

Douglas algebraに關連した最近の話題

神奈川県大工 泉池 敬司 (Keiji Iezuchi)

H^∞ に関する分解定理はよく知られているが、ここでは $H^\infty + C$ 及び一般の Douglas 環の中での分解定理の周辺の話題を述べたい。

§1. 準備.

D を単位円円板, ∂D をその境界とする。 H^∞ を D 上の有界正則関数のなる環とする。境界関数を考えることによつて, H^∞ は L^∞ の sup-norm 閉部分環となる。 L^∞ は $d\theta/2\pi$ に関する有界 Borel 関数全体である。 H^∞ と L^∞ の中間にある環を Douglas 環としよう。 C を ∂D 上の連続関数全体とする時, $H^\infty + C$ は H^∞ を除いて最小の Douglas 環である (D. Sarason)。以下断りなしに B と書いたら $H^\infty + C$ より大きい Douglas 環とする。 Douglas 環における最も重要な定理は,

Chang-Marshall 定理 [3, 14]. B は H^∞ といくつかの

interpolating Blaschke 積の複素共役で生成される。

$M(B)$ が B を maximal ideal space を表わす。 $M(H^\infty + C) = M(H^\infty) \setminus D$ である。 B は C の Gelfand 変換と同一視する。

$f \in B$ に對して

$$Z_B(f) = \{x \in M(H^\infty + C); f(x) = 0\}$$

とする。特に $B = H^\infty + C$ の時は $Z(f) = Z_{H^\infty + C}(f)$ と省略して置くことにする。 $M(H^\infty)$ の中の 2 点 x, y に對して

$$S(x, y) = \sup \{|f(y)|; f \in H^\infty, \|f\| \leq 1, f(x) = 0\}$$

とおく。

$$P(x) = \{y \in M(H^\infty); S(x, y) < 1\}$$

は x を含む Gleason part と呼ばれる。 H^∞ は logmodular 環であるから、 $P(x) \neq \{x\}$ ならば D から $P(x)$ 上への 1 対 1 連続写像 α で $\alpha(0) = x$, $f \circ \alpha_x$ が各 $f \in H^\infty$ に對して正則となる α が存在する。この時 $f \circ \alpha_x(z)$ の $z=0$ での zero 点の order をそのまま f の x での zero 点の order と考え

$\text{Ord}_f(x)$ で表わす。 $\{z_n\} \subset D$ が $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$ を満たす時、

$$b(z) = \prod \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}$$

を Blaschke 積という。特に $H^\infty|_{\{z_n\}} = \mathbb{C}^\infty$ となる時、interpolating という名前を付ける。

Hoffman 定理 [10]. $x \in M(H^\infty + C)$ に對して $P(x) \neq \{x\}$ なら

ある条件は $b(x) = 0$ とする interpolating Blaschke 積 b が存在することである。

b が $\{z_n\}$ を zero 点列とする interp. Blaschke 積とある時、次の事は知られている。

(1) $\{z_n\}$ の $M(H^\infty)$ での closure は βN と homeo. である。

(2) $\text{Ord}_b(x) = 1$ ($x \in Z(b)$).

二次の H^∞ の分解定理は、 D の中の zero 点列に関して見ると大域的に分解出来ることを示している。

H^∞ の分解定理. $H^\infty = BS O$, B は Blaschke 積, S は singular inner 関数, O は outer 関数である。

次は K. Hoffman [10] によ, 与えられた, $M(H^\infty)$ の各点 x への分解定理である。

Hoffman 定理 2. $f \in H^\infty$, $x \in M(H^\infty)$ で $\text{Ord}_f(x) = k$ とする。 $k < \infty$ ならば $f = f_1 f_2 \cdots f_k$, $f_i \in H^\infty$, $\text{Ord}_{f_i}(x) = 1$ と分解出来る。 $k = \infty$ ならば任意の n に對して $f = f_1 f_2 \cdots f_n$, $f_i \in H^\infty$, $f_i(x) = 0$ と分解出来る。

§2. Wolff の分解定理.

