

成分型の群について

東大教養 近藤 邦

§1 序

M. Aschbacher による画期的な仕事

(A) On finite groups of component type
Illinois Jour Vol 19 (1975)

が、一昨年の札幌国際シンポジウムにおいて発表された以来、
いわゆる成分型の群についての研究は著しい進展を見せ、こ
ろ二年のうちには、成分型の群の研究は一応の完成を見る
のではないかと云われている。(最近の進展については、五
味・山田・宮本の報告を参照) このアは上の論文(A)の内
容を解説する。この論文は最近の有限単群論の基礎となす
ものであると同時に、将来の群論の発展にも通ずるものを含
んでいると思われるのであるが、何分にもその内容は難解と
きわめ、簡単に読める内容ではない。この解説が少しでも多
くの人々、この論文に近づく一助となれば幸いである。

§2 Aschbacher の定理

この節では、(A)の主定理を説明するが、慣用の記号は断わ

が成り立つことに注意する。

有限群 G は

$$G = G', \quad G/Z(G) = \text{単群}$$

のとき、準単群 (quasi-simple group) と呼ばれる。また

$$G = G', \quad G/Z(G) = \text{単群の有限直積}$$

のとき、 G は半単群 と呼ばれる。 (semisimple group)

便宜上、単位群も準単群も半単群の仲間に入れた。

半単群 $G (\neq 1)$ は、

$$G = G_1 G_2 \cdots G_n$$

G_i は準単群

$$[G_i, G_j] = 1 \quad (i \neq j)$$

の形に一意的に書ける。このとき、 $G_1, G_2, \dots, G_n \in G$ の成分 (component) と云う。一般に有限群 G に ~~well-defined~~ 最大半単正規部分群が唯一存在する。それを $E(G)$ で表わす:

$$E(G) = G \text{ の最大の半単正規部分群}$$

以後、 $I(G)$ により G の involutions 全体の集合を表わす:

$$I(G) = \{ x \in G \mid x^2 = 1, x \neq 1 \}$$

さて、偶数位数の群 G は、

$$E(C_G(t)/C_G(t_1)) \neq 1 \quad \text{for } \exists t \in I(G)$$

なる条件をみたすとき, 成分型の群 (group of component type) と呼ばれる。この基本的な問題は, $O(G) = 1$ のとき次の命題 (B) が成り立つかどうかと云うことである:

$$(B) \quad E\left(\frac{C_G(t)}{O(C_G(t))}\right) = \frac{E(C_G(t)) O(C_G(t))}{O(C_G(t))}$$

$$\text{for } \forall t \in I(G)$$

次の記号を用いるのが便利である。 $E(X/O(X))$ の X の完全対象を $O_{2',E}(X)$ と書く:

$$O_{2',E}(X) = E(X \text{ mod } O(X))$$

この記号を用いれば, (B) は

$$(B) \quad O_{2',E}(C(t)) = E(C(t)) O(C(t)) \quad \forall t \in I(G)$$

となる。この (B) が, いわゆる (B)-conjecture の実質的内容である。

さて, (A) の主定理は, 次の二つの定理に分けて理解するのがよい。

定理 1. G は (B) をみたす偶数次位の群とする。このとき次の (i), (ii) をみたす G の標準的部分群 A が存在する:

$$(i) \quad |C(A)| = \text{even}$$

$$(ii) \quad I(C(A)) \ni t \Rightarrow E(C(t)) \supset A$$

定理 1 の (i), (ii) をみたす標準的部分群 A が, さらに

$$(iii) \quad [A, A^g] \neq 1 \quad (\forall g \in G)$$

をみたすとき, A を G の標準部分群 [と云う, 標準部分群のこの定義が, $C(A)$ による] (standard subgroup)

A standard in G

$$\iff C(A) \text{ は } G \text{ における tightly embedded}$$

$$N(C(A)) = N(A)$$

$$[A, A^g] \neq 1 \quad \forall g \in G$$

と同値であることは, 全く見易い. さて, 定理1の(i), (ii)をみたす標準部分群 A が (iii) をみたさなければ何が起こるか? それに答えるのが, 次の定理2である.

定理2 A を定理1の(i), (ii)をみたす G の標準部分群とする.

$$[A, A^g] = 1$$

($\forall g \in G$) ならば, $E(G) \triangleright A$ であるかあるいは,

$m(A) = 1$ であり $[A, A^g] = 1$ ならば A^g は unique (しかして $|A \cap A^g| = \text{even}$ である).

