

Milnor fiber, monodromy と characteristic polynomial について

東大理 松本幸夫

東大理 坂本幸一

$f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を解析的写像の germ とすると、よく知られていのように Milnor fibering $\varphi(z) := \arg f(z): S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(0) \rightarrow S^1$ が定義され、 f の解析的な不変量となる。この小文では、Milnor fibering に関する、Topology の立場からの 2, 3 の結果を紹介する。

1. Join theorem と Product fibering theorem.

次に述べる 2 つの定理は応用上、しばしば極めて有効である [10], [7], [9].

定理 (Join theorem) $f: (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (or $g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$) の Milnor fiber を F_f (or F_g), 幾何学的な monodromy 写像を α_f (or α_g) とし, $h(x, y) = f(x) + g(y): (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ で定義された h の Milnor fiber, monodromy 写像をそれぞれ F_h, α_h とすると, ホモトピー同値 $H: F_h \rightarrow F_f * F_g$ が存在して, 次の図式をホモトピーの意味で可換にする:

$$\begin{array}{ccc}
 F_h & \xrightarrow{H} & F_f * F_g \\
 \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_f * \alpha_g \\
 F_h & \xrightarrow{H} & F_f * F_g
 \end{array}$$

ここに $F_f * F_g$ は F_f と F_g の join (結) をあらわす.

系 1. F_h の reduced homology は

$$\tilde{H}_p(F_h) \cong \sum_{i+j=p-1} \tilde{H}_i(F_f) \otimes \tilde{H}_j(F_g) + \sum_{i+j=p-2} \text{Tor}(\tilde{H}_i(F_f), \tilde{H}_j(F_g))$$

で与えられる. (ホモロジ-は整係数) とくに体係数ホモロジ-に関しては右辺は tensor 積の部分のみでよい.

系 2. f, g とともに孤立特異点の場合, h の monodromy の固有値は, f と g の monodromy の固有値の積で与えられる.

Example 1 $f = z_1^p + z_2^q z_3^r$. z_1^p の fiber は p 個の点, $z_2^q z_3^r$ の fiber は $d = (q, r)$ 個の S^1 の disjoint union であるから $F_f \simeq \{p\text{-points}\} * \underbrace{\{S^1 \cup \dots \cup S^1\}}_{d\text{個}}$. ホモロジ-群

は $H_0(F_f) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(F_f) \cong (p-1)(d-1)\mathbb{Z}$, $H_2(F_f) \cong (p-1)d\mathbb{Z}$.

Monodromy $(\alpha_f)_i : H_i(F_f) \rightarrow H_i(F_f)$ は $(\alpha_f)_0 = \text{id}$, $(\alpha_f)_1$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1, -1 \end{pmatrix}}_{p-1} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1, -1 \end{pmatrix}}_{d-1}, \quad (\alpha_f)_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1, -1 \end{pmatrix}}_{p-1} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & 1, 0 \end{pmatrix}}_d$$

で与えられる.

変数分離形の積で与えられる写像に関しては次の定理がある :

定理 (Product fibering theorem) f, g を前定理のような解析写像とし, $h : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ で定義される写像とする. F_h は, " S^1 上の fiber bundle で, fiber を $F_f \times F_g$, 特性写像を $\alpha_f \times \alpha_g^{-1}$ とするもの," の total space Z にホモトピー-同値である :

$$\begin{array}{ccc} F_h & \simeq & Z \\ & & \downarrow F_f \times F_g \hookrightarrow \alpha_f \times \alpha_g^{-1} \\ & & S^1 \end{array}$$

また h の monodromy 写像 $\subset F_h$ は $\alpha_f \times 1$ 又は $1 \times \alpha_g$ で与えられる.

Example 2. $f = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_{n+1}^{a_{n+1}}$. d を最大公約数 $(a_1, \dots, a_{n+1})$ とすれば, $F_f \simeq d$ 個の n -次元 tori T^n の disjoint union.

2. 解析写像の "deformation".

実変数 t でパラメトライズされた解析写像の family $f_t : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ が与えられたとき, f_{t_0} と f_{t_1} は同型な Milnor fibering を持つかという問題を考える. これに関してはいくつかの十分条件が知られている. 例えば次の観察は簡単ではあるが有用である. [8]

定理 $t \in [0, 1]$ に解析的に依存する族 $\{f_t\}$ が次の 2 条件をみたせば, f_0, f_1 は smooth に同型な Milnor fibering を持つ. (1) $\exists \varepsilon > 0$, s.t. $\forall (z, t) \in D_\varepsilon \times [0, 1] - \{0\} \times [0, 1]$, $\text{grad } f_t(z) \neq 0$ (2) $\forall t \in [0, 1]$, $f_t^{-1}(0)$ は S_ε に transversal に交わる.

