

Countable spectrum をもつ 測度 について

神奈川大 工 泉池敬司

北大 応電研 清水誓宏

G を L.C.A. group とし $\hat{G}$ の dual group を $\hat{G}$ とする。 $M(G)$ を G 上の bounded regular Borel measure よりなる, convolution multiplication, total variation norm による Banach algebra とする。 $L^1(G)$ は G 上の Haar measure に絶対連続な bounded measure よりなる group algebra とする。 Taylor [5] により, $M(G)$ の maximal ideal space はある compact abelian semigroup S 上の semicharacter $\hat{S}$ と 1 対 1 の対応があり, $M(G)$ は $M(S)$ に weak* dense にうめ込まれている。 $\mu \in M(G)$ の Gelfand 変換は $\hat{\mu}(f) = \int f d\mu$ ($f \in \hat{S}$) で与えられる。 今後 $\hat{S}$ を $M(G)$ の maximal ideal space とする。 $Sp(\mu) = \{\hat{\mu}(f) : f \in \hat{S}\}$ を $\mu \in M(G)$ の spectrum と呼ぶ。 $M(G)$ の idempotent に関する次は次の定理はよく知られている。

Cohen の idempotent 定理 ([3])

$$\mu \in M(G) \text{ が idempotent} \Rightarrow \mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i} m_{H_i}, \quad \text{ここで } x_i \in \hat{G},$$

m_{H_i} は compact subgroup H_i 上の normalized Haar measure,
 a_i は整数。

Shilov の idempotent 定理 ([2])

$\hat{S} \cap E$ は open, compact subset

$\Rightarrow \eta \in M(G)$ が存在して, $\hat{\eta} = 1$ on E , $\hat{\eta} = 0$ on E^c である。

μ が idempotent ならば $Sp(\mu) = \{0, 1\}$ である。又 $Sp(\mu)$ が finite set ならば Cohen と Shilov の定理より
 $\mu = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{x_j} m_{H_j}$ と表わせる。このことは $Sp(\mu)$ が finite set になる μ は完全にわかってゐる。ここでは、我々は $Sp(\mu)$ が countable set であるものを考える。一つは G の L.C.A. group としての構造とどの様に関係しているか捕えることである。もう一つは $M(G)$ の中での様な性質を持っているかである。

用いる記号

$$M_0(G) \equiv \{ \mu \in M(G); \hat{\mu}(x_n) \rightarrow 0 \text{ if } x_n \in G, x_n \rightarrow \infty \text{ in } G \}$$

$$M_c(G) \equiv \{ \mu \in M(G); \mu \text{ is continuous measure} \}$$

$$\text{Rad } L(G) \equiv \{ \mu \in M(G); \hat{\mu}(t) = 0 \ \forall t \in \hat{S} \setminus \hat{G} \}$$

$$\mu \in M(G) \mapsto \hat{\mu}^*(E) \equiv \overline{\hat{\mu}(-E)}, \ E \text{ is } G \text{ of Borel subset.}$$

$$\mathcal{M}^s \equiv \{ \mu \in M(G); \hat{\mu}^*(t) = \overline{\hat{\mu}(t)} \ \forall t \in \hat{S} \} \text{ symmetric measures の集合}$$

$$\mu \in M(G) \mapsto L(\mu) \equiv \{ \lambda \in M(G); \lambda \ll \mu \}$$

$\mathcal{L}(G) \equiv \sum \mathcal{L}'(G_2)$, ここで $\sum$ は G 上の τ の topology より強い L.C.A. group topology で全体を動く。 G_2 はこの τ であり、 τ は L.C.A. group を表わす。

$A(G) \equiv \{\mu \in M(G); Sp(\mu) \text{ は countable set}\}.$

§ 1. $Rad \mathcal{L}'(G), M_0(G), M_c(G), \mathcal{M}$ と $A(G)$ の関係と G の構造。

M. Zafran [6] は次の事を示した。

定理 (Zafran) G は compact abelian group, $\mu \in M_0(G)$,
 $Sp(\mu) = \hat{\mu}(\hat{G}) \Rightarrow \mu \in Rad \mathcal{L}'(G)$