これら2つの定理が, (A)の主定理の本質的内容である. さらに, R. Froberg は定理2をさらに押し進めて, 定理2において $E(G) \triangleright A$ ならば,

$$\langle A^G \rangle \cong S_{p+1}(q), U_4(q), G_2(q) \quad q = \text{odd}$$

であることとを示している。したがって、定理1, 2は R. Frobenius の結果とともに、有限単群 G は少数の例外 ($S_{p+1}(q)$ など) を除いて標準部分群をもつことを示している。(ただし (B) が成り立つことを仮定している上である)

以下で、定理1の証明と定理2の概略を解説する。定理1の証明は、むしろ elementary であり難しくはないが、定理2の内容は深くその証明は極めて難解である。このことは、定理1, 2の主張をみるだけでも想像するに難くはないであろうと思われる。

§3 Frobenius-Walter の定理

以下では、 $E(X)$ の成分を X の成分と呼ぶことにする。

このでは、成分の取扱いに基本的な事項を述べる。まず、次の簡単な命題は、大切である。

★ (1) $L \in X$ の成分, $Y \in X$ の任意の成分群とあるとき $[Y, L] = 1$ または $[Y, L] \supseteq L$ である,

(2) $t \in I(X)$, $L = \text{a component of } X$, $L \neq L^t$ とし, $\Delta = \{xx^t \mid x \in L\}$ とおく。このとき、次の (a) ~ (e) が成り立つ:

(a) $\Delta = C_{L L^t}(t)'$ で Δ は準単群。

- (β) $Y \subseteq X, [Y, \Delta] = 1 \Rightarrow [N_Y(L), LL^t] = 1$
 (γ) $LL^t = Z(LL^t)\Delta \ni x \Rightarrow \langle x, \Delta \rangle = LL^t$
 (ε) $\Delta \subseteq Y \subseteq LL^t, Y = Y' \Rightarrow Y = \Delta \cap LL^t$

定理 (Gorenstein-Walter)

$I(X) \ni t, L = \text{a component of } X, K = \text{a component of } C(t)$ とするとき, 次の4つの条件が成り立つ:

- (i) $K = L$
 (ii) $[K, L] = 1$
 (iii) $L \neq L^t$ かつ $K = C_{LL^t}(t)'$
 (iv) $K \subset L = [L, t]$

系 $E(C(t)) \subseteq O_{2'E}(X)$

上の命題 (i), (ii) の証明はすでにし、Gorenstein-Walter の定理には, 有限群の automorphism group に使った Glauberman の定理が用いられる。

注意 $L(X) = O_{2'E}(X)^{(ss)} (= O_{2'E}(X) \text{ の交点 + 群 } 3' \text{ の最終項})$ とおくと, $L(X)$ は

$$L(X) = L_1 L_2 \cdots L_n$$

$$L_i / O(L_i) = \text{準単純}$$

$$L_i' = L_i, \quad [L_i, L_j] \subseteq O(L_i) \cap O(L_j) \quad (i \neq j)$$

の形に一意的に書ける。この L_i を X の 2-成分と呼ぶ。

上の G-W の定理は、 X の 2-成分と $C(t)$ の 2-成分の関係に一般化され、最も $L(C(t)) \subseteq L(X)$ の形に一般化される。これが、本来 G-W の定理と呼ばれていたものだった。しかしこの解説では、実質的に 2-成分を用いることはないので、上の定理を G-W の定理と呼ぶことにする。

§4 定理1の証明.

この節では、 G を §2 の命題 (B) が成り立つ群とする。

$\mathcal{L} = C(t)$ の成分全体 ($t \in I(G)$)

$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ の元で位数最大のものの全体.

と置く。まず 次の命題 (3) は (B) と G-W の定理の簡単な応用である：

$$(3) \quad \mathcal{L} \ni A \triangleleft E(C(t)),$$

$$I(C(t) \cap C(A)) \ni a \Rightarrow A \triangleleft E(C(a)).$$

以下、 $\mathcal{L}^*$ のある元が定理1の (i), (ii) を満たすことを示す。

Lemma 1 $\mathcal{L}^* \ni A \triangleleft E(C(t))$ ($t \in I(G)$), $I(C(t) \cap C(A))$

$\Rightarrow a \in I(C(a)) \nmid A$ ならば

$$(i) \quad \mathcal{L}^* \ni \exists K \in E(C(a)) \text{ s.t. } K \neq K^t \text{ and } A = C_{KK^t}(t)'$$

$$(ii) \quad m(C(t) \cap C(A)) > 2 \Rightarrow$$

$$\exists U = 4\text{-gp} \text{ s.t. } E(C(u)) \triangleright KK^t \quad \forall u \in U^\#$$

Lemma 2. $\mathcal{L}^* \ni A \nmid$

$$(\#) \quad C(A) \supseteq \exists U = 4\text{-gp} \text{ s.t. } E(C(u)) \triangleright A \quad \forall u \in U^\#$$

をみたすとき, このとき

$$(i) \quad a \in I(C(U) \cap C(A)) \Rightarrow A \triangleleft E(C(a))$$

$$(ii) \quad I(C(A)) \ni a, \quad E(C(a)) \nmid A \Rightarrow a \notin O^2(C(A))$$

Lemma 3 $\mathcal{L}^* \ni A \nmid$ $(\#)$ をみたすとき,

$$[A, A^g] = 1 \quad \exists g \in G \Rightarrow A \text{ は定理 1 の (i), (ii) をみたす.}$$

定理 1 の証明.

