

行列多項式の数域

Numerical Range of a Matrix Polynomial

中里 博 Hiroshi Nakazato

弘前大学理工学部 Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要

We discuss the numerical range of a matrix polynomial.

The main result of this paper was obtained by a joint work of Mao-Ting Chien and Hiroshi Nakazato.

1 行列多項式の定義

H 複素ヒルベルト空間とし、 H における有界線形作用素 $A_n, \dots, A_1, A_0$ (ただし $A_n \neq 0$) に対し、

$$P(\lambda) = \lambda^n A_n + \dots + \lambda A_1 + A_0$$

により作用素多項式 operator polynomial $P(\lambda)$ を定める。 H が有限次元の場合が、行列多項式 matrix polynomial である。この分野では、"Matrix Polynomials" という本が、I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman によって 1982 年に Academic Press より出版されている。二重振り子の問題、微分方程式への応用などがあると言われている。さて、行列多項式 $P(\lambda)$ の数域 $W(P)$ を、

$$\begin{aligned} W(P) &= \{t \in \mathbf{C} : \langle P(t)\xi, \xi \rangle = 0 \text{ for some } \xi \in H, \xi \neq 0\} \\ &= \{t \in \mathbf{C} : 0 \in W(P(t))\} \end{aligned}$$

で定める。

2 不定計量空間における数域などとの関連

$W(P)$ は、複素数平面の空でない閉集合である。 $0 \notin W(A_n)$ であることと、 $W(P)$ が、有界であることが同値 (Chi-Kwong Li, Rodman) であることが知られている。 $W(P)$ の連結成分の個数は、 $2n$ 個以下であり、特に $W(A_n) \setminus \{0\}$ が連結ならば、連結成分の個数は、 n 個以下である (Li-Rodman)。多項式の次数 $n = 1$ で、 A_1 が正定値 Hermite 行列の場合

$$W(\lambda A_1 - A_0) = W(\lambda I - A_1^{-1/2} A_0 A_1^{-1/2}) = W(A_1^{-1/2} A_0 A_1^{-1/2})$$

が成り立つ。このような数域を、一般化する形で、 $S = A_1$ を、可逆で、 S も $-S$ も正定値ではないような Hermite 行列とする。このとき、不定計量

$$[x, y]_S = \langle Sx, y \rangle$$

を用いて

$$W_S(B) = \{[Bx, x]/[x, x] : [x, x] \neq 0\}$$

が定義され、Krein 空間における数域と呼ばれる。

$$W_S^+(B) = \{[Bx, x]/[x, x] : [x, x] > 0\},$$

$$W_S^-(B) = \{[Bx, x]/[x, x] : [x, x] < 0\}$$

が問題とされることもある。ここで、

$$[Bx, x]/[x, x] = \langle SBx, x \rangle / \langle Sx, x \rangle$$

であることより、 $(0, 0) \notin W(S, SB)$ の場合、

$$W_S(B) = W(S - SB)$$

となる。さて、 $\dim H = m$ のとき、数域 $W(B) = W(\lambda I - B)$ は凸領域となるが、それは次のように与えられる。

$$f(x, y) = \det(I_m + (x/2)(B + B^*) + (-iy/2)(B - B^*)) = 0$$

の双対曲線を、 $g(x, y) = 0$ とするとき、 $W(B)$ は、集合

$$\{x + iy : (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x, y) = 0\}$$

の凸包である。 S が、不定の Hermite 行列の場合 $W(\lambda S - A_0)$ は、それ自体凸であるか、2 個の凸集合の和集合となる。 $W(\lambda S - A_0)$ の境界上の点 $x_0 + iy_0$ ただし $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ に対しては、 $\tilde{g}(x_0, y_0) = 0$ が成り立つ。ここで、 $\tilde{g}(x, y) = 0$ は、次のような代数曲線の双対曲線である。

$$\tilde{f}(x, y) = \det(S + (x/2)(A_0 + A_0^*) + (-iy/2)(A_0 - A_0^*)) = 0.$$

多項式の次数 $n = 1$ のとき, $0 \notin W(A_1)$ ならば, $W(A_1\lambda - A_0)$ が, 単連結 simply connected であると予想される。最近 Psarrakos 氏より, そのことを証明したとの話を聞いた。 $0 \in W(A_1)$ の場合は, 例えば

