在して $\exists_k(G) = \infty$ となっている場合とは異なりますが、その違いは問わないことにします。すると：

定理6. 任意の連結グラフ G に対して、 $\exists_k(G) = 1, 2$ または ∞ ($k \geq 1$) となる。

この定理を示すにはk-因子を持つ有限被覆をうまく2重被覆に変形する必要があります。そこで、 $\pi_1(G)$ の部分群 N で長さ(辺の本数)が偶数の道で表される元からなるものを考えます。その指数は明らかに 1 か 2 なので、 N に対応した G の被覆 $b: B(G) \rightarrow G$ ($b(\pi_1(B(G))) = N$) は高々2重になります。また、次の(i),(ii)も容易にわかるでしょう。

- (i) $B(G)$ は長さが奇数のサイクルを含まない。したがって、二組グラフである。
- (ii) 任意の二組グラフによる被覆 $p: B \rightarrow G$ は必ず $B(G)$ を経由して G を被覆する。即ち、被覆 $q: B \rightarrow B(G)$ が存在して $p = bq$ となる。

もし G の有限被覆 $\tilde{G}$ がk-因子を持つならば、その持ち上げとして $B(\tilde{G})$ もk-因子を持ちます。すると、(ii)の性質から被覆 $q: B(\tilde{G}) \rightarrow B(G)$ があります。ここで、グラフ理論の知識([T]のVII.8節参照)を使うと二組グラフがk-因子を持つかどうかは次数に関する情報だけで判定できます。被覆に関しては次数の状況は保存されるので(曖昧ですが)、 $B(\tilde{G})$ がk-因子を持つことと $B(G)$ が持つこと同値になります。したがって、高々2重の被覆 $B(G)$ がk-因子を持つことになり、 $\exists_k(G)$ が有限ならばその値が1か2になります。詳細は[N3]に書かれています。



さて、これらの3つの不変量がともに $1, 2, \infty$ の3つの値しか取らないという共通点はいったい何に原因しているのでしょうか。確かにどれも被覆空間の概念を通して定義されていますが、それ以外にはこれらをつなぐ何かがあるとは思えません。

ところで、この $1, 2, \infty$ にはどういう意味があるのでしょうか。私にはこの3つの値が数学における諸々の問題の困難さを表す基本的は数のように思えます。 1 とは存在を意味します。また、 2 は人間の手で扱える有限の範囲を象徴しています。両方の手が塞がってしまい、無数に転がっているリングを前にして、彼はいったい何ができるのでしょうか。その人智を越えた問題の困難さに対して形式的な無限大 ∞ という記号を割り振ったのです。

●多様体の crystallization ●

最後にグラフ理論的手法を使った crystallization と呼ばれる PL 多様体の表現法を紹介します。特に、ここでは閉多様体のみ扱います。簡単にいうとそれは PL 多様体の単体の結合関係をグラフで表したようなものです。ものとしては、単体分割の双対分割の1-骨格ですが、それだけ抜き出したのでは多様体を一意的に再構成するのが困難なので、そのグラフの辺の色分けを考えます。詳しいことは [FGG] の survey に書かれていますが、記号の使い方が異様なので以下ではそれとは若干違う表現を取っています。

グラフ G の辺の n -彩色 (n -coloring) とは共通の端点を持った辺には異なった色を使うようにして各辺を n 色で塗り分けることです。抽象的には n -彩色は G

の辺集合 $E(G)$ の n 個の部分 $E_0, \dots, E_{n-1}$ への分割で各 E_i の中の辺どうしは互いに隣接していないものです。

n 次元 PL 多様体 M^n の crystallization とは辺の $(n+1)$ -彩色 $(E_0, \dots, E_n)$ を持った $(n+1)$ -正則グラフ G で次の (i), (ii) を満たすものです。

- (i) 各 E_i に対して、 $G-E_i$ は連結である。
- (ii) G から次の手順によって M^n を表す複体 $K(G)$ が構成される。
まず、 G の頂点に対応して n -単体を用意しその $n+1$ 個の 0 -辺単体を $0, 1, \dots, n$ ので色分けする。次に G の 2 つの頂点が色 i で塗られた辺で結ばれているとき、それらに対応した 2 つの n -単体の色 i で塗られている 0 -辺単体を含まない $(n-1)$ -辺単体どうしを同じ色の 0 -辺単体に対応するように貼り合わせる。

(ii) によって得られた複体 $K(G)$ には n -単体はたくさんあるのに 0 -単体はちょうど $n+1$ 個しかないので、本当の単体分割とは異なります。そこで、このような複体を 縮約単体分割 (contracted triangulation) と呼びます。PL 多様体の普通の単体分割から適当に単体を潰して 0 -単体の個数を $n+1$ まで減らしていけるので、任意の PL 多様体は縮約単体分割を持ち、その双対複体から crystallization を得ます。