事の始まりは次の Sarason 定理 [15] である。 $QC = (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}$, $QA = H^\infty \cap QC$ とする。

Sarason 定理 1. $w \in QC$ 是 invertible to unimodular

関数, $|w|=1$ a.e. $d\theta/2\pi$, ならば $w = z^m \exp[i(u+\tilde{v})]$ である, $u, v \in C$ であり, $\tilde{v}$ は v の共役調和である。

Sarason は同時に次の問題を提出した。 w が $H^\infty C$ の unimodular 関数ならば, $w = uv$, u は inner 関数, v は QC で invertible か? これを解いたのが T. Wolff [17] である。

一方 S. Axler [1] は次の分解定理を与えた。

Axler 定理. $f \in L^\infty$ に對して, $bf \in H^\infty + C$ とする Blaschke 積 b が存在する ($L^\infty / \{\text{Blaschke 積}\} = H^\infty + C$)。

ただし b は interp. Blaschke 積には取れない。 [17] での Wolff の主定理は次である。

Wolff 定理 1. $f \in L^\infty$ に對して $gf \in QC$ とする outer 関数 $g \in QA$ が存在する ($L^\infty / QA = QC$)。

この定理の応用は多く, Chang-Marshall 定理に次ぐ Douglas 環において深い定理に思われる。この定理を用いて [7] で次が示された。

Guillory-Sarason 定理 1. 各 inner 関数 I に對して, $I\bar{b} \in H^\infty + C$ かつ $bI \in H^\infty + C$ なる Blaschke 積 b が存在する。

この定理は, singular inner 関数は考えなくとも Blaschke 積だけ考えれば用が足りることを示しているが, 又反面 Blaschke 積は interp. Blaschke 積の持つ性質と全く異なるもの

のが存在することを示す定理でもある。後で関連してくるが、残された2つの問題の多くはこの様な Blaschke 積に関するものである。W-定理1 と G-S 定理1 を合わせると次の得られる。

Wolff 定理2. w が L^∞ の unimodular 関数ならば、 $w = B_1 \overline{B_2} v$ である。ここで B_1, B_2 は Blaschke 積、 v は $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ で invertible 関数。

W-定理1 は次の2つの補題を結び合わせて示される。

補題1. $f \in L^\infty$ に対して Blaschke 点列 $\{z_n\}$ が次の性質を持つものが存在する: $g \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, $g(z_n) \rightarrow 0$ ならば $gf \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 。

補題2. $\{z_n\}$ が Blaschke 点列ならば $g(z_n) \rightarrow 0$ なる outer 関数 $g \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ が存在する。

Wolff の証明はともに VMO 技法で示されている。後で、補題1 は interp. Blaschke 積の性質を使う証明を述べる。補題2 は存在定理で、 g を singular inner 関数に変えうまいかというのが [7] における問題の1つで後で述べる。

§3. Guillory-Sarason の分解定理2.

[7] で示された一つの分解定理の周辺について述べる。

Guillory-Sarason 定理2. ψ を inner 関数, $\varphi \in H^p \subset L^p$ とある時次は同値である。

$$(i) \quad \varphi \bar{\varphi}^n \in H^\infty + C, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad \{x \in M(H^\infty + C); |\varphi(x)| < 1\} \subset Z(\varphi).$$

この定理から出発して [2, 13, 1] の Douglas 環への拡張がある。それらを通して次の二つが基本であることが理解出来る。一つは単純に Chang - Marshall 定理に含まれるものであるが、明確に書かれていない所がなく、Marshall 氏によれば彼の博士論文に述べられていいるというがない。

命題 1 (証明は [1] 参照). inner 関数 I に対して, interpolating Blaschke 積 b が $[H^\infty, I] = [H^\infty, \bar{b}]$ なるものが存在する ($\{x \in M(H^\infty + C); |I(x)| < 1\} = \{x \in M(H^\infty + C); |b(x)| < 1\}$ と同じこと), ここで $[\cdot]$ は中味より生成される内部分環を表わす。

