

Lie 代数の包絡代数の正元

山形大学 理学部

中里 博

(Hiroshi Nakazato)

§1. 正定値多項式に関する Hilbert の定理

1888 年に, D. Hilbert は, 次のような定理を証明した. (cf [1])

Theorem. 二変数の実係数の 6 次多項式 $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ で,

i) “ $f(x, y) \geq 0$ for $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ”

かつ ii) “ f を (高々 3 次の) 有限個

の実係数多項式 $f_1, f_2, \dots, f_m$ の平方

の和 $\sum_{j=1}^m f_j^2$ の形に表すことができる

ない ” と なるものが存在する. //

1960 年代に, Motkin により,

多項式 $f(X, Y) = X^4 Y^2 + X^2 Y^4 + 1 - 3X^2 Y^2$

が「上記のような性質をもつ多項式」
 になってゐることを「示された」。

$$P \equiv \left\{ f \in \mathbb{R}[X, Y] : f = \sum_{j=1}^m f_j^2 \right. \\ \left. \text{for some } f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{R}[X, Y] \right\}$$

$$\widetilde{P} \equiv \left\{ f \in \mathbb{R}[X, Y] : f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

により $\mathbb{R}[X, Y]$ の二つの positive cone

$P \subset \widetilde{P}$ を定めるとき, Hilbert の定理
 より, $\exists f \in \widetilde{P}, \deg(f) = 6$ s.t. $f \notin P$.

また, C. Berg のように, 凸錐 P の
 次のような特徴づけがなされてゐる。

$P = \left\{ f \in \mathbb{R}[X, Y] : \mathbb{R}[X, Y] \text{ の線形
 汎関数 } \varphi \text{ で, } \varphi(h^2) \geq 0 \text{ for } \forall h \in \mathbb{R}[X, Y] \right.$
 となるような任意のものに対して, $\varphi(f) \geq 0 \left. \right\}$

$= \left\{ f \in \mathbb{C}[X, Y] : \mathbb{C}[X, Y] \text{ の任意の
 unbounded } * \text{-representation } \{\pi, H, \mathcal{D}\}, \right.$
 但し $\mathcal{D}$ は, $\pi(h)$ の定義域 ($\forall h \in \mathbb{C}[X, Y]$),
 に対して, $(\pi(f)\xi, \xi) \geq 0 \ \forall \xi \in \mathcal{D} \subset H \left. \right\}$
 であり, Hilbert により, “ $f \in \widetilde{P}$,

$\deg(f) \leq 4 \Rightarrow f \in P$ ” となる
 ことも証明されてゐる。

さて, Motkin の多項式 の 三変数での
アナロジー である 次のような 4次多項式

$$f(X, Y, Z) = X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 + 1 - 4XYZ$$

に対して $f(x, y, z) \geq 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

であって, f を 実係数多項式の平方和として
表すことが できなれども 証明される.

一方, 一変数の多項式 $f \in \mathbb{R}[X]$ に対し
ては, " $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists g \in \mathbb{C}[X]$

$f(X) = \overline{g(X)} \cdot g(X)$ " となることが代数学
基本定理よりわかる.

§2. K. Schmüdgen による Hilbert の定理
の Lie 代数への一般化.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元 Lie 代数,
 $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の 普遍包絡代数の複素
化 とする. ここで, $\mathbb{C}$ 上の結合代数 $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$
における 対合 $*$ (involutive anti-
automorphism) を, $X^* = -X$
($\forall X \in \mathfrak{g}$) により定める.

ここで, $X^* = X \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$ ではなく,
 $X^* = -X \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$ と定めるのは,

" $\mathfrak{g}$ が Lie 群 G の Lie 代数であって,
 $\{\pi, H\}$ が G のユニタリ表現である
 とき, $(d\pi)(X) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{\pi(\exp tX) - I\}$
 により, $\mathfrak{g}$ の表現 $(X \in \mathfrak{g})$

$d\pi : (d\pi)([X, Y]) = d\pi(X) d\pi(Y) - d\pi(Y) d\pi(X)$
 を定めるとき, $(d\pi)(X)$ が, (essentially)
 skew-adjoint operator となることに,
 $U(\mathfrak{g})^c$ の $*$ -構造を適合させるためである.

