

# Analytic Multi Function について (Z. Slodkowski の研究など)

北里大学教養部 羽鳥 理 (Osamu Hatori)

序. 1934 年に K. Oka により発見された analytic multivalued function は 70 年代のおわりごろ、Z. Slodkowski により再発見され、80 年代に入ってから Slodkowski, Aupetit, Ransford をはじめとして多くの人々により、重に関数解析との関連のもとに研究されている。Banach 環値の analytic function のスペクトルに関する Aupetit の問題の解決、関数環の tensor products の Silov-Sibony-Basener boundaries に関する Basener の問題の肯定的解決 (この問題は否定的解決を予想する人もいたようである。) をはじめとし Carleson の corona 定理の別証明 (ある種の Riemann 面上の有界正則関数全体の環に対する有限生成イデアルに関する結果も含めて)、 $\mathbb{C}^2$  の有界 pseudoconvex domain が domain of holomorphy であることの elementary proof (analytic multivalued function の理論の中での) 等多くの結果が得られ

つある。ここでは analytic multivalued function に関する最近の結果を Slodkowski の仕事を中心に紹介したい。

### § 1. Analytic Multivalued Function の定義と例

定義 1.1.  $X$  を  $n$  次元複素空間  $\mathbb{C}^n$  の locally closed set (i.e.  $X$  が  $\mathbb{C}^n$  の open set と closed set の intersection) とする。  $0 \leq k \leq n$  なる  $k$  に対して  $X$  が local maximum property of order  $k$  をもつとは、以下のことが成立することとする：

$\forall P_0, P_1, \dots, P_k : k+1$  の analytic polynomial in  $z_1, \dots, z_n$

$\forall N : X$  の compact subset

に対して

$$\max\{f(z_1, \dots, z_n) : (z_1, \dots, z_n) \in N\}$$

$$= \max\{f(z_1, \dots, z_n) : (z_1, \dots, z_n) \in \partial_X N\}.$$

ここで  $f(z_1, \dots, z_n) = \min\{|P_0(z_1, \dots, z_n)|, \dots, |P_k(z_1, \dots, z_n)|\}$  とし  $\partial_X N$  は  $N$  の  $X$  における relative boundary とする。

定義 1.2.  $\mathbb{C}^n$  の locally closed set  $X$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  なる  $k$  に対して  $X$  が  $k$ -maximum set であるとは、codimension が  $k$  である  $\mathbb{C}^n$  の任意の complex hyper plane  $L$  に対して  $X \cap L$  が local maximum property of order 0 をみたすこと

とする。

locally closed set  $X$  が  $k$ -maximum set であることと local maximum property of order  $k$  をみたすことは同値である。定義より  $k$ -maximum set は  $(k-1)$ -maximum set である。pure dimension  $k+1$  の analytic variety は  $k$ -maximum set の例である。また  $\mathbb{C}^n$  の中の  $(n-1)$ -maximum set は  $\mathbb{C}^n$  の open set である。

定義 1.3.  $G$  を  $\mathbb{C}^n$  の open set とする。

$$K : G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$$

を  $\forall \lambda = (z, \dots, z_n) \in G$  に対して  $K(\lambda)$  が  $\mathbb{C}^m$  の non-Void な compact set であるような multivalued (set valued) map とする。さらに  $K$  は upper semi-continuous set valued function とする。つまり  $\mathbb{C}^m$  の任意の open set  $U$  に対して  $\{\lambda \in G : K(\lambda) \subset U\}$  が  $G$  の open set になるものとする。 $K$  のグラフ

$$\text{gr}(K) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+m} : z \in G, w \in K(z)\}$$

が local maximum property of order  $n-1$  をもつとき、 $K$  を  $G$  上の analytic multivalued function (以後 a.m.v. と略記する) とよぶ。

まず multivalued function が a.m.v. であるための  
必要十分条件についてみてみよう。

補題 1.1. [6, 9, 10]  $G$  を  $\mathbb{C}^n$  の open set,

$$K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$$

を upper semi-continuous non-void compact set-valued  
function とする。このとき以下の (i) ~ (v) は同値である。

- (1)  $K$  は a.m.v. である。
- (2)  $\text{gr}(K)$  は  $(n-1)$ -maximum set である。
- (3)  $G \times \mathbb{C}^m \setminus \text{gr}(K)$  が  $G \times \mathbb{C}^m$  で  $(m-1)$ -pseudoconvex  
である。ここで  $U \subset V \subset \mathbb{C}^l$  なる open set  
 $U, V$  に対して  $U$  が  $V$  で  $q$ -pseudoconvex であるとは、  
以下の条件をみたすような  $\{q+2$  次元 complex  
hyper plane  $L$  と  $q+1$  次元 analytic disk の列  
 $M_n (n \geq 0) \}$  が存在しないことを言う:

- $\forall n \geq 1$  に対して  $M_n \subset U \cap L$
- $n \rightarrow \infty$  のとき

$$M_n \cup \partial M_n \longrightarrow M_0 \cup \partial M_0$$

$$\partial M_n \longrightarrow \partial M_0$$

- $\forall n \geq 0$  に対して  $\partial M_n \subset U$
- $M_0 \subset V \cap L$

$$\bullet M_0 \cap \partial U \cap V \neq \emptyset$$

③ 定義より  $\mathbb{C}^l$  の open set は  $(l-1)$ -pseudoconvex である。また  $0$ -pseudoconvex であることと pseudoconvex であることは同値である。

(4)  $gr(K)$  の任意の近傍で定義された任意の smooth  $(n-1)$ -plurisubharmonic function  $u$  に対して  $G$  上の関数

$$v : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto \max \{ u(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m) : (w_1, \dots, w_m) \in K(z) \}$$

が  $(n-1)$ -plurisubharmonic である。ここで  $\mathbb{C}^l$  の open set  $G$  上の実数値  $C^2$ -function  $f$  について、その complex Hessian が  $G$  の各点で高々  $\delta$  の負の固有値をもつとき、 $f$  は smooth  $\delta$ -plurisubharmonic であるといわれる。 $G$  上の実数値 upper semi-continuous function  $h$  について、任意の smooth  $(l-\delta-1)$ -plurisubharmonic function  $g$  との和  $h+g$  が  $G$  で local maximum property をみとす (i.e.  $G$  の任意の compact subset  $F$  に対して  $\max \{ (h+g)(\lambda) : \lambda \in F \} = \max \{ (h+g)(\lambda) : \lambda \in \partial F \}$  ) をみとすとき  $h$  は  $G$  上  $\delta$ -plurisubharmonic であるといわれる。

のことから、もちろん、smooth  $q$ -plurisubharmonic  
なる  $q$ -plurisubharmonic である。

- (5)  $gr(K)$  の任意の近傍で定義される  
任意の  $(n-1)$ -plurisubharmonic function が  $gr(K)$  で  
local maximum property をもつ。
- (6)  $G$  の任意の open subset  $G'$  に対して  $K|_{G'}$  が  $G'$  で  
a.m.v. である。
- (7) 任意の  $z = (z_1, \dots, z_n) \in G$  に対して  $z$  の近傍  $U_z$  が  
存在して  $K|_{U_z}$  は  $U_z$  上 a.m.v. である。

特に  $n = m = 1$  のときには次が成立する。

補題 1.1'. [4, 6, 9, 10]  $\mathbb{C}$  の open set  $G$  と  $G$  上の  
upper semi-continuous non-void compact set valued function  
 $K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}}$  に対して以下は同値である。

- (1)'  $K$  は a.m.v. である。
- (2)'  $gr(K)$  が local maximum property of order 0 をみたす。
- (3)'  $G \times \mathbb{C} \setminus gr(K)$  は pseudoconvex である。
- (4)'  $gr(K)$  の任意の近傍で定義された任意の plurisub-  
harmonic function  $u$  に対して  $G$  上の関数

$$\begin{array}{ccc} v : G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \longrightarrow & \max\{u(z, w) : w \in K(z)\} \end{array}$$