もう一つは [2, 9] で同時に独立に得られた結果である。

A-G-G-I-S 定理. b を interpolating Blaschke 積, $f \in H^\infty + C$, かつ $Z(f) \supset Z(b)$ ならば, $f\bar{b} \in H^\infty + C$ である。

H^∞ の分解定理は, $f \in H^\infty$, b を Blaschke 積とし, もし $\text{Ord}_f(z) \geq \text{Ord}_b(z)$ (z は b の D での zero 点) ならば, $f\bar{b} \in H^\infty$ であることを示している。この場合 $\text{Ord}_b(z) < \infty$ である。よって割算について自然に $H^\infty + C$ に拡張を考えるならば, $\text{Ord}_b(x) < \infty$ ($\forall x \in Z(b)$) の時に考えることになる。その場合, b は interpolating Blaschke 積の有限個の積の形に表わさ

れるから $A-G-G-I-S$ 定理が自然な拡張になつてゐることがわかる。 $\text{Ord}_b(x) = \infty$ とする $x \in Z(b)$ がある時は $f \in H^\infty + C$ が $\text{Ord}_f(x) \geq \text{Ord}_b(x)$ ($\forall x \in Z(b)$) を満たしかつ $f\bar{b} \notin H^\infty + C$ なる例は簡単に作れる。この点は Guillon-Sarason 定理 3 に関係してゐる。分解定理で残された難かしきはすべて、zero 点の order が ∞ になる場合に集約される。この場合はあまりわからなない。

$G-S$ 定理 2 を命題 1 と $A-G-G-I-S$ 定理より導いてみよう。(C2)。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) は自明である。(逆) ψ に対して命題 1 の b を取る。 $Z(b) \subset \{x \in M(H^\infty + C); |\psi(x)| < 1\} \subset Z(\psi)$ であるから、 $A-G-G-I-S$ 定理より、 $\psi\bar{b} \in H^\infty + C$ である。その上 $Z(b) \subset Z(\psi\bar{b}) = Z(\psi)$ より、 $\psi\bar{b}^2 \in H^\infty + C$ 。続けて、 $\psi\bar{b}^n \in H^\infty + C$ を得る。

$A-G-G-I-S$ 定理は Chang-Marshall 定理をいふものように使つて容易に一般の Douglas 環の場合に拡張出来る、よ、 $G-S$ 定理 2 も拡張出来る。 $G-S$ 定理 2 の最終的な形は次の様になる ([18] を参照)。

命題 2. B_1, B_2 を Douglas 環と $f \in B_2$ とする。次は同値である。

(i) $f B_1 \subset B_2$.

(ii) $Z_{B_2}(f) \supset M(B_2) \setminus M(B_1)$.

Wolff 補題 1 の別証. $f \in L^\infty$ とする. C-M 定理より $f, \bar{f} \in [H^\infty, \bar{I}]$ なる inner 関数 I が存在する. 命題 1 より $[H^\infty, \bar{I}] = [H^\infty, \bar{b}]$ なる interp. Blaschke 積 b があつた. $g \in \mathbb{Q}C$ を $g(z_n) \rightarrow 0$ とすると, A-G-G-I-S 定理より $g\bar{b}^m \in H^\infty + C$ を得る. これは $[H^\infty, \bar{b}] \cap g \subset H^\infty + C$ であり証明が終る.

この証明は命題 2 の特別な場合である: $B_1 = [H^\infty, f, \bar{f}]$, $B_2 = H^\infty + C$, $f = g \in \mathbb{Q}C \subset H^\infty + C$. 証明は同じである. 又補題 1 の Douglas 環への拡張も出来る. ただ補題 1 を証明するだけならば, A-G-G-I-S 定理は~~不~~必要で, 命題 1 より明らかになる.

関連して生ずる問題は: Wolff 補題 1 の結論が成立する Blaschke 実列 $\{z_n\}$ は interpolating 実列の有限個の合併集合か?

最後に § 2 の終りに述べた事柄について述べる. [7] に次の問題がある: 各 inner 関数 I に対して singular inner 関数 S が $S I^m \in H^\infty + C (\forall m)$ をみたすものが存在するか?

