

ここで, $\tau(\omega)$, $r(\omega)$ は $\{\tau_n\}$ の特性関数を用いて,

$$\langle e^{-i\omega\tau_n} \rangle \equiv e^{-i\omega\tau(\omega)-r(\omega)} \quad (4)$$

と定義し, $B(\omega)$ は

$$B(\omega) \equiv \frac{1}{\tau_c} \langle \int_0^{\tau_n} ds \hat{A}_n(s) e^{-i\omega s} \rangle \quad (5)$$

である, 又, (1)は対応して, $\omega_0 = 0$, $\phi_n = 0$ の場合を書き下した。 $\tau(\omega)$, $r(\omega)$ の関数形については [2, 3] で詳しく論じられている。

$\tau(\omega)$ と $r(\omega)$ を数値的に求め, それらを用いて, (3)を計算し, それを rescale したものが, 図3である。図2と比較して, b 依存性を含めて, この描像は間欠的カオスの本質をよく捕えていることが分る。

参考文献

- 1) B. C. So and H. Mori, Prog. Theor. Phys. 72 (1984), 1258.
- 2) B. C. So and H. Mori, "Asymptotic Shapes of Power Spectra of Intermittent Chaos near its Onset Point" (to be published in Physica D)
- 3) H. Mori, B. C. So and S. Kuroki, "Spectral Structure of Intermittent Chaos" (to be published in Physica D)

2次元ポアンカレ写像のスペクトル

九大・理 森 肇, 森田照光, 泰 浩起, 堀田武彦

カオスの確率論を決定論 (的運動方程式) から具体的に作れるかどうかは

- 1) 適当な粗視化を行ない,
- 2) 粗視変数の状態空間において, カオスの不変確率密度を定常解としてもつ, 統計物理的発展方程式を作れる,

かどうかにかかっていると思える。ここで, 統計物理的発展方程式とは, 熱平衡分布を定常解としてもつ, ボルツマン方程式やフォッカープランク方程式に相当するもので, その特徴は, 時間推進が平均化の演算子であり, 逆行不可能なものを意味する。

カオスの理論でよく登場する、逆行不能 (noninvertible) な 2 対 1 の一次元写像の FP 演算子 (Frobenius-Perron 演算子) は、そのような平均化の演算子である。しかし、ポアンカレ写像は、力学方程式の解の一意性により 1 対 1 の変換であり、逆行可能である。ポアンカレ写像は、力学系の、相空間における軌道の横断面上のプロットであるから、そこに概念上の困難はない。そこで、2 対 1 の一次元写像、または、それを拡張した統計物理的発展方程式を、1 対 1 のポアンカレ写像から出せるかどうかを考えよう。

簡単のため、Henon の 2 次元散逸写像や散逸標準写像のような、散逸力学系の 2 次元ポアンカレ写像を考える。その標準形を

$$x_{t+1} = F_1(x_t, y_t) = f(x_t) + bp(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = F_2(x_t, y_t) = g(x_t) + bq(x_t, y_t)$$

としよう。 b は、散逸系の体積縮小パラメーターで、 $b \rightarrow 0$ のとき、変換のヤコビアンは 0 に近づく。この極限では 2 対 1 の一次元写像 $x_{t+1} = f(x_t)$ が得られるが、この極限は特異的であり、問題は、 $b \neq 0$ のとき統計物理的発展方程式を求めることである。粗視化は、どんな物理量に着目するかに依存する。ここでは、 x_t の関数の時間相関関数

$$C_t \equiv \iint dx_0 dy_0 \hat{A}(x_t) \hat{B}(x_0) D^*(x_0, y_0)$$

を考えよう。 $D^*(x, y)$ は不変確率密度で、 $\hat{A}$ は A からその長時間平均値を差引いたものである。これは、単なる変形により

$$C_t = \int dx \hat{A}(x) P_t(x) \quad (1)$$

とかける。 $P^*(x) \equiv \int dy D^*(x, y)$ とすれば、 $P_0(x) = [1 + \hat{B}(x)] P^*(x)$ となり、問題は、 P_t の発展方程式を求めることである。こま、 $\varphi(y/x) \equiv D^*(x, y) / P^*(x)$ として、投影演算子

$$\mathcal{D}G(x, y) \equiv \varphi(y/x) \int dy' G(x, y') \quad (2)$$

を導入すれば、投影演算子法により

$$P_{t+1}(x) = \sum_{s=0}^t M_s P_{t-s}(x) \quad (3)$$

が得られる。ここで、 M_s は線形演算子

$$M_s G(x) \equiv \int dy \mathcal{L} (Q \mathcal{L})^s \varphi(y/x) G(x) \quad (4)$$

である。ここで、 $\mathcal{L}$ は力学の時間発展演算子

$$\mathcal{L} G(x, y) \equiv \iint dx' dy' \delta(x - F_1(x', y')) \delta(y - F_2(x', y')) G(x', y') \quad (5)$$

で、 $Q \equiv 1 - \mathcal{L}$ である。

パワースペクトルは、(1)のフーリエ変換

$$\begin{aligned} S(\omega) &\equiv C_0 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} C_t \cos(\omega t), \\ &= \int dx \hat{A}(x) U(\omega) \hat{B}(x) P^*(x) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (6)$$

によって与えられる。ここで、 $U(\omega)$ は

$$U(\omega) \equiv \frac{1}{1 - \exp(-i\omega) M(\omega)} - \frac{1}{2}, \quad (7)$$

$$M(\omega) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} M_s \exp(-i\omega s) \quad (8)$$

である。したがって、 $P^*(x)$ と $M(\omega)$ が具体的に求まれば2、2次元ポアンカレ写像のパワースペクトルと時間相関関数が計算できることになる。

$M(\omega)$ は、一次元写像 $x_{t+1} = f(x_t)$ のFP演算子 $\mathcal{M}$ を拡張した統計物理的発展演算子である。実際、(4)を b の巾級数に展開すれば、 s 次の記憶演算子 M_s は $O(b^s)$ であり、 M_0 の0次の項は $\mathcal{M}$ となる。 x のattracting領域 $\mathcal{Q}$ における直交関数系 $\Psi_l(x)$ を使って

$$\hat{B}(x) P^*(x) = \sum_l' b_l \Psi_l(x) \quad (9)$$

と展開すれば、 $S(\omega) = \sum_l' S_l(\omega)$,

$$\begin{aligned} S_l(\omega) &\simeq B_l \left[\frac{1}{1 - e^{-i\omega} \langle M(\omega) \rangle_l} - \frac{1}{2} \right] + \text{c.c.}, \\ \langle M(\omega) \rangle_l &\equiv \frac{\int dx \hat{A}(x) M(\omega) \Psi_l(x)}{\int dx \hat{A}(x) \Psi_l(x)} \end{aligned} \quad (10)$$

と近似できよう。 $\Psi_l(x)$ は、 $\mathcal{M}$ の定義域 $\mathcal{Q}_0$ では、 $\mathcal{M}$ の固有関数になるものとする。 $b=0$ のとき、 $\langle M(\omega) \rangle_l$ は $\mathcal{M}$ の固有値 ν_l に一致し、 $S_l(\omega)$ は一次元写像のパワースペクトルと一致する。

$P^*(x)$ と $\langle M(\omega) \rangle_l$ の計算法をLozi写像について確立し、Hénon写像と散逸標準写像のパワースペクトルを求め、2次元性の特徴や臨界現象の1次元性を解明したい。