は  $G$  上 subharmonic になる。

- (6)'  $G$  の任意の open subset  $G'$  に対して  $K|_{G'}$  は  $G'$  上 a.m.v. である。
- (7)' 任意の  $z \in G$  に対して  $z$  の近傍  $U_z$  が存在し  $K|_{U_z}$  は  $U_z$  上 a.m.v. である。
- (5)'  $gr(K)$  の任意の近傍で定義された plurisubharmonic 関数が  $gr(K)$  で local maximum property をみたす。
- (8) 任意の analytic polynomial  $p(z)$  と任意の複素数  $a, b$  に対して実数値関数

$$\begin{array}{ccc} \{z \in G : az + b \notin K(z)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \longrightarrow & \max\{|(w - za - b)^{-1} \exp p(z)| : w \in K(z)\} \end{array}$$

が  $\{z \in G : az + b \notin K(z)\}$  上 local maximum property をみたす。

- (9)  $G \times \mathbb{C} \setminus gr(K)$  上の関数

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{C} \setminus gr(K) & \longrightarrow & [-\infty, \infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z, w) & \longrightarrow & -\log \text{dist}(w, K(z)) \end{array}$$

が  $G \times \mathbb{C} \setminus gr(K)$  で plurisubharmonic である。ここで  $\text{dist}(w, K(z)) = \inf\{|w - \lambda| : \lambda \in K(z)\}$  である。

- (10) 任意の複素数  $a, b$  に対して  $\{z \in G : az + b \notin K(z)\}$  上

の関数

$$\begin{array}{ccc} \{z \in G : az+b \in K(z)\} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \xrightarrow{\quad} & \log \max\{|w-az-b|^{-1} : w \in K(z)\} \end{array}$$

は subharmonic である。

定義 1.4.  $G$  が  $\mathbb{C}^n$  の open set であるとする。

$$K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^n}$$

は upper semi-continuous non-void compact set valued function とする。 $G$  の任意の open subset  $G'$  と  $gr(K|_{G'})$  の近傍で定義された任意の plurisubharmonic function  $\psi$  に対して  $G'$  の関数

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\quad} & [-\infty, \infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \xrightarrow{\quad} & \max\{\psi(z, w) : w \in K(z)\} \end{array}$$

が plurisubharmonic function となるとき  $K$  は  $G$  上 weak a.m.v. であるという。

補題 1.1. より  $n=1$  のときは a.m.v. であることと weak a.m.v. であることは同値である。一般の場合は a.m.v. は weak a.m.v. であることはわかるが [10] weak a.m.v. であって a.m.v. でない multivalued function の例がある。

例 1.0. [9]

$$K: \underset{\psi}{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \underset{\psi}{2^{\mathbb{C}}}$$

$$(z_1, z_2) \longmapsto \begin{cases} \{w \in \mathbb{C} : |w|=1\} & \text{if } (z_1, z_2) \neq (0,0) \\ \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\} & \text{if } (z_1, z_2) = (0,0) \end{cases}$$

で定義された  $K$  は weak a.m.v. であるが補題 1.1. の (2) をみたさない。 実際  $L = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 : w=0\}$  とおくとき  $L$  は  $\mathbb{C}^3$  の 2 次元 hyperplane で  $L \cap \text{gr}(K) = \{(0,0,0)\}$  となり local maximum property of order 0 をみたさない。

weak a.m.v. については次が成立する。

定理 1.1. [4]

(i)  $G$  を  $\mathbb{C}^n$  の open set とし  $K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$  は weak a.m.v.

とする。 このとき次の各 multivalued function は weak a.m.v. である。

$$\underset{\psi}{G} \longrightarrow \underset{\psi}{2^{\mathbb{C}^{m+n}}}$$

$$\lambda \longmapsto K(\lambda) \times \{\lambda\}$$

$$\underset{\psi}{\mathbb{C}^k \times G} \longrightarrow \underset{\psi}{2^{\mathbb{C}^m}}$$

$$(z, \lambda) \longmapsto K(\lambda)$$

$$\underset{\psi}{\mathbb{C}^k \times G} \longrightarrow \underset{\psi}{2^{\mathbb{C}^{k+m}}}$$

$$(z, \lambda) \longmapsto \{z\} \times K(\lambda)$$

- (2)  $V$  を  $\mathbb{C}^m$  の open set とする。  $K: G \longrightarrow 2^V$  と  $L: V \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^l}$  が weak a.m.v. であるとする。

このとき

$$\begin{array}{ccc} L \circ K: G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^l} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \longmapsto & \bigcup \{L(z) : z \in K(\lambda)\} \end{array}$$

は weak a.m.v. である。

- (3)  $G$  を  $\mathbb{C}^n$  の open set で  $K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$ ,  $L: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^l}$  を weak a.m.v. であるとする。このとき

$$\begin{array}{ccc} M: G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^{m+l}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \longmapsto & \{(z, w) \in \mathbb{C}^{m+l} : z \in K(\lambda), w \in L(\lambda)\} \end{array}$$

は weak a.m.v. である。

定理 1.1. と定義域が 1 次元である場合の a.m.v. と weak a.m.v. の同値性により  $\mathbb{C}$  の open set  $G$  上の  $2^{\mathbb{C}}$  値 a.m.v. 全体は algebra を作ることがわかる [13; Proposition 1.2]. (注 Proposition 1.2 では a.m.v. どちらの積については述べられていないが和の場合と同様に積の場合も a.m.v. である。) さらに [10; P372 ↑ 11] では一般の a.m.v. どちらの合成について述べてあるが筆者は証明できていないし "subsequent paper" もまだみていないので、定義域が 2 次元以上の場合の  $2^{\mathbb{C}}$  値 a.m.v. が algebra を作るかどうかは不明である (筆者には)。

次に a.m.v. の例をみていきたい。

例 1.1. 大ざっぱに言って  $\mathbb{C}^m$  の analytic sub-manifold は a.m.v. のかうつになっている。正確には次が言える。  $M$  が  $\mathbb{C}^m$  に含まれる pure dimension  $n$  の analytic set で natural projection

$$\begin{array}{ccc} \pi: \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_m) & \longmapsto & (z_1, \dots, z_n) \end{array}$$

に対して  $\pi(M)$  が  $\mathbb{C}^n$  の open set  $G$  を含み  $\{w \in M: \pi(w) = z\}$  が compact な

$$\begin{array}{ccc} K: G & \longrightarrow & 2^{\mathbb{C}^m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \longmapsto & \{w \in M: \pi(w) = z\} \end{array}$$

は  $G$  上 a.m.v. である。

例 1.2.  $\mathbb{C}^n$  の open set  $G$  の各元  $z$  に対して、常に  $\mathbb{C}^m$  の一定の non-void compact set  $Y$  を値としてとる  $G$  上の multivalued function  $K$  は  $G$  上の a.m.v. である。

°°  $\text{gr}(K)$  が  $(n-1)$ -maximum set であることを示す。

$L$  を  $m+1$  次元 complex hyperplane で  $N$  を  $L \cap \text{gr}(K)$  の compact set とする。  $L$  の  $\mathbb{C}^n$  への projection を  $L'$  とする。(図 1.1. 参照)  $L'$  が  $m+1$  次元なので  $L'$  は次元が 1 以上となり、よって  $L'$  の  $\mathbb{C}^n$  での codimension は  $n-1$  以下となる。また  $G$  が

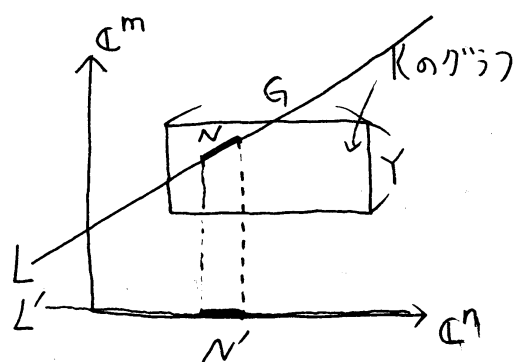


図 1.1.