この解は最近 P. Gorkin [6] によって与えられた. Gorkin は [7] での手法を使っている為, 上半平面でその構成をしているが単位円板 D で議論した方が簡単で又 singular 測度を作る時, 連続にも又 discrete にも取れるから便利である.

singular 測度の構成.

まず Sarason の問題に答えるように問題を変形していく。
 I を inner 関数とすると命題 1 より $[H^\infty, I] = [H^\infty, \bar{I}]$ なる
 interpolating Blaschke 積がある。その zero 点列を $\{z_n\}$ とす
 る。 $S(z_n) \rightarrow 0$ なる singular inner 関数 S の存在が示され
 れば, A-G-G-I-S 定理より $S\bar{I}^m \in H^\infty + C$ となり, $S\bar{I}^m \in$
 $H^\infty + C$ が得られる。よって問題は $S(z_n) \rightarrow 0$ なる S の作り方
 だけである。(Wolff 補題 2 と比較すると問題意識は同じになる)。

ここで $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ とおく。 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-r_n) < \infty$ だから, 正数列
 $\{b_n\}$ を $b_n \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (1-r_n) < \infty$ なるものを取り, $a_n =$
 $b_n(1-r_n)$ とおく。 S_n を $e^{i\theta_n}$ での単位素測度とし, $\mu =$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n$ とする, μ は discrete 測度である。 $S[\mu]$ を μ よ
 り作られる singular inner 関数とすると

$$\begin{aligned} |S[\mu](z_n)| &\leq |S[a_n S_n](z_n)| \\ &= \left| \exp \left[-a_n \frac{e^{i\theta_n} + r_n e^{i\theta_n}}{e^{i\theta_n} - r_n e^{i\theta_n}} \right] \right| \\ &= \exp \left[-a_n \frac{1+r_n}{1-r_n} \right] = \exp [-b_n(1+r_n)] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

もし連続 singular inner 関数を望むならば S_n の代わりに

$$\operatorname{Re} \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_n(\theta) \geq \frac{1+r_n}{2(1-r_n)}$$

を満たす連続 singular 確率測度を選べばよい。証明終り。

この結果から Hoffman の本, p. 179 に述べられている,

$x \in M(H^\infty C) \setminus M(L^\infty)$ の特長づけの所に次の条件を加えることが出来る。

(a) $S_d(x) = 0$ ($S_c(x) = 0$) なる discrete (連続) singular inner 関数 S_d (S_c) が存在する。

又 L^∞ が H^∞ と $\overline{S_d}$ (又は $\overline{S_c}$) で生成され得ることと出来る。おもしろい所は、 S_d に対して $S_c \overline{S_d}^n \in H^\infty + C$ なる S_c が存在する所である。同様に S_c に対して $S_d \overline{S_c}^n \in H^\infty + C$ なる S_d が存在する。singular inner 関数の分解定理の研究はあまり進んでいないが、上の議論を押し進めていくと何かがある様な気がする。主として、Axler 定理はこれらの事を用いて得ることが出来る。(しかし Axler 定理の証明自体は簡単なものごとによって、という Douglas-Rudin 定理 [4] と結びつけて考えると新しい見方が出て来る様な気がする。

§4. Guillory-Sarason 定理3.

次も [7] に示された結果である。

Guillory-Sarason 定理3. 次のみたす自然数 N が存在する: $\varphi \in H^\infty + C$ で、 φ を inner 関数とする。もし $M(H^\infty + C)$ 上で $|\varphi| \leq |\psi|$ が成立していれば、 $\varphi^N \bar{\psi} \in H^\infty + C$ である。

この定理は分解定理の中で深く $H^\infty + C$ の構造又は Douglas 環の構造に関連している様に見える。まず N の出所がある

が Carleson の corona 定理の証明の中に出てくる構成法の中
の自然数に依存する N である。問題の一つは具体的に与え
よである。もう一つは一般の Douglas 環で $G-S$ 定理が成
立するかである。とても難しい問題の様に思われる。筆者は
 $N=2$ (もう少し 1^+ という所まで拉び出さず) と予想する。