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $A_0 = I_2$ とするとき, $W(A_1\lambda - A_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| \geq 1\}$ となるから, これは単連結ではない。 $n = 2$ で, $m = \dim H = 2$ であって, $W(P)$ が連結かつ単連結ではない次のような例が, Psarrakos らによって構成されている:

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & 4i\lambda \\ -4i\lambda & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix},$$

に対し,

$$W(P) = R_1 \cup R_2,$$

$$R_1 = [-\sqrt{(13 + \sqrt{161})/2}, -\sqrt{(13 - \sqrt{161})/2}] \cup [\sqrt{(13 - \sqrt{161})/2}, \sqrt{(13 + \sqrt{161})/2}],$$

$$R_2 = \{x + iy : (x, y) \in \mathbf{R}^2, 32 - 47x^2 + 16x^4 - 48y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4 \leq 0\}.$$

ここで, R_1 は, 実多項式 $\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle$ の実根であって, R_2 は, この多項式の虚根およびその極限である。 R_2 は, 環状の開領域であってその境界は

$$\{x + iy : (x, y) \in \mathbf{R}^2, 32 - 47x^2 + 16x^4 - 48y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4 = 0\}.$$

により与えられる。

3 $\dim H = 2$ の場合 : 2次元球面上の関数としての行列多項式

ここで, H の次元が 2 の場合、即ち 2×2 行列の多項式の数域を考える場合、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が, $M_2(\mathbf{C})$ の基底であって, Hermite 行列

$$A = \begin{pmatrix} a+d & b+ic \\ b-ic & a-d \end{pmatrix}$$

($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) および

$$\xi = (\cos \theta, \sin \theta \exp(i\eta))^T$$

に対し、

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \xi \rangle &= a + d(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2b \sin \theta \cos \theta \cos \eta - 2c \sin \theta \cos \theta \sin \eta \\ &= a + d \cos(2\theta) + b \sin(2\theta) \cos(\eta) - c \sin(2\theta) \sin(\eta) \end{aligned}$$

となる。このように、複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$ の元と ξ をみて、

$$X = \sin(2\theta) \cos(\eta), Y = -\sin(2\theta) \sin(\eta), Z = \cos(2\theta)$$

と置けば、 $(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3$ に対し、 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ であって、 $\mathbf{CP}^1$ とこのような実 2 次元の単位球面を同一視でき、

$$\langle A\xi, \xi \rangle = a + bX + cY + dZ$$

となる。このような見方により、 2×2 行列多項式 $P(\lambda)$ に対し、 $\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle$ を、 λ および、 $(X, Y, Z) \in \mathbf{S}^2$ を変数とする関数とみることができる。

次数 $n=1$ の場合を特に考える。この場合、 $A_1 = I$ のとき、 $W(I - A_0) = W(A_0)$ である。同時数域 $W(A_1, A_0)$ が、 $(0, 0)$ を含めば $W(A_1\lambda - A_0) = \mathbf{C}$ となる。逆は成り立たない。 $(0, 0) \notin W(A_1, A_0)$ のとき、

$$W(\lambda A_1 - A_0) = \left\{ \frac{\langle A_0 \xi, \xi \rangle}{\langle A_1 \xi, \xi \rangle} : \xi \in \mathbf{C}^2, \|\xi\| = 1 \right\}$$

が成り立つ。 $(0, 0) \notin W(A_1, A_0)$ であって、 $W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ となる例としては、次のようなものがある：

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この場合

$$\left\{ \frac{X + iY}{Z} : (X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3, Z \neq 0, X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \right\} = \mathbf{C}$$

より、 $W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ が言える。 A_1 が、Hermite 行列のとき、 $W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ となるための必要十分条件は、 $(0, 0) \in W(A_1, A_0)$ 即ち $\xi \in \mathbf{C}^2$ で、 $\xi \neq 0$ かつ $\langle A_1 \xi, \xi \rangle = \langle$

$A_0\xi, \xi \geq 0$ となるものがあることが同値であることはわかっているが、一般にどのように $W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ を特徴づけるべきかは未解決である。

定理 (cf.[Ch-N]) $\dim H = 2, n = 1$ とする。領域 $W(A_1\lambda - A_0)$ が、 $\mathbf{C}$ とならないとき、その境界 Γ は、4 次以下の代数曲線上にある。その代数曲線は、既約ならば、有理曲線であるか楕円曲線である。特に A_1, A_0 に対し、