$\mathbb{C}^n$  の open set なのて、 $G$  は  $(n-1)$ -maximum set となりよて  $(n-1)$ 以下の maximum set てもある。  
 $N$  の  $\mathbb{C}^n$  への projection  $N'$  での polynomial の絶対値は最大値を  $\partial_{L' \cap G} N'$  てもとる。ここ

て  $\partial_{L' \cap G} N'$  は  $N'$  の  $L' \cap G$  での relative boundary てもある。  
 よて  $N$  での polynomial の絶対値の最大値は  $\partial_{L \cap \text{gr}(K)} N$  てもとる。  
 つまり  $L \cap \text{gr}(K)$  は local maximum property of order 0 をみたすことになる。これは  $\text{gr}(K)$  が  $(n-1)$ -maximum set であることにはかならない。

例 1.3.  $G$  を  $\mathbb{C}^n$  の open set とする。

$$f: G \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

を  $G$  上の  $\mathbb{C}^m$  値関数とする。この  $f$  に対して

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}: G & \longrightarrow & \bigcup_{z \in G} \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \longrightarrow & \{f(z)\} \end{array}$$

を各  $z \in G$  に対して一点集合  $\{f(z)\}$  を対応させる multi-valued function とする。この時次の (i), (ii), (iii) は同値である。

- (1)  $f$  が普通の意味での analytic map である。
- (2)  $\tilde{f}$  が a.m.v. である。
- (3)  $\tilde{f}$  が weak a.m.v. である。

° (1)  $\Rightarrow$  (2) について

$\text{gr}(\tilde{f}) = \{(z, f(z)) \in G \times \mathbb{C}^m : z \in G\}$  は  $n$  次元 analytic submanifold of  $\mathbb{C}^{n+m}$  である。たかす  $\text{gr}(\tilde{f})$  は  $(n-1)$ -maximum set であり、よって補題 1.1. から  $\tilde{f}$  は a.m.v. である。

(2)  $\Rightarrow$  (3) について

たとえば [9] の Remark 3.6 をみよ。

(3)  $\Rightarrow$  (1) について

$\varphi_i : \lambda \mapsto (z_1, \dots, z_{i-1}, \lambda, z_{i+1}, \dots, z_n)$  は analytic なもので  $\tilde{f}$  との合成  $\tilde{f} \circ \varphi_i$  は weak a.m.v. である ( $\varphi_i$  に上の (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3) を適用し、定理 1.1. により)。  $\tilde{f} \circ \varphi_i$  は定義域が 1 次元の weak a.m.v. であるから補題 1.1. より  $\tilde{f} \circ \varphi_i$  は a.m.v. である。次に任意の定数  $a, b$  に対し

$$\psi_j(z, w_1, \dots, w_m) = \log |w_j - az - b| \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

は plurisubharmonic であり  $\tilde{f} \circ \varphi_i$  が a.m.v. であるから

$$\begin{aligned} \phi_j(\lambda) &= \max \{ \psi_j(z, w_1, \dots, w_m) : \{z\} \times \{\tilde{f} \circ \varphi_i(z)\} \} \\ &= \psi_j(z, \tilde{f} \circ \varphi_i(z)) \end{aligned}$$

$$= \log |f \circ \varphi_i(z) - az - b|$$

は subharmonic となる。このことが各  $a, b$  に対して成立し、また  $f \circ \varphi_i$  は有界として一般性を失わないので  $f \circ \varphi_i$  は analytic となり、 $f$  が analytic map であることがわかる。

③ 有限個の値をとるような多値関数(たとえば  $z^{1/2}$  など)も a.m.v. であることがわかる。(可算個の場合は compact 値にならないので上の a.m.v. の定義にはあてはまらない)

例 1.4.  $G$  は  $\mathbb{C}^n$  の open set とする。

$$r: G \longrightarrow [0, \infty)$$

$$K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m}$$

$$z \longmapsto \{w \in \mathbb{C}^m : |w| \leq r(z)\}$$

とすると、次は同値である。

- (1)  $K$  が weak a.m.v. である。
- (2)  $K$  が a.m.v. である。
- (3)  $\log r$  が plurisubharmonic である。

◦ (2)  $\implies$  (1) はたとえば [9] の Remark 3.6

(1)  $\Rightarrow$  (3) について

$z \in \mathbb{C}^n$ ,  $w \in \mathbb{C}^m$  に対して

$$\varphi(z, w) = \log |w|$$

よく  $\varphi$  は  $gr(K)$  の近傍で plurisubharmonic で

$$\phi(z) = \max \varphi(z, w) \big|_{\{z\} \times K(z)}$$

$$= \max_{|w| \leq r(z)} \log |w|$$

$$= \log r(z)$$

は weak a.m.v. の定義により plurisubharmonic となる。

(3)  $\Rightarrow$  (2) について

$\log r(z)$  が plurisubharmonic であればその定義によ

り  $\log r(z)$  は upper semi-continuous function である。よ

って  $K$  は upper semi-continuous non-void compact set

valued function となる。補題 1.1. よりあとは、 $\Omega =$

$G \times \mathbb{C}^m \setminus gr(K)$  が  $(n-1)$ -pseudoconvex in  $G \times \mathbb{C}^m$  であ

ることを示せばよい。よって  $\Omega = \{(z, w) \in G \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) :$

$\log r(z) - \log |w| < 0\}$  であり仮定より  $\log r(z) - \log |w|$  は

plurisubharmonic function であるから  $\Omega$  は pseudoconvex

となる (補題 1.1. (6) により  $G$  が pseudoconvex であるを仮定

して一般性を失わない)。よって  $\Omega$  は  $(n-1)$ -pseudoconvex

in  $G \times \mathbb{C}^n$  である。

③ 例 1.4. より不連続な a.m.v. がある。たとえば

$$r(z) = \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \log \left| \frac{z - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right| \right)$$

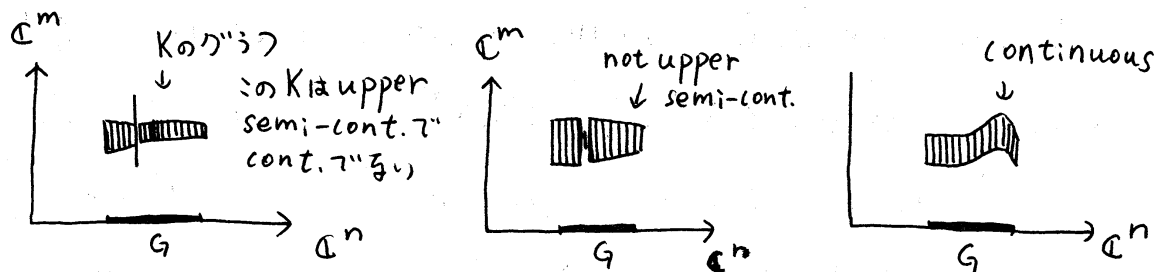
とすると  $\log r(z)$  は  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  で subharmonic であって  $z = 0$  において不連続であるから

$$K: D \longrightarrow 2^{\mathbb{C}} \\ \psi \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ z \longmapsto \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq r(z)\}$$

は continuous でない a.m.v. となる。ここで upper semi-continuous multivalued function

$$K: G \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^m} \quad (G \subset \mathbb{C}^n \text{ open})$$

が  $\mathbb{C}^m$  の任意の closed set  $F$  に対して  $\{z \in G : K(z) \subset F\}$  が  $G$  での closed set になるとき  $K$  は連続であるという。



④ 普通の意味の analytic function では boundary value が定まると内部での値もそれにより定まるわけである (Cauchy型の積分定理) が a.m.v. のときはそうでもない。たとえば  $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  に対して  $K(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ ,  $L(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |z|\}$  とすると  $K, L$  は  $D$  上の a.m.v. であり (例 1.2, 1.4.)  $K$  と  $L$  は  $\partial D$  で一致しているにもかかわらず