さて, G を連結 Lie 群とし, $\mathfrak{g}$ をその
 Lie 代数とする. ここで, 次のような, $U(\mathfrak{g})^c$
 の二つの positive cone $P(U(\mathfrak{g})^c)$ と
 $\widetilde{P}(G)$ について考えよう.

$$P(U(\mathfrak{g})^c) \equiv \left\{ \sum_{j=1}^m D_j^* \cdot D_j : \right.$$

$$D_j \in U(\mathfrak{g})^c \quad (j=1, 2, \dots, m, m=1, 2, 3, \dots) \Big\}$$

$\overline{(*)} \left\{ D \in U(\mathfrak{g})^c : U(\mathfrak{g})^c \text{ の任意の} \right.$
 unbounded $*$ -representation $\{\pi, H, \mathcal{D}\}$
 に對して, $(\pi(D) \xi, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{D} \Big\}$
 但し, $P(U(\mathfrak{g})^c)$ の $(*)$ のような特徴づ
 けは, Schmüdgen によるものである.

$\tilde{P}(G) \equiv \{ D \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} : G \text{ の任意の} \\ \text{ユニタリ表現 } \{\pi, H\} \text{ の微分表現} \\ d\pi \text{ に対して得られる } U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \text{ の } * \text{-表現 } d\pi \\ \text{に対して, } ((d\pi)(D)\xi, \xi) \geq 0$

for $\forall \xi \in C_{\infty}^{\infty} \subset H \}$ $\equiv P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$

但し, C_{∞}^{∞} は, 任意の $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ に対して $d\pi(X_1 X_2 \dots X_n)$ の定義域に含まれるような H の元全体から成る H の稠密な線形部分空間とする.

1978年に, K. Schmüdgen は, 前記の Hilbert の定理の一般化である次のような定理を証明した.

Theorem. [K. Schmüdgen] (cf. [4] [5])

1°) G を $\mathbb{R}^1$ と同型でなれ連続 Lie 群とすれば, $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の高々 6 階の元 $D = D^*$ で $D \in \tilde{P}(G)$ かつ $D \notin P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ となるものが存在する.

2°) G が, $\mathbb{T}^1$ と同型な閉部分群を含むような Lie 群であるならば,

$\exists D = D^* \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}, \text{ st.}$

$$\deg(D) = 2, \quad D \in \tilde{P}(G), \quad D \notin P(U(\mathfrak{g})^c).$$

特に, G が単連結ではない Lie 群のとき,
 及び, G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Levi 部分代数
 ($\mathfrak{g}$ の半単純部分) が, $SL(2:R)$ と同型
 でない直和因子を含むとき, $\exists D \in U(\mathfrak{g})^c$,
 s.t. $\deg(D) = 2, \quad D \in \tilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^c).$

3°) G が $SL(2:R)$ の普遍被覆群
 であるとき, $\mathfrak{g} = SL(2:R)$ の基底

$$\{X_0, X_1, X_2\} \quad \text{を} \quad [X_0, X_1] = X_2, \quad [X_0, X_2] = -X_1, \\ [X_1, X_2] = -X_0 \quad \text{と取るとき,}$$

$$D := (-X_1^2 - X_2^2 + iX_0)(-X_1^2 - X_2^2 - iX_0)$$

により, $U(\mathfrak{g})^c$ の 4 階の元 D を定めれば,

$$D \in \tilde{P}(G) \quad \text{かつ} \quad D \notin P(U(\mathfrak{g})^c) \quad //$$

§3. Schmüdgen の定理の改良.

G を連結な Lie 群とし, $D \in U(\mathfrak{g})^c$
 で, $D \in \tilde{P}(G)$ かつ $D \notin P(U(\mathfrak{g})^c)$
 となる D の階数 $\deg(D)$ の最小値
 を $\nu(G)$ と表す.