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & p \end{pmatrix}$$

ならば、 $W(A_1\lambda - A_0)$ の境界 Γ は、有理曲線である。すなわち、実数値のふたつの有理関数 $\phi(t), \psi(t)$ を用いて Γ は、 $\{(\phi(t), \psi(t)) : t \in \mathbf{R}\}$ と表示できる。

2×2 行列の多項式 $P(\lambda)$ の数域 $W(P)$ を求めるにあたって大抵の場合に有効である方法について述べる。先ほど述べた

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & 4i\lambda \\ -4i\lambda & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix},$$

の場合に内部を含む閉領域 R_2 の境界の方程式を求める方法を述べよう。

$$\xi = (\cos \theta, \sin \theta \exp(i\eta))^T$$

に対し、

$$X = \sin(2\theta) \cos(\eta), \quad Y = -\sin(2\theta) \sin(\eta), \quad Z = \cos(2\theta)$$

と置くと、上記の $P(\lambda)$ に対し

$$\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle = \lambda^2 + (3/2) + 4\lambda Y - (1/2)Z$$

であって、ここで、 $\lambda = U + iV$ と置けば、方程式 $\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle = 0$ は、

$$U^2 - V^2 + \frac{3}{2} + 4YU - \frac{1}{2}Z = 0, \quad (1)$$

$$2UV + 4YV = 2V(U + 2Y) = 0, \quad (2)$$

なる連立方程式で表わされる。ここで、(1) と $Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ から Y を消去して

$$8 + 12U^2 + 4U^4 - 12V^2 - 8U^2V^2 + 4V^4 + 48UY + 32U^3Y - 32UV^2Y + Y^2 + 64U^2Y^2 = 0, \quad (3)$$

が得られ、(2) において $V \neq 0$ として、 $U + 2Y = 0$ を (2)' とすれば、(2)' と (3) より、 Y を消去すれば、

$$32 - 47U^2 + 16U^4 - 48V^2 + 32U^2V^2 + 16V^4 = 0$$

が得られる。

この場合 $\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle = \lambda^2 + 4Y\lambda - (Z/2) + (3/2) = 0$ は、 λ に関する 2 次方程式だから解の公式より

$$\lambda = -2Y + \epsilon \sqrt{4Y^2 + (Z/2) - (3/2)}$$

($\epsilon = 1, -1$) であり、ここで $(Y, Z) \in \mathbf{R}^2, Y^2 + Z^2 \leq 1$ である。ここで根号の中味が ≥ 0 となるのは、 $(1 - \sqrt{161})/16 \leq Z \leq (1 + \sqrt{161})/16$ であって、 Y に対しては $Y \geq \sqrt{(3 - Z)/8}$ または $Y \leq -\sqrt{(3 - Z)/8}$ となるときである。このような Y, Z に対応する λ は実数であるが、上記のような (Y, Z) の集合が 2 つの連結集合から成るのに対応して 2 つの区間からなる。 (Y, Z) を、 $(-Y, Z)$ で置き換えることにより、2 個の区間はもう一方を、 -1 倍したものであることがわかる。区間の端点は、 $Y^2 + Z^2 = 1$ なる (Y, Z) で実現される。一方の区間の上端（最大値）は $\lambda = \sqrt{(13 + \sqrt{161})/2}$ で、下端は、 $\sqrt{(13 - \sqrt{161})/2}$ である。

さて、2 次の多項式の別の例

$$P(\lambda) = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 - 5i & (2 - 3i) + i(4 - 3i) \\ (2 - 3i) - i(4 - 3i) & 1 - 5i \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 6 + 6i & (3 - i) + i(-2 + 5i) \\ (3 - i) - i(-2 + 5i) & 6 + 4i \end{pmatrix}.$$

を考えよう。上記のような ξ および X, Y, Z に対して、 $\lambda = U + iV$ とすると、 $\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle = 0$ は、

$$\lambda^2 + \lambda \{(2 - 5i) + (2 - 3i)X + (4 - 3i)Y + Z\} + (6 + 5i) + (3 - i)X + (-2 + 5i)Y + iZ = 0,$$

即ち次のような連立方程式で表わされる。

$$U^2 - V^2 + (2X + 4Y + Z + 2)U + (3X + 3Y + 5)V + (3X - 2Y + 6) = 0, \quad (\#)$$

$$2UV + (-3X - 3Y - 5)U + (2X + 4Y + Z + 2)V + (-X + 5Y + Z + 5) = 0. \quad (b)$$