らず内部では異なる値をとっている。しかしながら boundary value と内部の値がまったく無関係とはもつともならない。このことに関連しては、たとえば [13]。

例 1.5. ([4], [25])  $G$  を  $\mathbb{C}$  の open set とする。

$\mathcal{U}$  は単位元をもつ complex Banach algebra とする。また

$$f: G \longrightarrow \mathcal{U}$$

は  $\mathcal{U}$ -valued analytic function とする。このとき

$$\begin{array}{ccc} \sigma \circ f: G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \longmapsto & \sigma(f(z)) \end{array}$$

は a.m.v. である。ここに  $x \in \mathcal{U}$  に対して  $\sigma(x)$  は  $x$  の spectrum を表す。

⑨ この結果は、はじめ  $\mathcal{U}$  が complex Banach space 上の bounded operator の作る Banach algebra の場合に Słodkowski [4] により示され (cf. [30])、その後 Tarabusi [25] が上の形に拡張し simple proof を与えた。

例 1.6. ([4])  $G$  を  $\mathbb{C}$  の open set,  $A$  を関数環とする。

$f, g \in A$  が  $f(M_A) \setminus f(\partial A) \neq \emptyset$  をみたすとき

$$\begin{array}{ccc} f(M_A) \setminus f(\partial A) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \xrightarrow{\quad} & g(f^{-1}(\lambda)) \end{array}$$

は a.m.v. になる。ここで  $M_A$  は  $A$  の maximal ideal space  
 $\partial A$  は  $A$  の Shilov boundary である。

実は一変数の a.m.v. はほとんどこの形のものであると  
 言ってよい。即ち次が成立する。

定理 1.2. ([4], [6])  $G$  を  $\mathbb{C}$  の bounded open set  
 とする。

$$K: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

を bounded な a.m.v. とする。即ち  $\sup\{|w|: z \in G, w \in K(z)\} < \infty$   
 をみたす a.m.v. とする。このとき次が成立する。

(a) ある complex separable Hilbert space  $H$  と  $B(H)$   
 ( $H$  上の bounded operator 全体の Banach algebra) 値の  
 analytic operator valued function

$$T: G \longrightarrow B(H)$$

が存在し、

$$\sigma \circ T(z) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

(b) ある separable な関数環  $A$  と  $g \in A$  が存在して

$$G = f(M_A) \setminus f(\theta_A)$$

となり ([6] の Theorem 1.4 では  $G \subset f(M_A) \setminus f(\theta_A)$  となっているが、実際  $G = f(M_A) \setminus f(\theta_A)$  となるように  $f$  をとれることがわかる。たとえば以下の定理 1.3 (b) 参照)

$$g(f^{-1}(z)) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

例 1.5, 1.6 は多変数の場合に以下のように拡張できる。

まず例 1.5 は次のようになる。

例 1.7. ([9])  $X$  を complex Banach space として  $B(X)$  を  $X$  上の bounded operator 全体からなる Banach algebra とする。  $G$  を  $\mathbb{C}^k$  の open set として  $G$  上の  $B(X)$ -valued analytic operator function

$$T_j : G \longrightarrow B(X) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

が与えられ、任意の  $z$  に対し各  $T_j(z)$  が commute しているものとする (i.e.  $T_j(z)T_i(z) = T_i(z)T_j(z)$  for  $\forall z \in G, \forall i, j = 1, 2, \dots, m$ )。この時

$$\begin{array}{ccc} \text{sp}(T_1, \dots, T_m) : G & \xrightarrow{\quad} & 2^{\mathbb{C}^m} \\ \downarrow z & & \downarrow \\ & \xrightarrow{\quad} & \text{sp}(T_1(z), \dots, T_m(z)) \end{array}$$

は  $G$  上の a.m.v. である。 ここで commuting operator 達

$S_1, \dots, S_m \in B(X)$  に対して  $sp(S_1, \dots, S_m)$  はそれらの Taylor spectrum を表す。

⑤ ここで Taylor spectrum について述べておく。  $X$ ,  $S_1, \dots, S_m$  は上と同じとする。  $\Lambda$  を  $m$  個の generator  $\{e_1, \dots, e_m\}$  により作られる  $\mathbb{C}$  上の exterior algebra とし、 $1 \leq p \leq m$  なる自然数  $p$  に対して

$\Lambda_p : e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$  ( $e_1, \dots, e_m$  のうちの  $p$  個の積) を basis とする  $\Lambda$  の subspace

$$\Lambda_0 = \mathbb{C}$$

$p > m$ ,  $p < 0$  なる整数  $p$  に対して

$$\Lambda_p = \{0\}$$

とする。 また  $\Lambda^p(X) \otimes X$  と  $\Lambda^p$  の tensor product を表す。

このとき次の cochain complex

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^p(X) & \xrightarrow{d} & \Lambda^{p+1}(X) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ x \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p} & \longmapsto & \sum_{j=1}^n S_j(x) \otimes e_j \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p} \end{array}$$

を  $(S_1, \dots, S_m)$  の Koszul complex という。 ( $S_1, \dots, S_m$  が commute することから実際  $d \circ d = 0$  が確かめられる)  $(S_1, \dots, S_m)$  の Koszul complex が exact のとき  $S_1, \dots, S_m$  は regular であるといわれる。  $S_1, \dots, S_m$  の Taylor spectrum を

$$sp(S_1, \dots, S_m) = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : S_1 - z_1 I, S_2 - z_2 I$$

, ...,  $S_m - z_m I$  が regular でない }  
 で定義する。 ここで  $I \in B(X)$  は identity operator である。

$m=1$  のときの Taylor spectrum は普通の spectrum と一致し

ている。 実際  $m=1$  であれば

$$\Lambda^p = \{0\} \quad p > 1, \quad p < 0$$

$$\Lambda^1 = \mathbb{C}$$

$$\Lambda^0 = \mathbb{C}$$

なので  $\Lambda^1(X) = \Lambda^0(X) = X$  となり  $S_1$  の Koszul complex は

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{d_2} & 0 & \xrightarrow{d_{-1}} & X & \xrightarrow{d_0} & X & \xrightarrow{d_1} 0 \xrightarrow{d_2} \\ & & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi & \\ & & & X_1 & \xrightarrow{\quad} & S(X) & \end{array}$$

となるので、これが exact であることと  $d_0$  が 1対1で上への map であることは同値となる。 したがって  $z \in sp(S_1)$  であることと  $S_1 - zI$  が  $B(X)$  で invertible でないことは同値つまり  $sp(S_1) = \sigma(S_1)$  である。 Taylor spectrum の性質としては次があげられる [27], [28]。 Slodkowski [9] はこれらの性質を用いて 例 1.7 を示している。

1.  $sp(S_1, \dots, S_m)$  は  $\mathbb{C}^m$  の non-void compact set である。

2.  $sp(S_1, \dots, S_m)$  は projection property を満たしている。

i.e.  $S_1, \dots, S_m, S_{m+1} \in B(X)$  が commute するとき

$$sp(S_1, \dots, S_m) = \pi sp(S_1, \dots, S_m, S_{m+1})$$

であることと  $\pi(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) = (z_1, \dots, z_m)$  である。

3 Analytic functional calculus ができる。

i.e.  $H(sp(S_1, \dots, S_m))$  を  $sp(S_1, \dots, S_m)$  の近傍で analytic な function 全体の作る algebra とする。  $\{S_1, \dots, S_m\}''$  を  $S_1, \dots, S_m$  で生成される  $B(X)$  の subalgebra の double commutant とするとき homomorphism

$$\varphi : H(sp(S_1, \dots, S_m)) \longrightarrow \{S_1, \dots, S_m\}''$$

で  $\varphi(1) = I$ ,  $\varphi(z_i) = S_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) をみえすものが存在する。ここで 1 は恒等的に 1 をとる定数関数で  $z_i$  は座標関数である。