(目標) 任意の連結 Lie 群 G に対し,
 G の一つの不変量である $\nu(G)$ を決定する.

まず, " $D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $D \in \widetilde{P}(G) \Rightarrow D = D^*$ "
 及び " $D = D^* \in \widetilde{P}(G) \Rightarrow D$ の
 階数は、偶数" が成り立つ.

特に 後者は, G の $L^2(G)$ における
 正則表現 R の微分表現 dR を
 $D = D^*$ かつ D の階数が奇数であるよう
 なものに適用することによりわかる.

このこと及び, Schmüdgen の定理より

$$\begin{cases} \text{i) } G \neq \mathbb{R}^1 \Rightarrow \nu(G) = 2 \text{ または } \nu(G) = 4 \\ \text{または } \nu(G) = 6 \\ \text{ii) } G = \mathbb{R}^1 \Rightarrow \nu(G) = +\infty \end{cases} \text{ となる.}$$

また, 単連結な可換 Lie 群 n に対しては,
 Hilbert の定理 等により, 次のことがわかる.

$$\begin{cases} \text{i) } \nu(\mathbb{R}^1) = +\infty \\ \text{ii) } \nu(\mathbb{R}^2) = 6 \\ \text{iii) } \nu(\mathbb{R}^n) = 4 \quad \text{for } n \geq 3. \end{cases}$$

さらに, Schmüdgen の結果に 先行して, 1970 年
 に, Woronowicz は, 3次元 Heisenberg 群 G
 に対し, 2つの基底 $\{X, Y, Z\}$ を $[X, Y] = Z$
 $[X, Z] = [Y, Z] = 0$ と取るとき, $D = (-X^2 - Y^2 + iZ) \cdot$
 $\cdot (-X^2 - Y^2)$ に対して $D \in \widetilde{P}(G) \setminus P(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^c)$

となることを示している. (cf. [2])

さて, 次のような結果が得られた

Theorem. G を連結 Lie 群とする

1°) $G \not\cong \mathbb{R}^1$ かつ $G \not\cong \mathbb{R}^2$ ならば

$$V(G) = 2 \quad \text{または} \quad V(G) = 4.$$

2°) $\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$ を $SL(2; \mathbb{R})$ の普遍被覆群

とし, $D \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

$$D \equiv -X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - 8iX_3,$$

$$-\alpha = \inf \{ (d\pi)(D)\xi, \xi) : \xi \in \mathbb{C}^\infty_\pi, \\ \|\xi\| = 1, \pi \in \widehat{SL(2; \mathbb{R})} \}$$

により定めるとき, $D + dI \in \widetilde{P}(\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}) \setminus P(\mathfrak{U}(\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}))$ となる.

また, 2°) より,

3°) $V(G) \geq 4$ ならば, G は単連結な可解 Lie 群である.

さらに, 4°) $V(G) \geq 4$ ならば, G は

exponential 型の単連結な可解 Lie 群

である. 即ち 各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}^0}(X) : \mathfrak{g}^0 \longrightarrow \mathfrak{g}^0 \quad \text{は} \quad \{\sqrt{-1}\lambda : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$$

に含まれるような固有値をもたない。

5°) G が、中零 Lie 群のとき、

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \neq \{0\} \quad \text{ならば,}$$

$$V(G) = 2 \quad \text{となる.}$$

6°) 次のような基底をもつ、三系列に属する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を λ の Lie 代数とする単連結な Lie 群 G に対しては、

$$V(G) = 4 \quad \text{となる.}$$

i) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{T, X_1, X_2, \dots, X_n, Z_1, \dots, Z_m\}$
 $(1 \leq n, \quad 0 \leq m)$

$$[T, X_j] = X_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$[T, Z_k] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$$[X_j, X_{j'}] = [Z_k, Z_{k'}] = [X_j, Z_k] = 0$$

$$(1 \leq j, j' \leq n, \quad 1 \leq k, k' \leq m)$$

ii) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z, U_1, U_2, \dots, U_m\}$
 $(1 \leq n, \quad 0 \leq m)$

$$[X_j, Y_j] = Z \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$[X_j, X_{j'}] = [Y_j, Y_{j'}] = 0 \quad (1 \leq j, j' \leq n)$$

$$[X_j, Y_{j'}] = 0 \quad (1 \leq j \neq j' \leq n)$$

$$[X_j, U_k] = [Y_j, U_k] = [Z, U_k] = 0$$

$$(1 \leq j \leq n), \quad [X_j, Z] = [Y_j, Z] = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

Theorem [R. P. Langlands] (cf. [3])

G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を その Lie 代数 とする.