ψ が interpolating Blaschke 積とすると, $|\psi| \leq |\psi|$ は $Z(\psi)$
 $\subset Z(\psi)$ を意味するから $A-G-I-S$ 定理より $\psi \bar{\psi} \in H^\infty + C$
となる。つまり ψ が interpolating Blaschke 積ならば $N=1$
と取れる。有限個の積論で ψ が interpolating Blaschke 積の
有限個の積の場合に $N=1$ である。 ψ がそうでない時,
interpolating Blaschke 積 b で $\psi \bar{b}^m \in H^\infty + C$ なるものが存
在する。 $\varphi = \psi \bar{b}$ とすると, $|\varphi| = |\psi|$ ($M(H^\infty + C)$ 上) であ
り, $\varphi \bar{\varphi} = \bar{b} \in H^\infty + C$ であり $\varphi^2 \bar{\varphi} = \psi^2 \bar{b}^2 \bar{\psi} = \psi \bar{b}^2 \in H^\infty + C$
である。 $\varphi = \psi \bar{b}^m$ として $\varphi^2 \bar{\varphi} = \psi \bar{b}^{2m} \in H^\infty + C$ と同じ
事になる。 もう一つの例は U を $M(L^\infty)$ の部分、部分集合で X を
 U 上で 1 , U^c 上で定数 α , $|\alpha|=1$ とする。 Wolff 定理より,
 $X = U B_1 \bar{B}_2$ なる Blaschke 積 B_1, B_2 と QC が invertible
なるものが存在する。 $B_1 \bar{B}_2 \notin H^\infty + C$ である。又

$$B_1^2 \bar{B}_2 = X^2 B_2^2 \bar{U}^2 \bar{B}_2 = \bar{U}^2 X^2 B_2$$

であるから $B_1^2 \bar{B}_2 \in H^\infty + C$ を示すには, $X^2 B_2 \in H^\infty + C$ をチエ
ックすればよい。 $\alpha = \pm 1$ の時はあたりまえ。よって $\alpha \neq \pm 1$

の時を考へる。 $X^2 B_2 \notin H^\infty + C$ とすると、或る $x \in M(H^\infty + C)$ ぞ $X^2 B_2|_{\text{supp } \mu_x} \notin H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$ となる。条件より $X B_2 \in H^\infty + C$ より $X B_2|_{\text{supp } \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$ かつ $B_2|_{\text{supp } \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$ である。つまり

$(X^2 - X) B_2|_{\text{supp } \mu_x} \notin H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$ かつ $(X - 1) B_2|_{\text{supp } \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$
 X_0 を $\cup$ して 0 , $\cup^c$ して 1 とすると

$X_0 B_2|_{\text{supp } \mu_x} \notin H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$ かつ $X_0 B_2|_{\text{supp } \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp } \mu_x}$ ぞ矛盾が生ずる。この議論を押し進めると、 w が有限個の値を取る unimodular 関数の時、Wolff 定理 2 より得られる $w, B_1, \overline{B_2} \in QC$ となる Blaschke 積 B_1, B_2 に對し $B_1^2 \overline{B_2} \in H^\infty + C$ となることがわかる。もし $G-S$ の証明方法で話しを進めようとしたら corona 定理の精密化が必要に見える。

自然数の 2 と 3 に関係する問題がいくつかあるのでここでそれを紹介したい。

早大の羽島氏より注意された事であるが、corona 定理に関係 (2 次の問題がある (Wolff の問題, [5, p. 329]):

$f_1, f_2, \dots, f_n, g \in H^\infty$ ぞ $|g(z)| \leq |f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)|$ ならば $g^2 = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n$ なる $g_i \in H^\infty$ が存在するか?