さて例 1.7 は  $B(X)$  を一般の Banach algebra に置きかえても成立するかどうか問題となる (cf. [25])。Słodkowski の方法でそのまま拡張しようとする、Banach algebra に好する Taylor spectrum が上の性質をみえすのかわかるかわからないので、できるかわかるかわからない。また Tarabusi [25] の方法は明らかに一変数的であるので、そのまま多変数化できるかわかるかわからない。

次に例 1.6 の多変数化を試みる

例 1.8. ([6])  $A$  を関数環とし  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m \in A$

とし

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad x \in M_A$$

と定義するとき、 $F(M_A) \setminus F(\partial_A^{k-1}) \neq \emptyset$  ならば

$$\begin{array}{ccc} F(M_A) \setminus F(\partial_A^{k-1}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, \dots, z_k) & \xrightarrow{\quad} & (g_1(F^{-1}(z_1, \dots, z_k)), \dots, g_m(F^{-1}(z_1, \dots, z_k))) \end{array}$$

は a.m.v. である。ここで  $M_A$  は  $A$  の maximal ideal space で  $\partial_A^{k-1}$  は  $A$  の  $(k-1)$ th Shilov - Sibony - Basener boundary である。

②  $\partial_A^0$  は  $A$  の Shilov boundary のこと、 $k \geq 1$  に対して

$$\partial_A^k = \left( \bigcup_{(f_1, \dots, f_k) \in A^k} \partial_A^0 |z(f_1, \dots, f_k)| \right) \text{ の } M_A \text{ での closure}$$

である。たとえば  $A$  が  $n$ 次元 polydisk algebra とすると

$$\partial_A^{n-1} = n \text{次元 polydisk } \Delta^n \text{ の topological boundary}$$

$$\partial_A^0 = n \text{次元 torus}$$

である。

問題点としては多変数多次元値の a.m.v. が例 1.7 や 1.8 のような a.m.v. として表現できるかどうかということがあげられると思う (定理 1.2 の多変数多次元値化)。それに対しては次の結果がある。

定理 1.3 [10]  $G$  を  $\mathbb{C}$  の bounded open set とする。

$$K: G \longrightarrow \mathbb{C}^k$$

が bounded な a.m.v. であるとする (i.e.  $\sup\{|w|: w \in K(z), z \in G\} < \infty$ ).

このとき次が成立する。

(a) separable な complex Hilbert space  $H$  と  $B(H)$  値 analytic operator function

$$T_j: G \longrightarrow B(H) \quad j=1, 2, \dots, k$$

が存在し各  $z \in G$ ,  $i, j=1, 2, \dots, k$  に対して  $T_i(z)T_j(z) = T_j(z)T_i(z)$  となり

$$\text{sp}(T_1(z), \dots, T_k(z)) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

(b) separable な関数環  $A$  と  $f, g_1, \dots, g_k \in A$  が存在して

$$G = f(M_A) \setminus f(\partial_A)$$

となり ( $M_A$  は maximal ideal space,  $\partial_A$  は Shilov boundary)

$$(g_1(f^{-1}(z)), g_2(f^{-1}(z)), \dots, g_k(f^{-1}(z))) = K(z) \quad \text{for } \forall z \in G$$

となる。

$G$  が  $\mathbb{C}^n$  の open set (bounded) のときどのようなようになるのかは現時点において筆者はわからない。

## §2 有界正則関数環の有限生成イデアルの問題への応用

$G$  上の有界正則関数環  $H^\infty(G)$  の有限生成イデアル

$f_1 H^\infty(G) + f_2 H^\infty(G) + \cdots + f_n H^\infty(G)$  がいつ  $H^\infty(G)$  に一致するか  
というのが corona 問題であり一致するための必要条件のひとつは

$$\textcircled{*} \quad \exists \delta > 0 \quad |f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)| > \delta \quad \text{for } \forall z \in G$$

である。実際上の問題はこれが十分条件かということであり、Banach algebra のことばで言うと  $G$  が  $H^\infty(G)$  の maximal ideal space の中で dense かという問題 ( $G$  を太陽とみたてて  $G$  の corona が存在しないかという問題) である。結果が得られている  $G$  は少く、 $G$  が単位円板の場合に Carleson により示された肯定的解決が最初のものである。さらに  $G$  が compact bordered Riemann surface の場合に拡張されたが、 $\textcircled{*}$  が十分条件とならないような Riemann surface の例も Cole, Nakai, Hayashi により発見されている。平面領域において  $\textcircled{*}$  が十分条件にならない場合があるかどうかは筆者は知らない。さらに2次元以上の場合には  $G$  が ball や polydisk の場合どのようになるかはまだわかっていないようである。

さて単位円板の場合の Carleson の定理は1979年 Wolff により Littlewood-Paley integral を用いた別証明が与えられた。

$\textcircled{*}$  をみたす  $f_1, \dots, f_n$  (corona data という) に対して

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1$$

となる  $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(G)$  (corona solution という) をみつけることが corona 定理の証明になるのであるが, Carleson Wolff とともに corona solution をいっぺんに  $H^\infty(G)$  からひき出してくるのではなく, より広いクラスの中から "solution" をみつけて, なんらかの方法で  $H^\infty(G)$  のつごうの良い関数に直すことを考えるわけである。Slodkowski の考え方も大きく言えばそのようなものである。そのプログラムは以下のようである。

① corona solution の値の候補者を全部あつめる。つまり multivalued function

$$K_1: \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \xrightarrow{\quad} & \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n f_i(z) w_i = 1\} \end{array}$$

を考える

②  $K_1(z) \supset K_2(z)$  なる a.m.v.  $K_2$  をみつけてくる。

③  $K_2$  から  $\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1$  となる  $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(G)$  をぬき出す。実際は

$$K_2(z) \ni (g_1(z), \dots, g_n(z)) \quad \text{a. a. } z \in G$$

となるような  $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(G)$  をみつける。

Carleson の方法あるいは Wolff の方法が多次元化できない

い、あるいは平面領域の場合に拡張できない大きな理由は、それらが duality argument によっていることによるわけである。Slodkowski の場合は有限連結領域ぐういなる成立するような duality argument より弱い結果を用いているので(それは③で用いられる)直接有限連結領域上の結果を示すことができる(また potential 論でいう regular domain における結果も直接示すことができる)。いずれにせよ現時点では duality argument 的なものを用いているため多次元化がすぐできるというわけにはいかないようである。

以下、corona 定理を含む有限生成イデアルに関する結果を  $G$  が compact bordered Riemann surface の場合に示す。ここでの方法は  $G$  が unit disk の場合を Slodkowski の方法により示し、一般の場合を Forelli [31] の projection を用いる方法により unit disk の場合に帰着されることにする。Slodkowski [11] ではもっと広い Riemann surface のクラスに対して直接的な (projection などを用いない) 方法で結果を得ているが、compact bordered Riemann surface に対する結果は以下の方が少しだけ (critical point における関数値の条件がいくなくなる) よくなっている。

定理  $\mathcal{R}$  を compact bordered Riemann surface とする。  
 $H^\infty(\mathcal{R})$  で  $\mathcal{R}$  上の有界正則関数全体の作る Banach algebra を表す。  
 $g, f_1, f_2, \dots, f_n \in H^\infty(\mathcal{R})$  が

$$|g(z)| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(z)| \quad \text{for } \forall z \in D$$

をみたしているものとする。このとき

$$g^3 \in f_1 H^\infty(\mathcal{R}) + f_2 H^\infty(\mathcal{R}) + \dots + f_n H^\infty(\mathcal{R})$$

となり、特に  $\varepsilon > 0$  に対して  $g^\varepsilon$  が  $\mathcal{R}$  上で定義されているとき

$$g^{2+\varepsilon} \in f_1 H^\infty(\mathcal{R}) + \dots + f_n H^\infty(\mathcal{R})$$