背理法による. $\mathcal{L}$ 上の $\mathcal{L}^*$ の 2 次の (*) を仮定する:

(*) $\mathcal{L}^*$ のどの元も定理 1 の (ii) をみたさず

($\mathcal{L}^*$ の元は, 定理 1 の (i) をみたすことに注意)
 $A \in \mathcal{L}^* \ni$

Step 1. $\exists t, a \in I(G) \text{ s.t. } [t, a] = [t, A] = [a, A] = 1$

and $E(C(t)) \triangleright A, E(C(a)) \nmid A$

(*) により $\exists u, v \in I(C(A))$ s.t. $E(C(u)) \supset A$
and $E(C(v)) \not\supset A$. このとき, $u \neq v$ in $C(A)$. Involution
のおかげで知られた性質により

$\exists z \in I(C(A))$ s.t. $[z, u] = [z, v] = 1$.
 $E(C(z)) \supset A$ ならば $z = z$, $a = 1$ とおければいい. また
 $E(C(z)) \not\supset A$ ならば $z = u$, $a = z$ とおければいい.

Step 2. Lemma 1 (i) により

$\exists K = E(C(a))$ の成分 s.t. $K \neq K^t$, $A = C_{KK^t}(t)$.
このとき, $K \in \mathcal{L}^*$, $a \in K \vee K^t$ で K は #1 をみたす. かつ
また $m(C(a) \cap C(K)) \geq 2$.

(i) A は K の homomorphic image であるから $K \in \mathcal{L}^*$.
 $a \in K \vee K^t$ ならば, $a \in Z(K)$. このとき, K が定理 1 の
(ii) をみたすわけではない. K には (2) Lemma 1 (i) を apply し
て矛盾を得る. K が #1 をみたす. Lemma 3 により K が
定理 1 の (iii) をみたすことになる. したがって $\langle a \rangle \times K^t \subseteq$
 $C(t) \cap C(K)$ より $m(C(a) \cap C(K)) \geq 2$ となる.

Step 3. $m(K) = 1$

(i) $C(K) \cap C(a) \supseteq U = 4\text{-gp}$ となる.

Lemma 1 の (ii) と (*) により

$\exists n \in \bigcup^\# \Lambda, t \quad E(C(n)) \not\supset K, L \neq L^n, K = C_{LL^n}(n)'$
 がある。 $L \in \mathcal{L}^*$ ならば、 $m(C(K) \cap C(a)) > 2$
 ならば Lemma 1 の (ii) により L は (#) を満たし、Lemma
 3A により L は定理 1 の (ii) を満たすこととなる。

$$\therefore m(C(K) \cap C(a)) = 2.$$

$$\langle a \rangle \times K^t \subseteq C(K) \cap C(a) \text{ ならば, } 1 = m(K^t) = m(K).$$

Step 4. $I(Z(K)) \ni a$ とする。 $E(C(a)) \not\supset K$ ならば、
 $K =$ Lemma 1 (i) を apply (2.7) の (ii) を得るから、 $E(C(a))$
 $\not\supset K$ である。再び Lemma 1 (i) を用いる

$$\exists L = E(C(a)) \text{ の成分 } \Lambda, t \quad L \neq L^a, K = C_{LL^a}(a)'$$

$$\text{また } \langle a, t^t \rangle \subseteq C(a) \cap C(K), m(C(a) \cap C(K)) = 2 \text{ より}$$

$$a \in \langle a, t^t \rangle, \therefore a = at^t.$$

$$\text{よって (3) により } E(C(a)) \supseteq KK^t \text{ ならば}$$

$$E(C(a)) \supseteq KK^t \ni at^t \ni a$$

$$\therefore L = L^a$$

となり矛盾。(証明終)

上の Lemma 1~3 および定理 2 については, Aschbacher
の原論文 (A) を参照された。なお, (A) の主定理の重要
性については, 鈴木通夫 氏による雑誌「数学」1974 の解
説および五味健作氏による1975年代数学シンポジウム (於
札幌) の報告を参照された。