

Bethe-Salpeter 方程式の 固有値が実数であることの証明

京大 数研 中西 襄

この仕事は内藤清一氏との共著論文 "Reality of the Eigenvalues of the Bethe-Salpeter Equation" (RIMS 52, Progress of Theoretical Physics に投稿) に詳しいので、ここではごく概略のみを報告する。

例之は、質量がそれぞれ m_1, m_2 の 2 つのスカラ-粒子が、質量 μ のスカラ-粒子を交換する ladder model の Bethe-Salpeter (B-S) 方程式を考える。Wick rotation¹⁾ を行なえば、B-S 方程式は

$$K(p, p_4) \phi(p, p_4) = \lambda \int d^3 p' \int dp'_4 I(p, p_4; p', p'_4) \phi(p', p'_4) \quad (1)$$

となる。ここに $\lambda = g^2/(4\pi)^2$ は固有値、 ϕ は B-S 振巾、

$$K(p, p_4) \equiv [m_1^2 + p^2 - (\eta_1 \sqrt{s} + i p_4)^2] [m_2^2 + p^2 - (\eta_2 \sqrt{s} - i p_4)^2],$$

$$I(p, p_4; p', p'_4) \equiv \pi^{-2} [\mu^2 + (p - p')^2 + (p_4 - p'_4)^2]^{-1} \quad (2)$$

で, $\eta_{\bar{3}} = m_{\bar{3}} / (m_1 + m_2)$, $\sqrt{s}$ は束縛状態のエネルギーである。
 $m_1 = m_2$ のときは $K > 0$ となるから直ちに Hilbert-Schmidt
 型の積分方程式に変換ができ, 固有値 λ は実数かつ正であるこ
 とは明らかである。ところが, $m_1 \neq m_2$ のときは K はもはや実
 数でないから, λ がこのときも実数であるかどうかは問題であ
 る。最近 Cutkosky-Deo²⁾ が数値計算で, (1) を Regge 化した
 ときに得られる Regge trajectory が複素数になりうるこ
 とを示したので, この問題はとくに興味がある。

λ が実数であることを証明するには, (2) から直ちに導かれ
 る次の3つの性質を用いる (* は複素共役):

$$K^*(p, p_4) = K(p, -p_4),$$

$$I^*(p, p_4; p', p'_4) = I(p, -p_4; p', -p'_4),$$

$$I(p', p'_4; p, p_4) = I(p, p_4; p', p'_4). \quad (3)$$

証明の方法は次の通りである。(1) に $\phi^*(p, -p_4)$ をかけて, p ,
 p_4 につき積分する (積分は収束する)。この等式の複素共役と
 とり (3) の性質を考慮すると, 両辺の積分は実は複素共役をとる
 前の式のそれらと全く同じであることが分る。従ってそれら
 の積分が 0 でなければ, $\lambda = \lambda^*$, すなわち λ が実数であるこ
 とが分る。積分が 0 になる場合も今考えている model では実は
 心配しなくてもよいことがいえ, λ が実数であるという証明が

完結する。

この結果と、最近荒船氏³⁾が証明した $\text{Re } \lambda > 0$ とを組合せる
と $\lambda > 0$ が得られる。また λ が実数であることから、 s の関数
として $s < (m_1 + m_2)^2$ で branch point をもたないことが分
る。

上記の固有値が実数であることの証明は、実は ladder model
の時間反転不変性に基くものであるので、積分が ∞ または 0 に
なる場合の吟味の点を除けば、他の model の場合にも容易に
拡張できる。K, I が matrix のときは、(3) の性質は複素共
役の代りに適当な共役操作をとればやはり成立する。

[なお、講演の際、Regge化したとき Cutkosky-Deo²⁾の現象が
起るのは同じ B - S 量子数をもつ trajectory の間でだけである
と言ったが、これは固有値 $\lambda_\ell(s)$ が ℓ について正則であることが
いえていないので、正しくない結論だったので取消する。]

文 献

- 1) G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954), 1124
- 2) R. E. Cutkosky and B. B. Deo, Phys. Rev. Letters 19
(1967), 1256.
- 3) J. Arafune, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), to be published.