$D = D^*$ を $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の $2m$ 階 ($m \in \mathbb{N}$) の元 とし, $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ に関する

$U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の Poincaré-Birkhoff-Witt 基底

$\{X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n} : 0 \leq i_1, i_2, \dots, i_n\}$ による

D の 表示 を

$$D = \sum_{k=0}^{2m} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$$

とする. このとき, 条件 :

$$(3.1) \quad 0 < \exists \rho < \infty \text{ s.t. } (-1)^m \operatorname{Re} \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=2m} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n} \right) \\ \geq \rho (s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)^m \\ \text{for } (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

が 成り立つ ならば, $-\infty < \exists L < \infty$ s.t.
 G の 任意の 連続 unitary 表現 $\{\pi, H\}$ へ
 対して, $(d\pi(D)\varphi, \varphi) \geq L(\varphi, \varphi)$.

($\forall \varphi \in C_c^\infty$)

然, G の 既約な unitary 表現 $\{\pi_0, H_0\}$
 及び, π_0 の analytic vector $\varphi_0 \in H_0$ へ

$$\|\varphi_0\| = 1$$

かつ

$$(3.2) \quad (d\pi_0(D)\varphi_0, \varphi_0) = \inf \{ (d\pi(D)\varphi, \varphi) :$$

$\pi \in \widehat{G}, \varphi \in H_\pi, \|\varphi\| = 1 \}$ となるものが
 存在 する. //

この定理より, $D = \sum_{j=1}^m D_j^* \cdot D_j$ のとき,

上記のような $\{\pi_0, \varphi_0\}$ に対して

$$(3.3) \quad d\pi_0(D_j)\varphi_0 = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

となることがわかる.

定理の 2°) の証明

一般に次のことが言える

Proposition. $\mathcal{A} = S[(2; \mathbb{R})]$ とし, $\mathcal{A}$ の基底 $\{X_0, X_1, X_2\}$ ($[X_0, X_1] = X_2, [X_0, X_2] = -X_1, [X_1, X_2] = -X_0$) を取る. このとき, 任意の

狭義正定値実対称行列 $\{a_{i,j}\}_{0 \leq i,j \leq 2}$ に

対し, $D = \sum_{i,j=0}^2 a_{i,j} X_i X_j$ と定めれば,

$\mathcal{A}$ の自己同型写像 σ で

$$\sigma(D) = \sum_{i,j=0}^2 a_{i,j} \sigma(X_i) \sigma(X_j)$$

$$= \lambda X_0^2 + \mu(X_1^2 + X_2^2) + b(X_0 X_1 + X_1 X_0)$$

for some $\lambda > 0, \mu > 0, b \in \mathbb{R}$

となるものが存在する. //

この命題は, 上記のような D に対して,

$$\text{ad}_{\psi(\mathcal{A})}(X)(D) = \sum_{i,j=0}^2 a_{i,j} (X X_i X_j - X_i X_j X)$$

$$= X Y + Y X \quad \text{for some } Y \in \mathcal{A}$$

となるような $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$ が存在する
ことを用いて, 証明される。

また, $D = - \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} X_i X_j + \sqrt{-1} \sum_{j=0}^2 b_j X_j$
($\{a_{ij}\}_{0 \leq i,j \leq 2}$ は, 狭義正定値実対称行列,
 $b_j \in \mathbb{R}$) に対し, $G = \widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$ の既約
unitary 表現 π_0 及び, analytic vector ξ_0
($\|\xi_0\| = 1$) を (3.2) の如く取り, $-d$
 $= (d\pi_0(D)\xi_0, \xi_0)$ と置く。ここで,

$$D + dI = \sum_{j=1}^m (V_j + C_j I)^* (V_j + C_j I)$$

($V_j \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $C_j \in \mathbb{C}$) と仮定すれば, (3.3)
より, $d\pi_0(V_j)(\xi_0) = -C_j \xi_0$ ($1 \leq j \leq m$)