Example 3. 孤立特異点をもつ weighted homogeneous f, g が共通の weight $(w_1, \dots, w_{n+1})$ をもてば, 両者の Milnor fibering は smooth に同型である. とくに整数の weight $(a_1, \dots, a_{n+1})$ をもつ多項式は Brieskorn type $z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ の多項式に deform 出来る.

Example 4. $f_t = x^5 + y^5 + x^2y^2 + tx^3y^3$, $t \in [0, 1]$ とおくと f_0, f_1 は (原点 $z=0$) 同型な Milnor fibering を持つ. とくに $f_0 = x^5 + y^5 + x^2y^2$ の monodromy は $f_1 = (x^2+y^3)(x^3+y^2)$ のそれに等しく, A'Campo により periodic である.

特異点が必要しも孤立してはいない場合については [5] を参照されたい.

3. Seifert matrix について.

Seifert matrix は元来結び目の理論に由来するものであるが ([4], [6]), 最近それらが孤立特異点のまわりの topological な状況を完全に記述することが見出された [2]. そのことを正確

に述べるには spinnable structure [11] の概念が便利であるか。
 ここでは省略する。([11] 参照)

まず、孤立特異点の Milnor fibering $\varphi: S^{2n+1} - K \rightarrow S^1$ ($K = S^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$) の場合に即して Seifert matrix を定義しよう。 φ の fiber F_θ は S^n の有限個 (Milnor 数 μ) の bouquet であるから $H_n(F_\theta) \cong \mu \mathbb{Z}$ 。その basis を適当に選んで $e_1, \dots, e_\mu$ とする。(ここで F_θ は $\varphi(F_\theta) = e^{i\theta} \in S^1$ なる fiber を表わしている。) fibering φ の local triviality から、 S^1 の正の向き of vector field を F_θ の近傍の、 $S^{2n+1} - K$ 内の vector field として、局所的にひきあげる事ができ、この vector 場に沿って流すことにより $e_1, \dots, e_\mu$ に対応する $F_{\theta+\varepsilon}$ の basis $e'_1, \dots, e'_\mu$ が得られる。Seifert matrix $\Gamma = (\gamma_{ij})$ は

$$\gamma_{ij} = L(e_i, e'_j)$$

で定義される。ここに L は S^{2n+1} における linking number である。勿論 Γ は congruence class を除いて well-defined である。

定理 (1) Γ は unimodular である。(2) 孤立特異点の Milnor fiberings $\varphi_i: S^{2n+1} - K_i \rightarrow S^1$ ($i=1, 2$) が spinnable structure として同型、(すなわち diffeomorphism $h: (S^{2n+1}, K_1) \rightarrow (S^{2n+1}, K_2)$ が存在して diagram

$$\begin{array}{ccc} S - K_1 & \xrightarrow{h} & S - K_2 \\ \varphi_1 \searrow & & \swarrow \varphi_2 \\ & S^1 & \end{array}$$

可換となる) 級の必要十分条件は, 対応する Seifert matrices の congruence class が一致することである. 但し $n \geq 3$.

注意 [2]. 実は任意の unimodular 行列 $\Gamma \in \mathbb{Z}$ に対して, それを Seifert matrix に持つような (高次元) 球面上の spinnable str. の存在が知られている.

Seifert matrix は fiber F の intersection matrix I , φ の monodromy α_* を次のように決める [2].

定理 (1) $-I = \Gamma + (-1)^n \Gamma^t$ (Γ^t : transposed Γ)

(2) $\alpha_* = (-1)^{n+1} \Gamma^t \Gamma^{-1}$

Example 5 [9]. Brieskorn polynomial $f = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$ ($a_i \geq 2$) の Milnor fibering に対応する Seifert matrix Γ は

$$\Gamma = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} A_{a_1} \otimes \dots \otimes A_{a_n}$$

となる. ここで

$$A_a = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{a-1} \quad \text{である.}$$

Seifert matrix が具体的多項式について計算された例は, いくつかあるが, 他には, [3] に於て, Newton polynomial f_d (i.e. $f_d(\sigma_1, \dots, \sigma_d) = z_1^d + \dots + z_N^d$, σ_i : i 次初等対称式) に対する Seifert 行列が計算されている.

