

BMO Inequality

Fumio Kubo and Shuhei Wada
(Dept.of Math.Toyama Univ.)

In the study of the classical isoperimetric problems, Wirtinger's several inequalities for L^p -function and its derivative, are available. In the first half of the present paper, the authors reviewed the discrete analogues for several Banach space norms of Wirtinger type functional inequalities from the operator theoretic point of view. In the second half, they discussed the functional BMO inequality together with finite dimensional discrete analogue.

BMO 不等式

富山大 理 久保 文夫 (Fumio Kubo)

富山大 理 和田 州平 (Shuhei Wada)

古典的等周問題を研究する上で Wirtinger の不等式の様な微分を含むノルム不等式

$$\int f \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq k \|f'\|$$

は有用である. このような不等式を以後 Wirtinger 型不等式と呼ぶことにする.

ここでは既に知られている Wirtinger 型不等式とその離散化を作用素ノルムの観点から見直す. 但し離散化された不等式とは有限次元ベクトル空間での差分を含む不等式

$$x_{n+1} = x_1, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \|(x_i)\| \leq k \|(x_i - x_{i+1})\|$$

を指す. [5]によれば離散化された不等式は

$$x_{n+1} = x_1, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad B(x_i - x_{i+1}) = (x_i)$$

を満たす行列 B の作用素ノルムを求めれば証明できる. この行列 B を求める方法は Hurwitz [4] による Wirtinger の不等式の証明に対応するものである.

次に John-Nirenberg によって定義された有界平均振動ノルム (BMO) について Wirtinger 型不等式が得られたことを報告する。まず BMO ノルムの離散的類推から有限次元数ベクトル空間上の bmo ノルムを定義し Wirtinger 型の bmo 不等式を示す。先に紹介した離散化された不等式の証明は特定のセミノルムが持つ平行移動や射影に関する性質に影響される。また bmo も同じ性質を持つことが証明できる。従って Wirtinger 型 bmo 不等式が得られる。この不等式の証明の類似により Wirtinger 型 BMO 不等式が得られる。

1. 種々の Wirtinger 型不等式

一次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の絶対連続関数 f とその導関数 f' についての L^p ノルム不等式

$$\int_{\mathbb{T}} f \, dt = 0 \Rightarrow \|f\|_p \leq \alpha \|f'\|_p$$

を考える。この形の不等式を満たす正の数 α の最小値は p の値によって変化する。(α_p とおく) α_p の値を求める方法は次の通りである。([3], [4], [8]) $p=2$ の場合。周期関数 f の Fourier 変換を $\hat{f}$ とおけば $\hat{f}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}'(n)$, さらに Parseval の等式から

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \neq 0} | \frac{1}{in} \hat{f}'(n) |^2 = \sum_{n \neq 0} |\hat{f}'(n)|^2 = \|\hat{f}'\|_2^2$$

従って $\|f\|_2 \leq \|\hat{f}'\|_2$ である。また $f(t) \equiv \cos t$ とおけば

$$\int_{\mathbb{T}} f dt = 0, \quad \|f\|_2 = \|f'\|_2$$

となり $a_2=1$ がわかる. $p=1, \infty$ の場合.

$$\hat{g}(0)=0, \quad \hat{g}(n)=\frac{1}{in} \quad (n \neq 0)$$

となる連続関数 g があれば

$$f = g * f'$$

となり $\|f\|_p \leq \|g\|_1 \|f'\|_p$ ($p=1, \infty$) が成立する. 実際

$$g(t) = \frac{-1}{\pi} \times \frac{\pi-t}{2}$$

とおくと上の条件を満たす. このとき $\|g\|_1 = \frac{\pi}{2}$ だから

$$\|f\|_p \leq \frac{\pi}{2} \|f'\|_p \quad (p=1, \infty).$$

また $\int_{\mathbb{T}} f_k dt = 0$ となる関数列をうまく選べば

$$\frac{\|f_k\|_1}{\|f'_k\|_1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