となる。

②  $g^{2+\varepsilon} = f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$  となる  $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\mathcal{R})$  でその sup norm が  $\varepsilon$ ,  $f_1, \dots, f_n$  にのみ依存する定数で表されるものがあることもわかる。

③  $\mathcal{R}$  が単位円板の場合において

$$g^2 \in f_1 H^\infty(\mathcal{R}) + \dots + f_n H^\infty(\mathcal{R})$$

となるかどうか (Wolff の問題) 筆者はわからない。

定理の証明 (と中補題などを含みながら最後まで続く)

$\mathcal{R} = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  をまず示す。 $g, f_1, \dots, f_n$  は  $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  で連続として一般性を失わない ( $g^{2+\varepsilon} = f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$  となる  $g_1, \dots, g_n$  が  $\varepsilon, f_1, \dots, f_n$  にのみ依存する

定数でおさえられることが示されるので一般の場合は normal family argument による)。また  $g(z) \neq 0$  となる各  $z \in \bar{D}$  に対して  $|g(z)| < \sum_{j=1}^n |f_j(z)|$  (等号不成立) として一般性を失わない。プログラム②では次の補題が本質的である。

補題 2.1.  $\delta > 0$  とする。実数値  $C^2$  級関数

$$P: (\log \delta, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が

- $P'(x) > 0 \quad \forall x \in (\log \delta, \infty)$
- $P'(x) \{ \exp(2P(x) + 2x) (P'(x) - 1) - 2 \} > 2(P'(x) + 1)^2$   
 $\forall x \in (\log \delta, \infty)$

をみたすとき

$$L: \underbrace{\bar{P}_\delta}_w \xrightarrow{\quad} \underbrace{2^{\mathbb{C}^n}}_w$$

$$z \longmapsto \{w \in \mathbb{C}^n: zw=1, |w - \frac{\bar{z}}{|z|^2}| \leq \exp(P(\log|z|))\}$$

は upper semi-continuous で  $P_\delta$  で a.m.v. である。さらに  $\forall \alpha > 0$  に対して、定数  $C_\alpha$  が存在して

$$\max \{ |w| : w \in L(z) \} \leq C_\alpha |z|^{1+\alpha} \quad \text{for } \forall z \in P_\delta$$

をみたす  $\rho$  が存在する。ここで  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n)$

$$zw = \sum_{i=1}^n z_i w_i, \quad |z| = \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2}, \quad P_\delta = \{ z \in \mathbb{C}^n : |z| > \delta \}, \quad \bar{P}_\delta \text{ は}$$

その closure である。

証明  $r \geq \frac{1}{2} \log \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{\alpha}) + \log 2$  であれば

$$P(x) = r + (1+\alpha)x + \frac{\alpha}{8+4\alpha} \exp(-(4+2\alpha)x)$$

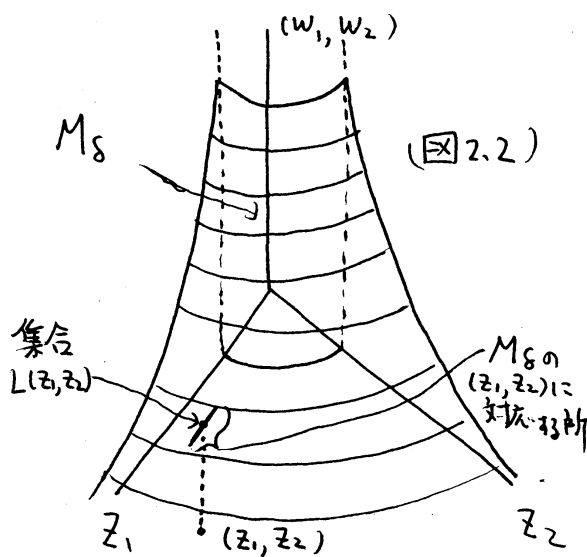
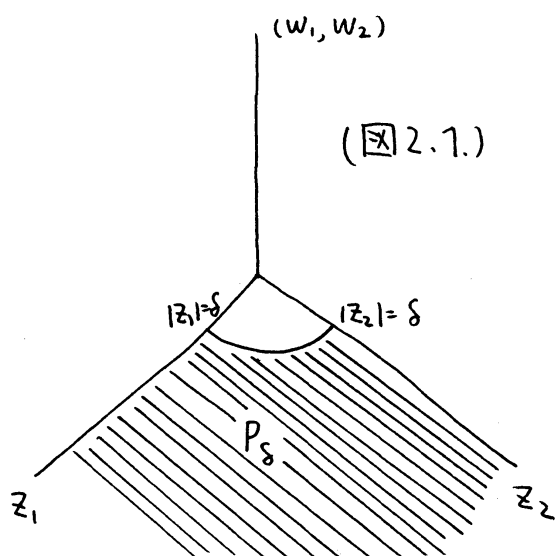
は2つの微分不等式と  $\max\{ |w| : w \in L(z) \} \leq C_\alpha |z|^{1+\alpha}$  を  $C_\alpha = (\frac{4}{\alpha}(1+\frac{1}{\alpha}) + 1)^{1/2}$  でみたすことがわかる。

$L$  が a.m.v. であることを言うために、 $gr(L)$  が  $n$  次元 analytic manifold の union になっていることを示せばよい。なぜなら、 $gr(L) \subset \mathbb{C}^{2n}$  であるのでもしそのような union で  $gr(L)$  が成っているとする  $gr(L)$  は  $(n-1)$ -maximum set となり補題 1.1 より  $L$  が a.m.v. であるといえるからである。

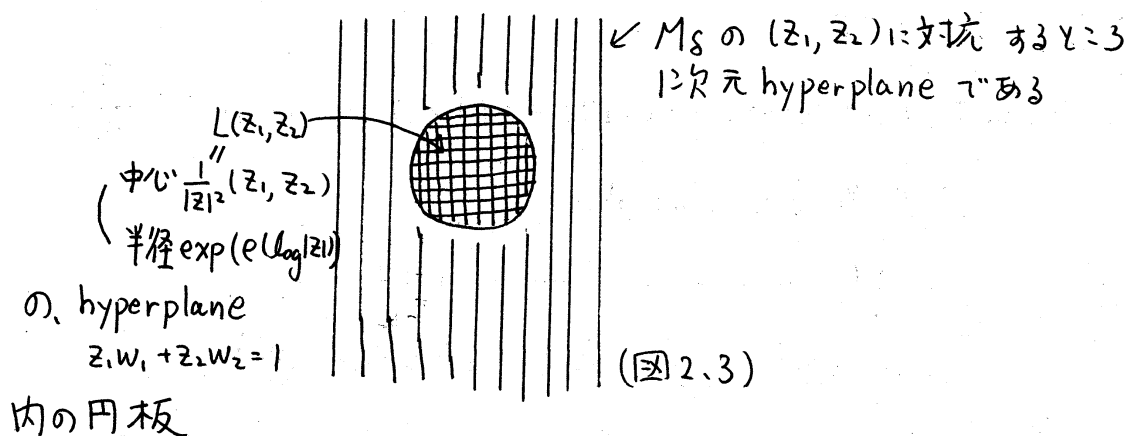
以下  $n=2$  の場合を考える。一般の場合は  $n$  に関する数学的帰納法による。

$$(z, w) = (z_1, z_2, w_1, w_2) \in gr(L)$$

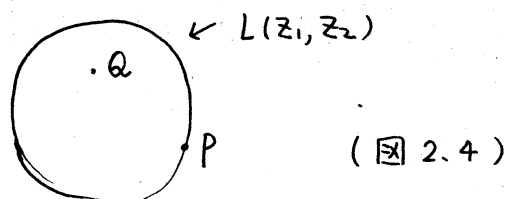
とする。  $z_2 \neq 0$  と仮定して一般性を失わないのでそのように仮定する。 ここで  $gr(L)$  をよくみてみる。



ここで  $M_g = \{(z, w) \in \bar{P}_g \times \mathbb{C}^2 : zw = 1\}$  とする。各  $(z_1, z_2)$  に対応する  $M_g$  の部分は複素 1 次元 hyperplane で  $L(z_1, z_2)$  はその中の円板である (図 2.3)。