となる。従って, $V_1, V_2, \dots, V_m$ から生成される
 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分 Lie 代数を $\mathcal{B}$ とすれば,

$V_j \longmapsto -C_j$ ($1 \leq j \leq m$) は $\mathcal{B}$ の一次元
表現に拡大される。更に, $d\pi_0$ が, $\mathfrak{g}$ の
non-trivial 表現 ならば, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の単純性より
 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B} \leq 2$ となる。一方 $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 2}$ が
狭義正定値であることより, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B} \geq 2$
となる。定理の 2°) の例の如く D を取って
おけば, π_0 は, non-trivial 表現 となる。

このような場合, $\mathcal{B}$ は, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の 2次元部分 Lie 代数,

従って, 必然的に, Borel 部分代数 (極大可解部分代数) となる. ここで, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Borel 部分代数 B の non-zero の 1次元表現が,

$G = \widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$ の non trivial 表現の微分表現に拡大できるは, $B = \mathbb{C} \tilde{X}_0 + \mathbb{C}(\tilde{X}_1 + \varepsilon \sqrt{-1} \tilde{X}_2)$

の場合のみである. 但し $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \mathfrak{g}$,

$$[\tilde{X}_0, \tilde{X}_1] = \tilde{X}_2, [\tilde{X}_0, \tilde{X}_2] = -\tilde{X}_1, [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = -\tilde{X}_0,$$

$\varepsilon = \pm 1$. さしに, L. Pukansky の G の既約 unitary 表現の分類を用いることにより,

$$-\left[\lambda \tilde{X}_0^2 + \mu (\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2)\right] + \sqrt{-1} (b_0 \tilde{X}_0 + b_1 \tilde{X}_1 + b_2 \tilde{X}_2) + \alpha I \\ = \sum_{j=1}^m D_j^* \cdot D_j \quad (\lambda > 0, \mu > 0, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

ならば, $b_1 = b_2 = 0$ となることが言える.

このことより, 定理の 2° の $D + \alpha I$ が, $\sum_{j=1}^m D_j^* \cdot D_j$ と表わせなれことがわかる.

定理の 1°), 4°), 5°) の証明

まず, $\mathfrak{g}$ が, 中零 Lie 代数であって, $\exists X, \exists Y, \exists Z \in \mathfrak{g}$ st $[X, [Y, Z]] \neq 0$ ならば, $\exists X, \exists Y \in \mathfrak{g}$ $[X, [X, Y]] \neq 0$ となることが言え, さしに,

$\mathfrak{g}$ は, 次のような基底をもつ Lie 代数 $\mathfrak{g}_4$, または $\mathfrak{g}_{5,4}$ と同型な部分代数をもつ.

$\mathfrak{g}_4$: 基底 $\{T, X, Y, Z\}$: $\{X, Y, Z\}$ は互いに可換, $[T, X] = Y$, $[T, Y] = Z$, $[T, Z] = 0$.

$\mathfrak{g}_{5,4}$: 基底 $\{T, X, Y, Z_1, Z_2\}$: $\{Y, Z_1, Z_2\}$ は互いに可換, $[T, X] = Y$, $[T, Y] = Z_1$, $[T, Z_1] = 0$, $[X, Y] = Z_2$, $[X, Z_1] = [X, Z_2] = 0$.

また, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ ($\dim \mathfrak{g} \geq 3$) が $\mathbb{R}^3$ も, $aX + b$ 群の Lie 代数 も 3次元の Heisenberg 型の Lie 代数 も, その部分代数 $\mathfrak{e}$ として含まれないならば, $\mathfrak{g}$ は, 次のような Lie 代数を部分 Lie 代数 $\mathfrak{e}$ として含む.