となり $a_1 = a_\infty = \frac{\pi}{2}$ がわかる. a_1 は Feinberg [3], a_∞ は Northcott [8] による結果である. また先の不等式で $p=2$ の場合は Wirtinger の不等式として知られているが彼が第一発見者がどうかは不明である. ([6]) 結果をまとめると次の通りである.

p	a_p	
1	$\frac{\pi}{2}$	Feinberg
2	1	Wirtinger
∞	$\frac{\pi}{2}$	Northcott

次に n 次元数ベクトル空間上の差分 $(I - S_n)$ を含むヘルム
不等式

$$X \in Y_n \Rightarrow \|X\|_p \leq \alpha \|(I - S_n)X\|_p$$

を考える。但し Y_n は成分の和が 0 になるベクトルのつくる空間、 S_n はシフト作用素とする。この不等式を満たす正の数 α の最小値は p の値によって変わる。 $(\alpha_p$ とおく) まず Y_n への orthogonal projection P_n に対して

$$B_n(I - S_n) = P_n, \quad B_n P_n = B_n$$

となる作用素 B_n を求める。作用素 B_n が求まればその作用素ノルム $\|B_n\|_p$ を用いて上の不等式は

$$\|B_n X\|_p \leq \|B_n\|_p \|X\|_p$$

と見ることが出来るからである。まずシフト作用素 S_n を対角化することを考える。対角行列 W_n を

$$W_n \equiv \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$$

$$(\omega \equiv e^{\frac{2\pi i}{n}})$$

とおくと次の等式 (Heisenberg の交換関係) が成立する。

$$S_n^k W_n^l = \omega^{kl} W_n^l S_n^k$$

このとき [7] によれば

$$F_n \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}^*$$

に対し

$$F_n S_n F_n^* = W_n$$

となる。これで S_n は対角化できた。従って明らかに

$$F_n (I - S_n) F_n^* = I - W_n = \text{diag}(0, 1 - \omega, 1 - \omega^2, \dots, 1 - \omega^{n-1}).$$

また作用素 P_n を F_n を用いて対角化すれば

$$F_n P_n F_n^* = \text{diag}(1, 1, \dots, 1).$$

これらの事実から B_n は次の様に定義すればよいことがわかる。

$$B_n \equiv F_n^* \text{diag}\left(0, \frac{1}{1-\omega}, \frac{1}{1-\omega^2}, \dots, \frac{1}{1-\omega^{n-1}}\right) F_n$$

上式の右辺を計算すると

$$B_n = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} n-1 & n-3 & \cdots & -(n-3) & -(n-1) \\ -(n-1) & n-1 & \cdots & -(n-5) & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-3 & \cdots & \cdots & n-3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-3 & \cdots & \cdots & -(n-1) & n-1 \end{pmatrix}$$

となる. $p=2$ の場合, B_n の定義から明らかに

$$\|B_n\|_2 = \left| \frac{1}{1-\omega} \right| = (2 \sin \frac{\pi}{n})^{-1}$$

また任意の作用素 A に対し

$$\|A\|_p^{(v)} \equiv \max \{ \|Ax\|_p : \|x\| \leq 1, x \in Y \}$$

とおくと明らかに $\|A\|_p^{(v)} \leq \|A\|_p$. さらに $\|P_n\|_2 \leq 1$ より

$$\|B_n x\|_2 = \|B_n P_n x\|_2 \leq \|B_n\|_2^{(v)} \|P_n x\|_2 \leq \|B_n\|_2^{(v)} \|x\|_2$$

となり $\|B_n\|_2 = \|B_n\|_2^{(v)}$ が成立する. 従って

$$\alpha_2 = \|B_n\|_2 = \|B_n\|_2^{(v)} = (2 \sin \frac{\pi}{n})^{-1}.$$

$p=1, \infty$ の場合, よく知られた公式から

$$\|B_n\|_1 = \|B_n\|_\infty = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |n+1-2i|$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{4} & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{n^2-1}{4n} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