4. ζ -函数と characteristic polynomials.

$f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ の Milnor fibering の, monodromy 写像を $\alpha_f: F_f \rightarrow F_f$ とする. α_f を k 回 iterate したものの Lefschetz number を χ_k と書く: $\chi_k = \Lambda(\alpha_f^k)$

定理 (A'Campo-Deligne) $\chi_k = 0$ for $0 < k < \text{multiplicity of } f^{-1}(0) \text{ at } 0$.

系 $\widehat{H}_*(F_f; \mathbb{C}) = 0$ なら f は原点で non-singular. (なぜなら, $\mathbb{C}$ -acyclic な空間上に $\Lambda(\alpha) = 0$ なる連続写像 α は存在しない.)

さて超曲面 $f^{-1}(0)$ の原点における ζ -函数を次のように定義する:

$$\zeta(t) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k t^k / k.$$

ζ -函数の具体的な計算に関して A'Campo は次のような美しい結果を得た. $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ を proper modification とし, $S = \pi^{-1}(0)$ の任意の点で $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$ が normal crossing になっているものとする. 整数 $m \geq 1$ について

$$S_m = \{s \in S \mid s \text{ の近傍で } \pi^{-1}(f^{-1}(0)) \text{ が } z^m = 0 \text{ と書ける}\}.$$

とおく. $\chi(S_m)$ を S_m の Euler 数とする.

定理[1]

$$(1) \quad \chi_k = \sum_{m|k} m \chi(S_m),$$

$$(2) \quad \text{Milnor fiber の Euler 数 } \chi(F_f) = \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m).$$

$$(3) \quad \zeta(t) = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{-\chi(S_m)}$$

(4) とくに 0 が $f^{-1}(0)$ の孤立特異点のとき.

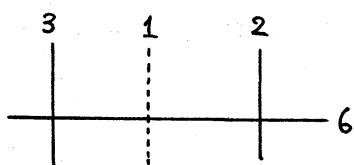
characteristic polynomial $\Delta(t)$

$$= [(t-1)^{-1} \prod_{m \geq 1} (t^m - 1)^{\chi(S_m)}] (-1)^n$$

$$\text{Milnor 数 } \mu = (-1)^n [-1 + \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m)]$$

注意: A'Campo の preprint [1] には公式 (3) の指数が $\chi(S_m)$ となっていてミスであろう.

Example 6. $f = x^2 + y^3$



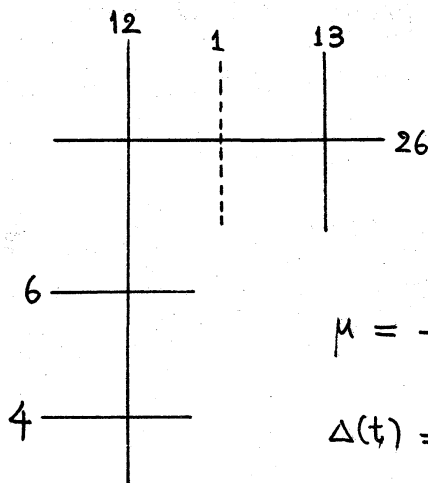
$$S_2 = P^1 - 1 \text{ point}, \quad S_3 = P^1 - 1 \text{ point}$$

$$S_6 = P^1 - 3 \text{ points.}$$

$$\text{characteristic polynomial } \Delta(t) = \frac{(t-1)(t^6-1)}{(t^2-1)(t^3-1)} = (t - e^{\frac{2\pi i}{6}})(t - e^{\frac{4\pi i}{6}})$$