この時 2 は一般の k ぞ問題設定が出来るが $k \geq 3$ の時には Wolff によって示されている。 $k=1$ の時は NO である。残されているのは上の問題である。これは問題として 2 は前の N

の問題とにている。この場合は D 上での評価式の条件であるが、ここの辺の難かしきは境界の近くでの D に近づく早急の order を評価しなくてはならない所である。 N の問題も同じである。しかし2つの問題の相関関係はあまりはっきりしない。羽島は Wolff の問題は 2^+ に当る所までは $O(k \cdot 2^-)$ は $N \cdot 0$ という結果を得ていいる様である。

次は Sarason の問題である。 B を Douglas 環で $\mathcal{U}$ を B の中で invertible な inner 関数の集まりとする。 u を $\mathcal{U}$ より生成される C^* -環の中の unimodular 関数とする。問題は u が $\mathcal{U}$ の中の2つの関数の商で近似出来るか？ u^2 は近似出来ることも Marshall によってわかっている ([5, p. 399]).

最後に Sarason 定理2 [16] について述べる。

Sarason 定理2. φ_1 と φ_2 を inner 関数で

$\{x \in M(H^{\infty}_C); |\varphi_1(x)| < 1\} \cap \{x \in M(H^{\infty}_C); |\varphi_2(x)| < 1\} = \emptyset$ とする。すると任意の QC -level set Q に対して $\varphi_1|_Q$ または $\varphi_2|_Q$ の少なくとも一方は定数となる。ここで QC -level set とは QC 関数で分離出来ない X の中の極大集合をいう。

ここで2つの inner 関数が出てくるが、3つの場合はどうなるかというのが Sarason の問題である。この定理2の Douglas 環への振る舞いもわかっていない。又この定理の応用として b が interpolating Blaschke 積ならば

(*) $\bigcup \{ \text{supp } \mu_x; x \in Z(b) \}$ の閉包は H^0 の weak peak set になっており, これは Wolff 補題 2 の精密化に当たっている。その話しを進めることによつて多少の QC-level set に関する情報が得られる [11]。G-S 定理 3 と Sarason 定理 2 は今の所関係がない様に見えるが, 将来は何らかの形で結びついて来る様に見える。Sarason 定理 2 は Wolff 定理 1 を使つて示されてはいるが, 一つの応用として (*) が得られ, それより

(**) 任意の $M(L^0)$ の閉集合は QC-level set を含むことが示される [6, 11]。もしこの事実が Wolff 定理 1 を使わないで示すことが出来れば, そこから Wolff 定理 1 を示すことは難かしくなる。QA 関数の outer factor は QA 関数になることに注意すればよい。(**) は Wolff 定理 1 から容易に出る様うには思われたい。その意味では Wolff の QA 関数の極値は初等的である。より深く見ていくために [8, 9] から手掛りが見られるのではないかと期待する。

§5. 他の分解定理と問題.

inner 関数の $H^0 + C$ の中での分解定理を考へる時, G-S 定理 1 より, Blaschke 積 b について考へればよい。そこで b を Blaschke 積とす。まず A-G-G-I-S 定理より,

次の問題が出てくる。

問題1. $z(I) \supset z(b)$ なる inner 関数 I に對し 2, 11 つ
でも $|I| \leq |b|$ ($M(H^\infty C)$ 上) とする b の 特長づけは何か?

A-G-G-I-S 定理より b が interpolating Blaschke 積の時は
問題1の性質を持つ。よ、2 問題は上の解答が interpolating
Blaschke 積になるかである。 b が interpolating でない時、
問題1の条件を満たさないことをいさばよいが次の場合分け
かる。

- (1) $2 \leq \text{Ord}_b(x) < \infty$ なる $x \in z(b)$ が存在するとき。
- (2) $\{z_n\}$ が b の D 内での zero 点列とするとき, $\text{Ord}_b(z_n) \geq 2$.
- (3) $\rho(z_n, z_m) \geq \delta$ $\forall n \neq m$.