となる. ここで

$$x_0 \equiv \begin{cases} (1, 1, \dots, 1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\frac{n+2}{2}}) & (n \text{ が偶数}) \\ (1, 1, \dots, 1, \underbrace{0}_{\frac{n+1}{2}}, -1, -1, \dots, -1) & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とおくと

$$\|B_n x_0\|_\infty = \|B_n\|_\infty \|x_0\|_\infty$$

$$x_0 \equiv \begin{cases} (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{\frac{n+2}{2}}, 0, 0, \dots, 0) & (n \text{ が偶数}) \\ (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{\frac{n+3}{2}}, 0, 0, \dots, 0) & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とおくと

$$\|B_n x_0\|_1 = \|B_n\|_1 \|x_0\|_1.$$

従って

$$\|B_n\|_1 = \|B_n\|_1^{(r)}, \quad \|B_n\|_\infty = \|B_n\|_\infty^{(r)}$$

となり

$$d_1 = d_\infty = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |n+1-2i|$$

が成立する. d_1, d_∞ は Fan, Taussky, Todd [1], d_2 は Schoenberg [9] による結果である. まとめると次の通りである.

p	d_p	
1	$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n n+1-2i $	Fan, Taussky, Todd
2	$(2 \sin \frac{\pi}{n})^{-1}$	Schoenberg
∞	$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n n+1-2i $	Fan, Taussky, Todd

2. BMO 不等式

一次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の関数 f と $\mathbb{T}$ 上の区間 I に対して f の BMO ノルムを

$$\|f\|_{\text{BMO}} \equiv \sup_{I \neq \emptyset} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| dt$$

と定義する. ここで $|I|$ は I の長さ, f_I は I における f の平均 $(\frac{1}{|I|} \int_I f dt)$ とする. BMO ノルムは次の性質を持つ.

$$(i) \quad \|f\|_{\text{BMO}} = 0 \iff f \text{ は定数}$$

$$(ii) \quad (T_S f)(t) \equiv f(t+S) \text{ とおけば } \|T_S f\|_{\text{BMO}} = \|f\|_{\text{BMO}} \\ (\text{translation について不変})$$

性質 (ii) が見られるのは別に BMO ノルムに限らないが後の議論で重要な役割を果すのであえて挙げることにした. n 次元数ベクトル空間上の ℓ^p ノルムは (ii) に対応する性質としてシフト作用素について不変であることが挙げられる. BMO ノルムはその定義から関数の振動を表す量と考えられる. そこで n 次元数ベクトル空間上のセミノルムで振動, ちらばりの度合いを表す量として bmo を定義する.

$$\|(x_i)\|_{bmo} \equiv \max \left\{ \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} |x_i - x_I| : \emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

ここで $|I|$ は I に含まれる元の個数, x_I は I における平均 $(\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} x_i)$ とする. また $\{1, 2, \dots, n\}$ の空でない部分集合

$I = \{i(1), i(2), \dots, i(r)\} (1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(r) \leq n)$ に対して

$$E_I(x_i)_{i=1}^n \equiv (x_{i(k)})_{k=1}^r$$

$$P_I \equiv P_r = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & r-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & -1 & r-1 \end{pmatrix} \in M_r(\mathbb{C})$$

と定義すれば

$$\|x\|_{bmo} \equiv \max_{I \neq \emptyset} \left\| \frac{1}{|I|} P_I E_I x \right\|_1$$

とかくことができる。但しここで $\|\cdot\|_1$ は r 次元数ベクトル空間上の ℓ^1 ノルムを表す。 bmo ノルムは次の性質を持つ。

$$(i) \quad \|(x_i)\|_{bmo} = 0 \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$$(ii) \quad \|S_n x\|_{bmo} = \|x\|_{bmo} \quad (\forall x)$$

従って $\|\cdot\|_{bmo}$ は振動を量る目安となり得る。上記の性質 (i) (ii) を用いて次の定理が示される。

定理 1. 任意の n 次元数ベクトル x に対して

$$\|x\|_{bmo} \leq d \|(I - S_n)x\|_{bmo}$$

を満たす正の数 d の最小値は $\frac{1}{2n} \sum_{i \in I} |n+1-2i| (= \|B_n\|_\infty)$ である。

定理 1 を証明する前に準備として次の補題を記す。

補題 線型空間 V 上のセミノルム $\|\cdot\|$ に対して

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in V : \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Rightarrow \max_i \|x_i\| \leq d \max_i \|x_i - x_{i+1}\|$$

となる正の数 d の最小値は $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |n+1-2i|$ ($= \|B_n\|_\infty$) である.