$$\text{Milnor 数 } \mu = -[-1 + 2 + 3 - 6] = 2.$$

Example 7. $f = (x^3 - y^2)^2 - x^2 y^3$



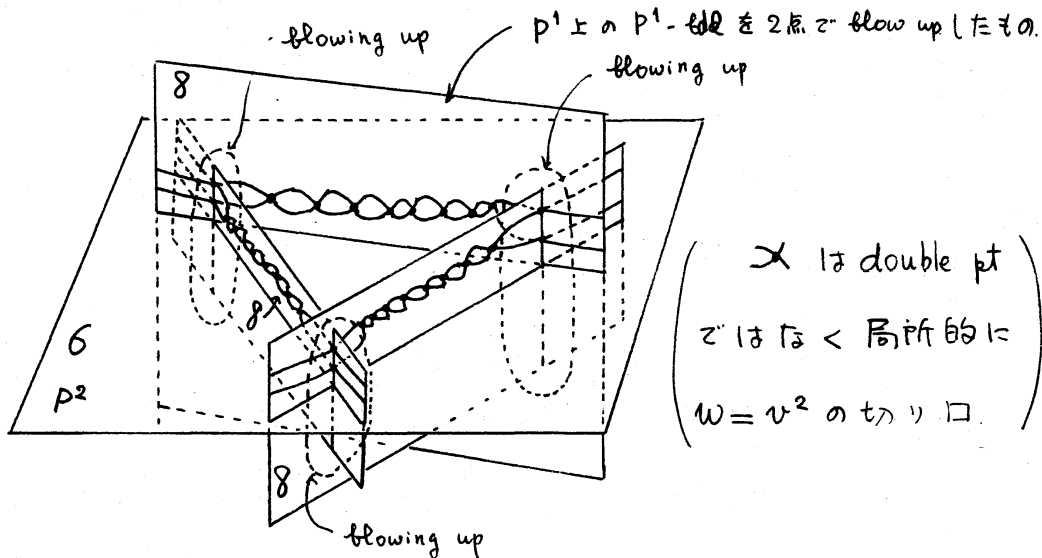
$$\chi(S_4) = 1, \quad \chi(S_6) = 1, \quad \chi(S_{12}) = -1$$

$$\chi(S_{13}) = 1, \quad \chi(S_{26}) = -1.$$

$$\mu = -[-1 + 4 + 6 - 12 + 13 - 26] = 16$$

$$\Delta(t) = \frac{(t-1)(t^{12}-1)(t^{26}-1)}{(t^4-1)(t^6-1)(t^{13}-1)}$$

Example 8 $f = (xyz)^2 + x^8 + y^8 + z^8$



$$\chi(S_6) = 0$$

$$\chi(S_8) = 27$$

$$\Delta(t) = (t-1)^{-1} (t^8-1)^{27}$$

$$\mu = 215$$

Example 8 の計算に際して中村, 堀川両氏から色々教えていただいたのでここで両氏に感謝します.

References

- [1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie (appear^{to})
- [2] M. Kato, A classification of simple spinnable structures on S^{2n+1} , 数理解析研究所講究録 170. (1973)
- [3] T. Kawasaki, Symmetric quotients of Fermat-type

hypersurfaces. to appear.

- [4] J. Levine, Knot cobordism in codimension Two, *Comment. Math. Helv.* 44, 229-244 (1969)
- [5] Y. Matsumoto, On a class of deformations of holomorphic functions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 20, 239-251 (1973)
- [6] ———, Knot cobordism groups and surgery in codimension Two. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 20, 253-317 (1973)
- [7] M. Oka, On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials. *Topology*, 12, 19-32 (1973)
- [8] ———, Local deformation of polynomials with isolated singularities. (to appear in *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*)
- [9] K. Sakamoto, Milnor fiberings and their characteristic maps. (to appear in *Proceedings of Conference on Manifolds.*)
- [10] M. Sebastiani-R. Thom, Un résultat sur la monodromie, *Invent. Math.* 13 (1971) 90-96
- [11] I. Tamura, Spinnable structures on differentiable manifolds, *Proc. Japan. Acad.* 48 (1972) 293-296.

Appendix 1. Milnor fiber の connectivity について.

$f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を解析的写像の germ とし, Σ を f の critical set とする。 Σ の原点における次元 $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma$ と Milnor fiber の connectivity に関し次の定理が成り立つ。

(M. Kato - T. Matsumoto, "On the connectivity of the Milnor fiber of a holomorphic function at a critical point." to appear in Proceedings of Conference on Manifolds.)

定理 $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma = s$ とすると, f の原点における Milnor fiber F は少なくとも $(n-s-1)$ 連結である。すなわち $\pi_i(F) = 0 \quad i \leq n-s-1$ 。 尤くは $H_i(F) = 0 \quad i \leq n-s-1$ 。

例 1. $f = (z_1 z_2)^2 + \dots + (z_{2k-1} z_{2k})^2 + z_{2k+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2$ とする
と $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma = k$ で, $\pi_i(F) = 0 \quad (i \leq n-s-1)$ から $\pi_{n-k}(F) \neq 0$.
実際, Join theorem により, F は $\underbrace{(S^1 \vee S^1) + \dots + (S^1 \vee S^1)}_{k \text{ 個}} + S^{n-2k}$ と
ホモトピー同値である。