ここで μ を定理の仮定を満たすものとするとき、 $\mu \in A(G)$ である。まずこの定理の拡張から始める。

定理 1. $A(G) \cap M_0(G) \subset Rad \mathcal{L}'(G)$ 。

(証明) $\mu \in A(G) \cap M_0(G)$ かつ $\mu \notin Rad \mathcal{L}'(G)$ とする。 $h \in \hat{S} \setminus \hat{G}$ が存在して $\hat{\mu}(h) \neq 0$ と出来る。 $\mu \in A(G)$ より $|\hat{\mu}(h)| > \varepsilon > 0$ に対して $E = \{f \in \hat{S}; |\hat{\mu}(f)| \geq \varepsilon\}$ は $\hat{S}$ で open compact になっている。 Shilov の定理より $\eta \in M(G)$ で $\hat{\eta} = 1$ on E , $\hat{\eta} = 0$ on E^c とできる。 $\mu \in M_0(G)$ より $E \cap \hat{G}$ は $\hat{G}$ の中で compact である。よって $\eta \in \mathcal{L}'(G)$ 。しかし $\hat{\eta}(h) \neq 0$ より $\eta \in Rad \mathcal{L}'(G)$ 。矛盾。

(注) 実はもう少し強い型で、 $\mu \in A(G)$ に対して $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \in M_0(G)$, $\mu_2 \perp M_0(G)$ とする時 $\mu_1 \in A(G)$ が証明される。

命題 2. 次は同値である。

$$1) A(G) \cap M_0(G) = \text{Rad } L'(G).$$

$$2) \text{Rad } L'(G) \subset A(G)$$

$$3) G: \text{compact}$$

(証明) 1) $\Rightarrow$ 2), 3) $\Rightarrow$ 1) は明らか。2) $\Rightarrow$ 3), G は $\mathbb{R}^m \times H$ (H は compact subgroup) なる open subgroup を持つ。 $n \neq 0$ ならば 2) に矛盾する。故に $n = 0$, つまり G は compact open subgroup H を持つ。 G/H が finite group であることを示せばよい。もし G/H が infinite discrete group であるならば, $\hat{\mu}(\widehat{G/H})$ が uncountable set になる $\mu \in M(G/H)$ が存在するから, $L'(G)$ に uncountable spectrum を持つ measure が存在する。よって $\text{Rad } L'(G) \subset A(G)$ に矛盾する。よって G/H は finite group。故に G は compact。

次に $A(G) \cap M_c(G)$ について見ることにする。

命題 3. 次は同値。

$$1) A(G) \cap M_c(G) = \{0\}.$$

$$2) G \text{ は infinite compact subgroup を持たない。}$$

(証明) 1) $\Rightarrow$ 2) は明らか。2) $\Rightarrow$ 1) $A(G) \cap M_c(G) \ni \mu, \mu \neq 0$ とする。 $\varepsilon > 0$ として $E = \{f \in \hat{G} : |\hat{\mu}(f)| > \varepsilon\}$ が open compact になるものがある。 Shilov の定理より $\eta \in M(G)$, $\eta|_E = 1$, $\eta|_{E^c} = 0$ なるものがある。 Cohen の定理より $\eta = \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i m_{H_i}$ 。 かつ $\eta \in M_c(G)$ より H_i は infinite compact subgroup である。

2)に矛盾する。

命題4. 次は同値。

- 1) $A(G) \cap M_c(G) \subset M_o(G)$
- 2) $A(G) \cap M_c(G) \subset \text{Rad } L'(G)$
- 3) G の infinite compact subgroup は全て open。