上の円板が、 $(z_1, z_2)$  が  $\bar{P}_g$  内を動くのに対応して、 $\mathbb{C}^4$  内を動いてできたのが  $gr(L)$  である。これが 2 次元 analytic manifold の union となっていることを示せばよい。



$gr(L)$  の点がある円板の内部にある時 (図 2.4 の  $Q$ ) は  $(z_1, z_2)$  が 2 次元方向に動けるので  $Q$  を通り  $gr(L)$  に含まれる 3 次元 analytic manifold が存在することは明らかである。問題は、図 2.4 の  $P$  のような点を通る 2 次元 manifold の存在である。

まず  $\exists x > \delta$  に対して  $p = (0, \exp(x), \exp(\exp(x)), \exp(-x))$  の場

合を考える。(実際このような点は  $g_t(L)$  のどこかの点である)

$$U = M_g \setminus g_t(L)$$

$$U' = \{(z_1, z_2, w) \in P_g \times \mathbb{C} : \varphi(z_1, z_2, w) < 0\}$$

とする。ここで

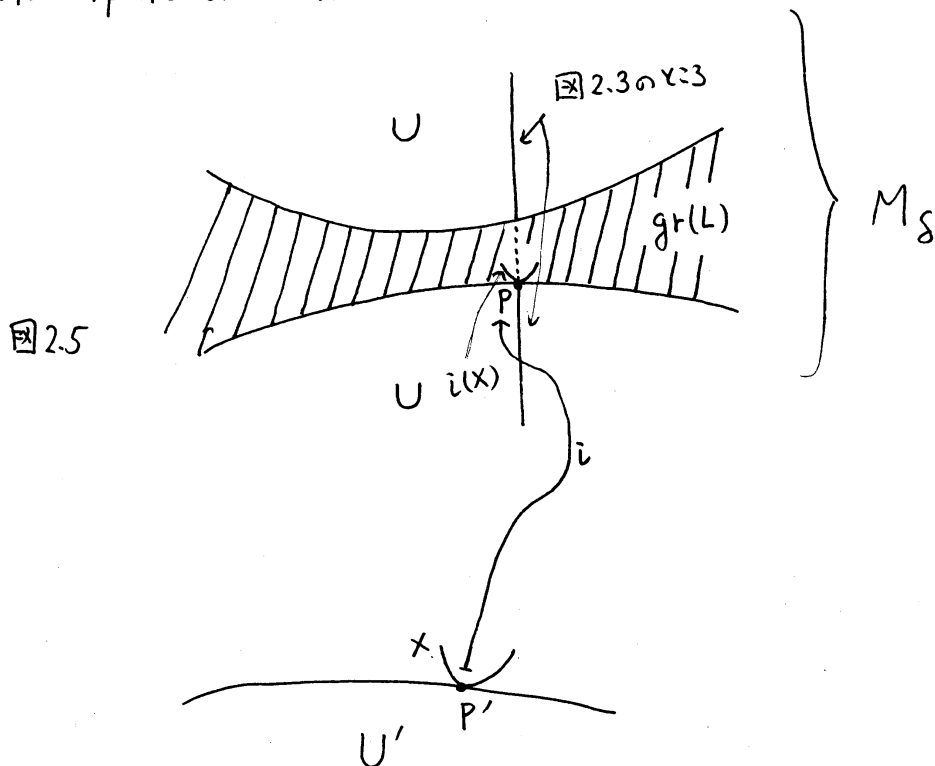
$$\varphi(z_1, z_2, w) = \log|z_2| - \log|z_1| + \rho(\log|z_1|) - \log|w| - \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}$$

とする。この時 biholomorphic

$$i : \underset{w}{U'} \longrightarrow \underset{w}{U \setminus \{0\}}$$

$$(z_1, z_2, w) \longmapsto (z_1, z_2, w, \frac{1 - z_1 w_1}{z_2})$$

は  $p' = (0, \exp(x), \exp(\rho(x)))$  の近くを含むような所に bi-holomorphic extension できる。(図 2.5)



このとき  $p'$  を通り  $U'$  の外側にある 2次元 analytic manifold  $X$  (図 2.5 参照) がみつければ、それを biholomorphic  $\bar{c}$  でうつしたものが  $(\bar{c}(X))$  さがしている所の、 $p$  を通り  $gr(L)$  に含まれる 2次元 analytic manifold になる。  $X$  の存在は次の補題 2.2 により保証される。

補題 2.2.  $p$  は 題 2.1 の条件をみたし  $\varphi$  は補題 2.1 の証明の中で定義された関数とする。するとこのとき

- $(grad \varphi)(p') \neq 0$
- $L_{p'}(\varphi, t) > 0$  for  $\forall t = (t_1, t_2, t_3) \in T_{p'}(U')$

となる。ここで  $T_{p'}(U')$  は  $U'$  の  $p'$  における complex tangent space で  $L_{p'}(\varphi, t)$  は  $\varphi$  の Levi form である。

この証明は計算をするだけなので省略して補題 2.2 を用いて補題 2.1 の証明を続ける。

$(grad \varphi)(p') \neq 0$ ,  $L_{p'}(\varphi, t) > 0$  が成立すると  $p'$  の近くの biholomorphic map で  $U'$  の  $p'$  の近くの部分は strictly convex (定義関数  $r$  で定義される  $C^2$  boundary を持つ領域  $\Omega$  に対して  $\varphi \in \partial\Omega$  で  $\Omega$  が strictly convex とは  $r$  の real Hessian が  $p$  で正ということ) な領域  $U''$  にうつされる [32; Theorem II.2.17]。

そこで  $U''$  の、 $p'$  に対応する点  $p''$  を通り  $U''$  と交わるような 2次元

hyperplane の  $P'$  の近くの部分を上の biholomorphic map でひきき  
 としてやったものが、 $P'$  を通り  $U'$  と交わらない 2 次元 analytic  
 manifold になる。(図 2.6 参照)

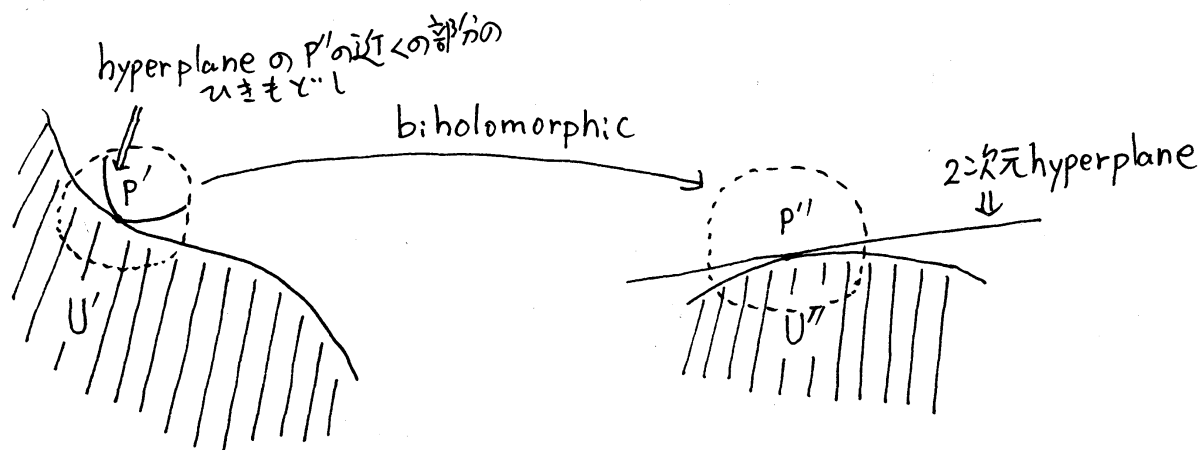


図 2.6

次に一般の  $P$  の場合を考える。  $P$  が disk の boundary に  
 あるので (図 2.4)  $P = (w_1, w_2)$   $L(z_1, z_2)$  とおくと

$$(w_1, w_2) = \left( \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}, \frac{\bar{z}_2}{|z_1|^2} \right) + t(z_2, -z_1),$$

$$|t| = \frac{1}{|z_1|} \exp(\rho(\log |z_1|))$$

となる複素数  $t$  がとれる。この  $t$  に対して  $2 \times 2$  行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{t}{|t|} \cdot \frac{z_2}{|z_1|} & \frac{-t}{|t|} \cdot \frac{z_1}{|z_1|} \\ \frac{\bar{z}_1}{|z_1|} & \frac{\bar{z}_2}{|z_1|} \end{pmatrix}$$