例 2. $f = z_1 z_2^{p_1} + \dots + z_{2k-1} z_{2k}^{p_k} + z_{2k+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2$
(但し, $p_1, \dots, p_k \geq 2$) とおくと $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma = k$ で F は
 S^n とホモトピー同値, したがって $\pi_i(F) = 0 \quad i \leq n-1$ 。

Appendix 2. Milnor fibering and local triviality

$f: U(\subset \mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{C}$, ($f(0)=0$) を正則関数で定義される超曲面 $V = f^{-1}(0)$ 上には bonne stratification が存在する (F. Pham)。すなわち, Whitney condition a) b) をみたし,

V の任意の点 x と, x に収束する $U-V$ の系列 $\{x_n\}$ に対し
て, $T_{x_n} f^{-1}(f(x_n))$ がある超平面 T に収束するとき, $T \subset T_x X$
である。ここに X は x を含む strata とする。

各 strata X に対し, X の tubular nbd. T_x , projection map $\pi_x : T_x \rightarrow X$, X との間距離を表わす函数 $\rho_x : T_x \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在して, 次の性質をみたす。2つの strata X, Y に対し, $T_x \cap Y \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{Y} \supset X$ 。このような strata の pair (Y, X) に対し

$$\begin{aligned} \pi_x &= \pi_x \circ \pi_Y, \quad \rho_x = \rho_x \circ \pi_Y \\ \pi_x \times \rho_x |_{T_x \cap Y} : T_x \cap Y &\rightarrow X \times \mathbb{R} \text{ は submersion.} \end{aligned} \quad (*)$$

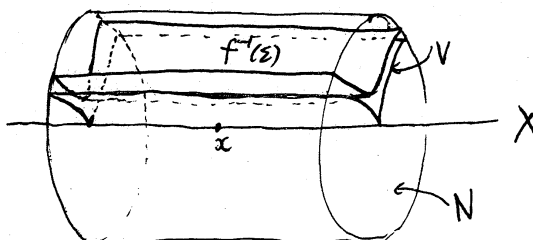
さらに bonne stratification という仮定から, $T_x \varepsilon$ 十分小さくとると

$$\pi_x \times f |_{T_x - f^{-1}(0)} : T_x - f^{-1}(0) \rightarrow X \times \mathbb{C} \text{ は submersion } (**)$$

定理 X を V の strata, x を X の任意の点とする。 x の近傍 $N (\subset T_x)$ および 連続写像 $\phi : N \rightarrow H_x$ が存在して次が成り立つ。ここに $H_x = \pi_x^{-1}(x) \cap N$ 。

$$i) \pi_x(N) = N \cap X, \quad ii) f \circ \phi = f$$

iii) $\varphi = \pi_x \times \phi : N \rightarrow (N \cap X) \times H_x$ は位相同型。とくに十分小さき $\varepsilon \neq 0$ に対し $N \cap f^{-1}(\varepsilon) \cong (N \cap X) \times (H_x \cap f^{-1}(\varepsilon))$ 。



系 $x \in U$ における f の Milnor fiber を F_x とし, $\mathcal{H}_x^i = H^i(F_x; \mathbb{Z})$ とおくと, $\mathcal{H}^i = \bigcup_{x \in U} \mathcal{H}_x^i$ は U 上の sheaf となる。 $\mathcal{H}^i$ を (bonne stratification の) 1つの strata 上に制限すると locally trivial になる。

定理の証明の概略は次のようにする。 (*) より, X 上の任意の vector field $V = V_X$ に対し, $X \subset \bar{Y}$ なる各 strata に対し, $T_X \cap Y$ 上の vector field V_Y が存在して, $X \subset \bar{Y} \subset \bar{Z}$ のとき, $(\pi_Y)_* V_Z = V_Y$, $(p_Y)_* V_Z = 0$ となる。同様に (**) から, $T_X - V$ 上の vector field U が存在して, $f_* U = 0$ かつ $X \subset \bar{Y} \subset \bar{Z}$ なる Y, Z に対し, $T_X \cap T_Y - V$ 上で $(\pi_Y)_* U = V_Y$, $T_X \cap T_Y \cap T_Z - V$ 上で $(p_Y)_* U = (p_Y \circ \pi_Z)_* U = (p_Y)_* V_Z = 0$ となる。

$x \in X^k$ に対し, x の X での disc nbd. $B (\cong \mathbb{R}^{2k})$ とし, B 上の一次独立な $2k$ 個の vector field に対して, 上の U, V_Y を構成し, それらの積分曲線を考察すれば, 定理の成立することがわかる。