(3.4) $\mathfrak{g}_1$: $\mathfrak{g}_1$ の基底 $\{T, X, Y\}$, $[X, Y] = 0$,
 $[T, X] = \alpha X + Y$, $[T, Y] = -X + \alpha Y$
 $(\alpha \in \mathbb{R})$.

さらに, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, " $\exists X \in \mathfrak{g}$ st. $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X): \mathfrak{g}^{\mathfrak{e}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathfrak{e}}$ の固有値の少なくとも一つは, $\{\sqrt{-1}\lambda : \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ に属する" ならば, $\mathfrak{g}$ は, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_{5,4}$ または次のような Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ または $\mathfrak{g}_2$ と同型な部分代数をもつ.

(3.4)' $\mathfrak{g}_1$: $\mathfrak{g}_1$ の基底 $\{T, X, Y\}$, $[X, Y] = 0$,

$$[T, X] = Y, \quad [T, Y] = -X$$

(3.5) $\mathfrak{g}_2$: $\mathfrak{g}_2$ の基底 $\{T, X, Y, Z\}$, Z は $\mathfrak{g}_2$ の中心元. $[T, X] = Y, [T, Y] = -X, [X, Y] = Z$.

さて, $aX+b$ 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{T, X\}$ を $[T, X] = X$ と取り, $U(\mathfrak{g})^c$ の 4 階の元 D を

$$D = \left(-\frac{1}{4} T^2 - X^2 - 2iX + \frac{9}{16} I \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} T^2 - X^2 - 2iX + \frac{1}{16} I \right)$$

により定めるとき, $D \in \tilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^c)$.

また, 次のような単連結な可解 Lie 群 G に対し D_0 を下記のように定めるとき, $D_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^c)$ となる. 但し, $\tilde{\alpha}$ は, D_0 に依存する定数, $\tilde{\alpha} > 0$.

$$D_{\tilde{\alpha}} = D_0 + \tilde{\alpha} I.$$

$$\mathfrak{g}_{5,4} : D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2 + Z_1^2 + Z_2^2) + 4iZ_1 + 4iZ_2$$

$$\mathfrak{g}_4 : D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2) + 4iZ$$

(3.4) の $\mathfrak{g}$, $\alpha \neq 0$ の場合, ($\alpha > 0$ と仮定する)

$$D_0 = -\alpha^{-2} T^2 - (X^2 + Y^2) + 3i \exp(2\alpha + 2\alpha^{-1}) \cdot (\alpha^{-1} + e^{3\alpha}) X$$

$$(3.4)' の \mathfrak{g}_1 : D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2) + 9iX$$

$$(3.5) の \mathfrak{g}_2 : D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2) + 9iY + 12iZ.$$

定理の 6°) の証明: $\tilde{P}(G)$ に属する任意の
2 階の元 D を, $U(2)^C$ の $*$ -自己同型により
標準化することにより証明できる.

(cf. i) で, $n=1$, $m=0$ の場合.

$$-T^2 - X^2 - 2iX + \frac{1}{4}I = (T + iX - \frac{1}{2}I)^*(T + iX - \frac{1}{2}I)$$

となるから, [4], Schmüdgen の掲げている例は, 誤りである.)

References.

- [1] D. Hilbert. "Über die Darstellung
definiter Formen als Summe von
Formenquadraten" Math. Ann. (1888) ^{Bd. 32} pp 342-350.
- [2] P. E. T. Jorgensen, R. T. Powers "Positive
Elements in the Algebra of the Quantum Moment
Problem", 1990.
- [3] R. P. Langlands. "Semi-groups and
Representations of Lie groups". thesis. Yale Univ. 1960.
- [4] K. Schmüdgen. "Positive Cones in Enveloping
Algebras". Reports on Math. Phys. (1978) ^{vol. 14} pp 385-404
- [5] K. Schmüdgen. "Ein positives Element der
einhüllenden Algebra der $SL(2; \mathbb{R})$, das keine
Quadratsumme ist" Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. (1978)