チェックされないで残った 2 個のは

$$\text{Ord}_b(x) = 1 \text{ 又は } \infty \quad (\forall x \in z(b))$$

の場合である。最終的には [10] で見られる様な他の Blaschke
積の分解定理が必要に思われる。

問題2. $f \in H^p + C$, $x \in M(H^\infty C)$, $\text{Ord}_f(x) \geq 2$ とする。

$f = f_1 f_2$, $f_i \in H^\infty C$, $f_i(x) = 0$ と分解出来るか?

Hoffman 定理2は局所的 (fiber 上) に分解出来ることを
示している。問題は大域的に分解する所である。 x が特殊
な点の時, たとえば interpolating 点列 $\{z_n\}$ で $f(z_n) \rightarrow 0$
かつ $\text{cl } \{z_n\} \ni x$ の時には A-G-G-I-S 定理より分解される。

この問題に關して得られている結果はない。

問題3. I を inner 関数で, $\text{Ord}_I(x) < \infty$ ($\forall x \in Z(I)$) とする。この時 I は interpolating Blaschke 積の有限個の積になる。 $\text{Ord}_I(x) = n$ ($\forall x \in Z(I)$) ならば I は有限個の interpolating Blaschke の積で表わせるか? これは Y. Izuchi [12] によつて答は Yes である。 $\text{Ord}_I(x) = \infty$ ($\forall x \in Z(I)$) の時は, 問題1の特殊な場合となり $I = b_1 b_2$, $Z(I) = Z(b_1) = Z(b_2)$ なる Blaschke 積 b_1, b_2 が存在するかどうかはわからない(ただし I を Blaschke 積とする時)。

問題4. (Guillory-Sarason [7]). $S_1 \overline{S_2}, \overline{S_2} S_1 \in H^\infty + C$ をみたす singular inner 関数 S_1, S_2 が存在するか?

$S_1 \overline{S_2} \in H^\infty + C$ となる2つの singular inner 関数の關係についてそれが, 正しい。 §3の最後に述べたことから, S_2 を固定した時 $S_1 \overline{S_2} \in H^\infty + C$ となる S_1 はかなり多い。その時長づきは難かしい様に見える。 $S_1 \overline{S_2}^n \in H^\infty + C$ ($\forall n$) なる S_1 の長づきはどうかはその様子は想像出来るが, きちんとした条件で与えるのはもう少し時間が必要と思われる。問題4をみたす S_1, S_2 が見つかるとおもしろいと思う(たぶん存在しないと思う)。

References

1. S. Axler, Factorization of L^∞ functions, Ann. of Math., 106 (1977), 567-572.
2. S. Axler and P. Gorokin, Divisibility in Douglas algebras, to appear in Michigan Math. J..
3. S.-Y. Chang, A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math., 137 (1976), 81-89.
4. R. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, Pac. J. Math. 31 (1969), 313-320.
5. J. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press (1981).
6. P. Gorokin, Singular inner functions and division in $H^\infty + C$, preprint.
7. C. Guillory and D. Sarason, Division in $H^\infty + C$, Michigan Math. J., 28 (1981), 173-181.
8. C. Guillory and D. Sarason, The Algebra of quasicontinuous functions, preprint.
9. C. Guillory, K. Izuchi and D. Sarason, Interpolating Blaschke products and division in Douglas algebras, to appear in Proc. Royal Irish Acad..
10. K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason

- and Gleason parts, *Ann. of Math.*, 86(1967), 74-111.
11. K. Izuchi, QC -level sets and quotients of Douglas algebras, preprint.
 12. Y. Izuchi, A note on interpolating Blaschke products, preprint.
 13. D. Luecking, Division in Douglas algebras, *Michigan Math. J.*, 29(1982), 307-314.
 14. D. Marshall, Subalgebras of L^∞ containing H^∞ , *Acta Math.*, 137(1976), 91-98.
 15. D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79(1973), 286-299.
 16. D. Sarason, The Shilov and Bishop decompositions of $H^p + C$, *Conference harmonic Analy.* in honor of A. Zygmund (1981), 461-474.
 17. T. Wolff, Two algebras of bounded functions, *Duke Math. J.*, 49(1982), 321-328.
 18. R. Yoniss, Division in Douglas algebras and some applications, preprint.