ここで、この連立方程式の各々の左辺は、 X, Y, Z に関しては 1 次式であることに注目し、この連立方程式を、 X, Y について解くことを考える。 (U, V) が、円 $6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13 = 0$ 上にないならば、

$$X = \frac{H_1(U, V : Z)}{6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13},$$

$$Y = \frac{H_2(U, V : Z)}{6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13},$$

と表わせる。ここで、

$$H_1(U, V : Z) = -40 + 38U - 19U^2 + 3U^3 - 38V - 4UV + 4U^2V - 9V^2 + 3UV^2 + 4V^3 - 2Z$$

$$-U Z + 3U^2 Z + V Z + 3V^2 Z,$$

$$H_2(U, V : Z) = -21 - 15U + 3U^2 - 3U^3 - 14V - 6UV - 2U^2V + 5V^2 - 3UV^2 - 2V^3 - 3Z \\ - 3UZ - 3U^2Z - 6VZ - 3V^2Z.$$

これらを $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$ に代入して、

$$k_2(U, V) Z^2 + k_1(U, V) Z + k_0(U, V)$$

という Z の 2 次式を作る。ここで、 $k_j(U, V)$ は、 U, V についての有理式であり、それを $(6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13)^2$ 倍したもの $K_j(U, V)$ は、多項式となる。これに対応する判別式 すなわち

$$K_1(U, V)^2 - 4K_2(U, V) K_0(U, V)$$

を因数分解すると、

$$-4(6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13)^2 H(U, V)$$

となる。ここで、 $H(U, V)$ は、次のような 6 次多項式である。

$$H(U, V) = 1895 - 2442U + 2971U^2 - 1684U^3 + 670U^4 - 132U^5 + 18U^6 + 2844V - 1928UV \\ + 670U^2V + 342U^3V - 164U^4V + 36U^5V + 964V^2 - 500UV^2 + 412U^2V^2 - 224U^3V^2 + 57U^4V^2 \\ - 66V^3 + 238UV^3 - 264U^2V^3 + 72U^3V^3 - 202V^4 - 92UV^4 + 60U^2V^4 - 100V^5 + 36UV^5 + 21V^6.$$

これが、多項式 $P(\lambda)$ の数域の境界を記述する。即ち、

$$\partial W(P) = \{U + iV : (U, V) \in \mathbf{R}^2, H(U, V) = 0\}.$$

このように計算される原理について考える。数域 $W(P)$ の点 $\lambda = U + iV$ は、(♯), (b) の左辺のような X, Y, Z についての 1 次式の零点として記述される直線または平面

$$\phi_{11}(U, V) X + \phi_{12}(U, V) Y + \phi_{13}(U, V) Z + \phi_{10}(U, V) = 0,$$

$$\phi_{21}(U, V) X + \phi_{22}(U, V) Y + \phi_{23}(U, V) Z + \phi_{20}(U, V) = 0$$

が単位球面 $\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ と共有点 (X_0, Y_0, Z_0) を持つような $(U, V) \in \mathbf{R}^2$ に対する $U + iV$ の集合である。このことより、(♯), (b) を X, Y について解いたものを $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ に代入したとき、 Z^2 の係数も Z^0 の係数も 0 でない 2 次方程式が導かれるならば、 $W(P)$ の内点においては、この判別式が正であり、 $W(P)$ の境界点がこのような内点の極限ならば、境界点を特徴づける方程式が、判別式 = 0 として得られると考えられる。しかしながら、2 次多項式の例として最初に考えた例では、 $V = 0$

に対応する $\langle P(\lambda)\xi, \xi \rangle = 0$ の解の特徴づけには、 X, Y, Z の 1 次式は 1 つしか登場しないから、このような方法は適用できない。

References

- [Ch-N] M. T. Chien, H. Nakazato: The numerical range of linear pencils of 2×2 matrices. preprint, 2000.
- [G-L-R] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman : "Matrix Polynomials", Academic Press, 1982.
- [L-R] C.K. Li, L. Rodman: "Numerical range of matrix polynomials", SIAM J. Matrix Anal. Appl. vol. 15 (1994), pp. 1256-1265.
- [P-T] P. J. Psarrakos, M. J. Tsatsomeros : "On the relation between the numerical range and the joint numerical range of matrix polynomials", the Electronic Journal of Linear Algebra, vol. 6 (2000), pp. 20-30.