証明は先に示したセミノルム不等式

$$x_1, x_2, \dots, x_n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \max_i |x_i| \leq \|B_n\|_\infty \max_i |x_i - x_{i+1}|$$

の証明と全く同じ.

(定理 1 の証明) 任意のベクトル $x (\in Y_n)$ に対し

$$y_i = S_n^i x$$

とおくと $\sum_{i=1}^n y_i = 0$. また bmo ノルムのシフト不変性から

$$\|y_i\|_{bmo} = \|S_n^i x\|_{bmo} = \|x\|_{bmo}.$$

さらに

$$\begin{aligned} \|y_i - y_{i+1}\|_{bmo} &= \|S_n^i x - S_n^{i+1} x\|_{bmo} \\ &= \|S_n^i (I - S_n) x\|_{bmo} \\ &= \|(I - S_n) x\|_{bmo}. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \max_i \|y_i\|_{bmo} &= \|x\|_{bmo} \\ \max_i \|y_i - y_{i+1}\|_{bmo} &= \|(I - S_n) x\|_{bmo} \end{aligned}$$

としてさしつかえない. ここで先の補題を使えば

$$\begin{aligned}
\|x\|_{bmo} &= \max_i \|y_i\|_{bmo} \\
&\leq \|B_n\|_{\infty} \max_i \|y_i - y_{i+1}\|_{bmo} \\
&= \|B_n\|_{\infty} \|(I - S_n)x\|_{bmo}
\end{aligned}$$

また bmo ノルムの性質(i)から

$$\|P_n x\|_{bmo} = \|x\|_{bmo} \quad (\forall x)$$

となるので

$$\|x\|_{bmo} \leq \|B_n\|_{\infty} \|(I - S_n)x\|_{bmo} \quad (\forall x)$$

が成立する。以上で $d_{bmo} \leq \|B_n\|_{\infty}$ がわかる。次に

$$x_0 \equiv \begin{cases} (1, 1, \dots, \underbrace{1}_{\frac{n+1}{2}}, -1, -1, \dots, -1) & (n \text{ が奇数}) \\ (1, 1, \dots, \underbrace{1}_{\frac{n}{2}}, -1, -1, \dots, -1) & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

とおけば $\|B_n x_0\|_{bmo} \geq \|B_n\|_{\infty} \|x_0\|_{bmo}$ となることを示す。

n 以下の自然数の集合 I ($|I| = m$) に対し座標の置換 π と自然数 k ($\leq n$) が存在し

$$\pi E_I x_0 = (1, 1, \dots, 1, \underbrace{-1, -1, \dots}_{m-k+1}, \underbrace{-1}_{m})$$

このとき

$$\begin{aligned}
\pi P_I E_I x_0 &= P_I \pi E_I x_0 \\
&= \frac{2}{m} (k, k, \dots, k, \underbrace{-(m-k), -(m-k), \dots}_{m-k+1}, -(m-k)).
\end{aligned}$$

従って

$$\|x_0\|_{bmo} = \max_{I \neq \emptyset} \left\| \frac{1}{|I|} P_I E_I x_0 \right\|_1 = \max_{m, k} \frac{2(m-k)k}{m^2} = 1$$

となる。また I ($|I|=2$) をうまく選べば

$$E_I B_n x_0 \equiv \begin{cases} \frac{1}{4n} (n^2-1, -n^2+1) & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{1}{4n} (n^2, -n^2) & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

となるから

$$\frac{1}{2} \|P_I E_I B_n x_0\|_1 = \|B_n\|_\infty$$

つまり

$$\|B_n x_0\|_{bmo} \geq \|B_n\|_\infty$$

これで定理 1 は示された。

上記の様に不等式

$$\|x\|_{bmo} \leq \|B_n\|_\infty \|(I - S_n)x\|_{bmo}$$

は x の不等式のベクトル化を用いて導くことができる。従って
トーラス上の関数とその導関数の BMO 不等式

$$\|f\|_{BMO} \leq \alpha \|f'\|_{BMO}$$

を次の補題を用いて証明することを試みる。

補題 Banach空間に値をとる $\mathbb{T}$ 上絶対連続関数 f について

$$\int_{\mathbb{T}} f dt = 0 \Rightarrow \sup \|f(t)\| \leq \alpha \sup \|f'(t)\|$$