(証明) 2) $\Rightarrow$ 1), 1) $\Rightarrow$ 3) は明らか。3) $\Rightarrow$ 2) 命題3の2) $\Rightarrow$ 1) の証明と同じくすればよい。 $\mu \in A(G) \cap M_c(G)$, $\mu \notin \text{Rad } L'(G)$ とするとある H_i は open ではない compact subgroup になることに注意すればよい。

系5. 次は同値。

- 1) $A(G) \cap M_c(G) = \text{Rad } L'(G)$
- 2) G は compact でその infinite compact subgroup は全て open。

(注) G が上の2)を満たすものは, $G = \mathbb{T} \oplus H$ 又は $G = \Delta(p^\infty) \oplus H$ (H は finite group) の時のみである。

次に $\mathcal{M}$ と $A(G)$ の関係を見る。所て $\mu \in M(G)$ が finite spectrum を持つならば Cohen の定理より $\mu \in L(G)$ である。又 $L(G) \subset \mathcal{M}$ はよく知られている事実である。そこで μ が countable spectrum を持つば, $\mu \in L(G)$ が成立するのとはどういふ問題が出てくるが実はこれは成立しない。([1], [4])。しかし $\mu \in \mathcal{M}$ であることは示すことが出来る。 $f \in \hat{S}$ に対して,

$M(G) \ni \mu \rightarrow \overline{\hat{\mu}^*}(t)$ は $\mathbb{C}$ complex homomorphism である。この homomorphism を f^* で表わす。 $\mu \in M(G)$ が symmetric であることは $\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}(f^*)$ ($\forall t \in \hat{S}$) と同値である。

定理 6. $A(G) \subset \mathcal{M}$.

(証明) $\mu \in A(G)$ とする。任意の $t \in \hat{S}$ に対して十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon = \{g \in \hat{S}; |\hat{\mu}(g) - \hat{\mu}(t)| < \varepsilon\}$ が open compact in $\hat{S}$ に存在する。Shilov の定理より $\eta \in M(G)$, $\hat{\eta} = 1$ on B_ε , $\hat{\eta} = 0$ on B_ε^c とできる。そして $\eta \in \mathcal{M}$ より $\hat{\eta}(t) = \hat{\eta}(f^*)$ ($\forall t \in \hat{S}$) である。よって $f^* \in B_\varepsilon$ 。 ε は十分小さく $\varepsilon < \varepsilon_0$ よりから $\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}(f^*)$ 。よって $\mu \in \mathcal{M}$ 。

§ 2. $A(G)$ と $L^1(\mu)$ 。

ここからは次の定理を示した。

定理 7. G を metrizable L.C.A. group, $\mu \in A(G)$, $\mu \geq 0$ とする。
もし $Sp(\mu)$ の集積点は存在して 0 のみ。

$\Rightarrow L^1(\mu) \subset A(G)$ 。

いくつかの補題を用意する。

補題 8. X : infinite discrete abelian group

$\mu \in A(X)$, $\mu \geq 0$, $\|\mu\|$ が $Sp(\mu)$ の isolated

$\Rightarrow \mu = \sum_{j=1}^n r_j \delta_{x_j}$, $r_j > 0$, $x_j \in X$ は finite order.

(証明略)

補題 9. $\mu \in M(G)$, $\mu \geq 0$, $\|\mu\|$ が $S_p(\mu)$ で isolated, $H \in G$ の open subgroup とする。

$$\Rightarrow \mu = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} * \lambda_i, \quad \text{ここで } x_i + H \text{ は } G/H \text{ で finite order,} \\ \lambda_i \in M(H)$$

証明は補題 8 より明らか。

補題 10. $G \supset H \in$ compact metrisable subgroup とする。

$$\mu = \sum_{j=1}^m \delta_{x_j} * \lambda_j, \quad x_j + H \text{ は } G/H \text{ で finite order, } \lambda_j \in M(H)$$

$\Rightarrow \hat{\mu}(\hat{G})$ は countable set.