例えば、図 7 はレンズ空間 $L(3, 1)$ の crystallization です。たいていの場合 crystallization を見ただけではその多様体は何なのかわからないものですが、この例は $2, 3$ の辺のずれとねじれ具合から何となくレンズ空間のような気がします。まず、内と外の $0, 1$ の六角形はそれぞれ 1 -辺単体 23 を軸にして 6 個の 3 -単体がくっつき合って、六角形の suspension のような形の 3 次元球になっていることを表しています。その 2 つの 3 次元球が 2 の辺の指示によって上半面どうしが貼り付きレンズ状の 3 次元球になり、 3 の辺の指示によって下半面が $1/3$ ($= 2/6$) だけずれて貼り付きます。これはよく知られているレンズ空間の構成法と同じです。

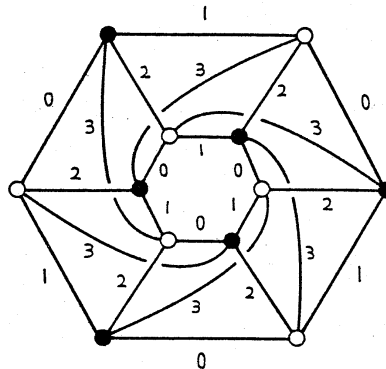


図7. レンズ空間 $L(3,1)$ の crystallization

このようにいちいち多様体を構成しないとよくわからないのでは仕方ありませんが，crystallization をグラフとして扱っても多様体に関して引き出せる情報は多々あります．例えば，次の定理がそれです．

定理7. (Cavicchioli - Grasselli - Pezzana [CGP]) G を PL 多様体 M^n の crystallization とするとき， M^n が向き付け可能であるための必要十分条件は G が二組グラフになることである．

これは次のように解釈すれば意味がわかるでしょう．縮約単体分割 $K(G)$ の各 n -単体の頂点は $0, 1, \dots, n$ で色分けされていますが，そのラベリングが1つの向きを定めていると考えます．すると，この n -単体の隣接している n -単体は $K(G)$ を構成するときの貼り合わせ方から反対の向きを持つことになります．しかし，これはローカルな話でグローバルに反対かどうかを議論できる保証はありません．それができるのは，勿論， M^n が向き付け可能のときです．そして，そのときは同じ向きを持つ単体どうし，したがって，それに対応した G の頂点どうしは隣接しません．つまり， G は二組グラフになります．図7の例では頂点が○●の二組に別れているので，レンズ空間 $L(3,1)$ は（実際そうですが）向き付け可能になります．

次に crystallization の正則種数(regular genus)を定義します．そのために位相幾何学的グラフ理論の標準的な対象であるグラフの曲面への埋蔵を考えます．

crystallization G の閉曲面への埋蔵に対して色の巡回置換 $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ が存在して G の各領域が色 $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$ の辺が交互に並ぶ閉路で囲まれているときその埋蔵は正則(regular)であると言いい、 G の正則な埋蔵が存在する閉曲面の種数の最小値を G の正則種数と定義します。例えば、図7の例で3の辺が少し下を通っていると思うとその crystallization はトーラスの上に乗ります。そのとき、各頂点のまわりに並ぶ辺の色は(0312)となっています。この巡回置換に対して上の条件が満たされるので、その埋蔵は正則で、正則種数は1です。

PL多様体 M^n の正則種数は M^n が持つ crystallization の正則種数の最小値として定義されます。2次元ときは閉曲面の種数と、3次元のとき M^n は向き付け可能なら Heegaard 種数と、不可能ならその2倍と正則種数は一致します。特に、種数0の閉曲面および3次元多様体が球面であるように、一般に次の定理が証明されています。

定理8. (Ferri - Gagliard [FG]) PL多様体 M^n が n 次元球面と PL 同相になるための必要十分条件は M^n の正則種数が0になることである。

この他にも多くの結果が得られているが、グラフ理論的な立場から興味を持てるのはこのくらいです。

《参考文献》

- [CGP] A. Cavicchioli, L. Grasselli and M. Pezzana, Su di una decomposizione normale per le n -varietà chiuse, Boll. Un. Mat. Ital. 17-B (1980), 1146-1165.
- [E] D. Epstein, Ends, Topology of 3-manifolds and related topics, ed. M.K. Fort (Prentice-Hall, 1962), 110-117.

- [FG] M. Ferri and C. Gagliardi, The only genus zero n -manifold is S^n , to appear.
- [FGG] M. Ferri, C. Gagliardi and L. Grasseli, A graph-theoretical representation of PL-manifolds - a survey on crystallization, to appear.
- [N1] 根上生也, グラフのある多項式不変量, "コンピューターを利用した低次元トポロジー", 数理解析研講究録 561.
- [N2] 根上生也, グラフのある多項式不変量(II), "グラフ理論とその応用", 数理解析研講究録 566.
- [N3] S. Negami, The virtual k -factorability of graphs, Research Reports on Information Sciences No.A-99, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oct 1985.
- [N4] S. Negami, The spherical genus and virtually planar graphs, Research Reports on Information Sciences No.A-100, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oct 1985.
- [N5] S. Negami, Polynomial invariants of graphs, Research Reports on Information Sciences No.A-101, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oct 1985.
- [N6] S. Negami, Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces, Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1986.
- [T] W.T. Tutte, Graph Theory, Encyclopedia of Mathematics, Vol.21, (Addison-Wesley Publishing Company, 1984).