を満たす正の数 α の最小値は $\frac{\pi}{2}$ である。

(証明略)

定理 2. $\mathbb{R}$ 上の絶対連続関数 f について

$$\|f\|_{BMO} \leq \frac{\pi}{2} \|f'\|_{BMO}$$

(証明)

$$g \equiv f - \frac{1}{|\mathbb{R}|} \int_{\mathbb{R}} f \, dt$$

とおくと $\|g\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$, $g' = f'$. 従って $\int_{\mathbb{R}} f \, dt = 0$ として十分.

関数 f ($\int_{\mathbb{R}} f \, dt = 0$) に対し写像 T_s を translation $T_s((T_s f)(t)) \equiv f(t+s)$

を用いて

$$\Phi(s) \equiv T_s f$$

と定義する. BMO ノルムの translation 不変性から

$$\|\Phi(s)\|_{BMO} = \|T_s f\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

$$\|\Phi'(s)\|_{BMO} = \left\| \frac{d}{ds} T_s f \right\|_{BMO} = \|f'\|_{BMO}.$$

また $\int_{\mathbb{R}} \Phi(s) \, ds = 0$ より補題が使える

$$\sup \|\Phi(s)\|_{BMO} \leq \frac{\pi}{2} \sup \|\Phi'(s)\|_{BMO}$$

従って

$$\|f\|_{BMO} \leq \frac{\pi}{2} \|f'\|_{BMO}.$$

3. 拡張

bmo ノルムの性質 (i)(ii) を満たす n 次元数ベクトル空間上の (セミ) ノルムは bmo ばかりではない. 例として次の (セミ) ノルム

$\|\cdot\|_{bmo_p}$ が挙げられる.

$$\|x\|_{bmop_p} \equiv \max_{I \neq \emptyset} \left\| \frac{1}{|I|} P_I E_I x \right\|_p \quad (p \geq 1)$$

$p = \infty$ のとき右辺を計算すると

$$4\|(x_i)\|_{bmop_\infty} = \max |x_i - x_j|$$

となる。これは通常振動量ないしは振幅と呼ばれる量である。

また $bmop_p$ ノルムについても定理1と同じ結果が得られる。

定理3. 任意の n 次元数ベクトル x に対して

$$\|x\|_{bmop_p} \leq \alpha \|(I - S_n)x\|_{bmop_p}$$

を満たす正の数 α の最小値は $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |n+1-2i| (= \|B_n\|_\infty)$ である。

(証明は定理1とほぼ同じ)

参考文献

- [1] K. Fan, O. Taussky, and J. Todd, Discrete analogues of inequalities of Wirtinger, Monatsh. Math. 59 (1955), 73-79.
- [2] C. Fefferman, and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972), 137-193.
- [3] J. M. Feinberg, Some Wirtinger-like inequalities, SIAM Jour. Math. Anal., 10 (1979) 1258-1271.

- [4] A. Hurwitz , Sur le probleme des isoperimetres ,
C. R. Acad. Sci ., 132 (1901), 401-403 .
- [5] F. Kubo and S. Wada , Cyclic Inequalities and Discrete
Fourier Analysis, to appear in Linear Multilinear Alg.
- [6] D. S. Mitrinović , Analytic Inequalities , Springer-
Verlag , Berlin , 1970 .
- [7] M. Nakamura and H. Umegaki , Heisenberg's commu-
tation relation and the Plancherel theorem , Proc.
Japan Acad. , 37 (1961) , 239-242 .
- [8] D. G. Northcott , Some inequalities between peri-
odic functions and their derivatives , J. London
Math. Soc. , 14 (1939) , 198-202 .
- [9] I. J. Schoenberg , The finite Fourier Series and elementa-
ry geometry , Amer. Math. Monthly , 57 (1950) , 390-404 .