(明らか)

[定理 7 の証明] $f \in \hat{S}$ に對して $\hat{\mu}(|f|) > 0$ とする。

$\hat{S}^+ = \{ |f| : f \in \hat{S} \}$ とするとき $\hat{\mu}(\hat{S}^+) \setminus \{0\} = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ とおく。

$\hat{\mu}(|f|) = a_n$ とする。仮定より $E_n = \{ f \in \hat{S} : \hat{\mu}(f) = a_n \}$ は

open compact である。Shilov の定理より idempotent η_n

で $\hat{\eta}_n = 1$ on E_n , $\hat{\eta}_n = 0$ on E_n^c なるものがある。 $\eta_n = \sum_{i=1}^m b_i \delta_{x_i} m_{H_i}$

とする。 K_n とし $m_{H_i}^{\wedge}(|f|) = 1$ となる H_i より generate

される compact subgroup とする。すると $f_n \in \hat{S}^+$, $f_n^2 = f_n$ が

存在して $f_n \leq |f|$, $|f_n \cdot f| = |f_n|$, $f_n \cdot f \in \hat{G}_{K_n}$ となる。こゝ

で $\hat{G}_{K_n}$ は K_n を open compact にする G に對して強い L.C.

A. group topology が備わったものを表す。又 $\hat{\mu}(f_n) = a_n$

でもある。よって $f_n = |f|$ a.e. μ である。そこで $\nu \ll \mu$ と

する。 $\hat{\nu}(f) = \hat{\nu}(f \cdot f_n) \in \mathcal{V}(\hat{G}_{K_n})$ 。よって

$\hat{\Delta}(\hat{G}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\Delta}(\hat{G}_{K_n}) \cup \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\Delta}_n(\hat{G}_{K_n}) \cup \{0\}$, 　　 $\hat{\Delta}_n$ は Δ の $M(G_{K_n})$ に含まれる部分とする。所て $\mu_n \ll \mu_n$ であり μ_n は $G = G_{K_n}$ とした時 補題 9 の条件を満たすから $\mu_n = \sum_{j=1}^m \delta_{x_j^{(n)}} * \lambda_j^{(n)}$ と書ける, $\lambda_j^{(n)} \in M(K_n)$, $x_j^{(n)} + K_n$ は G/K_n で finite order を持つ。補題 10 より $\hat{\Delta}_n(\hat{G}_{K_n})$ は countable set。故に $Sp(\Delta)$ は countable set である。

(註) 定理 7 において, metrizable の条件はなしでよいのかはまだわかっていない。しかし $\mu \geq 0$, $Sp(\mu)$ の集積点はあるもののみ, の条件はそれだけでは不十分でない。

§ 3. 一般には $A(G) \not\subseteq L(G)$ であるが, $\mu \in A(G)$ に対してある compact subgroup H に対して $\mu \in \text{Rad } L(H)$ になるための条件を最後に与える。

定理 11. G を compact metrizable abelian group とする。次は同値である。

- 1) $Sp(\lambda) \subseteq \hat{\Delta}(G) \cup \{0\} \quad \forall \lambda \in L^1(\mu)$
- 2) $Sp(\lambda) \subseteq \hat{\Delta}(G) \cup \{0\} \quad \forall \lambda \in L^1(\mu), \lambda \geq 0$
- 3) compact subgroup H があって $\mu \in \text{Rad } L(H)$

(証明略)

(註) metrizable の条件は必要である。

References

- [1] K. Izuchi, On a problem of J.L. Taylor, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975).
- [2] C.E. Rickert, General theory of Banach algebras, Van Nostrand 1960.
- [3] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience 1962.
- [4] T. Shimizu, Independent sets and measure algebras, to appear.
- [5] J.L. Taylor, Measure algebras, Regional conf. ser. Math. (AMS) 1973.
- [6] M. Zafran, On the spectra of multipliers, Pacific J. Math 47 (1973), 609-626.