とおくと  $A$  は unitary 行列である。  $z \in \bar{P}_S$  (resp.  $P_S$ )

に対して、 $A$  が unitary であることより  $Az \in \bar{P}_S$  (resp.  $P_S$ )

であることが分かる。  $A$  を用いて定義される  $\mathbb{C}^4$  から  $\mathbb{C}^4$  への biholomorphic map

$$\begin{array}{ccc} h^A : \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{C}^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z, w) & \longmapsto & (Az, \bar{A}w) \end{array}$$

により  $gr(L)$  は不変であることが分かる。 つまり

$$h^A(\{z\} \times L(z)) = \{Az\} \times L(Az) \quad \forall z \in \bar{P}_S$$

である。 さうに上の  $p = (w_1, w_2)$  は次の形になる

$$h^A(p) = (0, |z|, \exp(\rho(\log|z|)), |z|^{-1})$$

となる。 前のことから、このような  $h^A(p) \in gr(L)$  に対しては  $h^A(p)$  を通り  $gr(L)$  内にある 2次元 analytic manifold が存在することがわかっていたので、その manifold を  $h^A$  でひきもどせば、 $h^A$  で  $gr(L)$  は不変だから、そのひきもどされた 2次元 manifold が求めるものである。 以上で  $L$  が a.m.v. であることも示された。

補題 2.1 を用いて、プログラム②の  $K_2$  を定義する。 まず  $\varepsilon > 0$  に対して  $\varepsilon > \alpha > 0$  なる  $\alpha$  をひとつ選び、この  $\alpha$  に対し補題 2.1 の後半の不等式  $\max\{|w| : w \in L(z)\} \leq C_2 |z|^{1+\alpha}$  が成立するような  $\rho$  をとり、それに対して  $L$  を補題 2.1 のように定める。 すると  $L$  は a.m.v. なので

$$K_2 : \begin{array}{ccc} \bar{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^n \\ z & \xrightarrow{\quad} & \begin{cases} g^{1+\varepsilon}(z) L(\frac{f_1}{g}(z), \dots, \frac{f_n}{g}(z)) & \text{if } g(z) \neq 0 \\ \{0\} & \text{if } g(z) = 0 \end{cases} \end{array}$$

とよく  $K_2$  は closed disk  $\bar{D}$  で upper semicontinuous (実際は continuous) で  $D$  で analytic な multivalued function となる。  
 また  $L$  の定義から、 $\forall z \in \bar{D}, \forall w \in K_2(z)$  に対して

$$\frac{f_1}{g}(z)w_1 + \dots + \frac{f_n}{g}(z)w_n = g^{1+\varepsilon}(z) \quad \text{if } g(z) \neq 0$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{if } g(z) = 0$$

となる。よって

$$f_1(z)w_1 + \dots + f_n(z)w_n = g^{2+\varepsilon}(z) \quad \text{for } \forall z \in \bar{D}, \forall w \in K_2(z)$$

となる。この  $K_2$  がプログラム ④ ② で求めたかった a.m.v. のひとつである。

③ 以上、プログラム ④ ② の部分は多変数の Ball, polydisk などに對する  $H^\infty$  においても同様な結果が成立しそうである。現時点では  $K_2$  (多変数の) は weak a.m.v. 位になりそうであるが、それでも悪くはない。

次にプログラム ④ ③ の部分を実行する。補題 2.3 かその中心部分であるが、現時点でわかっている(筆者が)証明方

法は多分に一変数的な結果（しかも連結度が強い場合の）を用いているために、すぐに多変数化できないことになっている。

補題 2.3 [16]  $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  とする。 upper semi-continuous non-void compact set valued function

$$K : \bar{D} \longrightarrow 2^{\mathbb{C}^n}$$

が  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  で a.m.v. であり、さらに任意の  $e^{i\theta} \in \partial D$  に対して  $K(e^{i\theta})$  が convex であるとする。この時、 $H^\infty(D)$  の関数  $g_1, \dots, g_n$  が存在して、その non-tangential boundary values は

$$(g_1(e^{i\theta}), \dots, g_n(e^{i\theta})) \in K(e^{i\theta}) \quad \text{a.a. } e^{i\theta} \in \partial D$$

をみたす。ここで a.a.  $e^{i\theta}$  は  $\partial D$  の Lebesgue measure に関して、測度 0 であるような  $\partial D$  のある集合をのぞいた任意の点  $e^{i\theta}$  を表す。

補題 2.3 の証明の前に、補題 2.3 を用いて  $\mathcal{R} = D$  の場合の定理の証明を示しておく。前ページで定義した  $K_2$  に対して補題 2.3 を適用して  $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(D)$  をみつけると

$$f_1(e^{i\theta})g_1(e^{i\theta}) + \dots + f_n(e^{i\theta})g_n(e^{i\theta}) = g^{2+\epsilon}(e^{i\theta})$$

$$\text{a.a. } e^{i\theta} \in \partial D$$

となる。また

$$\max \{ |w| : w \in L(z) \} \leq C_\alpha |z|^{1+\alpha}$$

であるから

$$\begin{aligned} \max \{ |w| : w \in K_z(z) \} &\leq C_\alpha |g(z)|^{1+\varepsilon} \left( \sum_{j=1}^n \left| \frac{f_j}{g}(z) \right|^2 \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \\ &= C_\alpha |g(z)|^{1+\varepsilon-\alpha} \left( \sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2 \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \end{aligned}$$

となり、 $\varepsilon > \alpha$  であるから  $\max \{ |w| : w \in K_z(z), z \in D \}$  は  $\varepsilon$  と  $f_1, \dots, f_n$  の sup norm にのみ depend する定数でおさえられることがわかる。以下 normal family argument による routine により  $\mathcal{R} = D$  の場合の証明は終わる。

補題2.3の証明.  $K|D$  が a.m.v. と言うことは、その一変数 analytic polynomial の絶対値が  $gr(K|D)$  で local maximum property を持つということにほかならない(補題1.1)。また  $K$  は upper semi-continuous なので  $gr(K|\partial D)$  は compact である。よって

$$gr(K) \subset gr(K|\partial D)^\wedge$$

となる。ここで  $gr(K|\partial D)^\wedge$  は  $gr(K|\partial D)$  の polynomial convex hull である。 $w_0 \in K(0)$  とすると  $w_0 \in gr(K|\partial D)^\wedge$  であるので、 $gr(K|\partial D)$  上の  $(0, w_0)$  の representing measure が存在する。即ち

$\exists \mu : gr(K|\partial D)$  上の regular Borel probability measure

で、 $z, w$  の任意の analytic polynomial  $p(z, w)$  に対して

$$p(0, w_0) = \int_{gr(K|\partial D)} p(z, w) dm(z, w)$$

となる。ここでこの  $m$  を projection

$$\begin{array}{ccc} \partial D \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \partial D \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z, w) & \longmapsto & z \end{array}$$

に関して disintegrate する。つまり  $gr(K|\partial D)$  の任意の連続関数  $f$  に対して

$$\int_{gr(K|\partial D)} f dm = \int_{\partial D} \left( \int_{K(z)} f d\sigma_z(w) \right) dm^*(z)$$

となる  $\partial D$  上の regular Borel probability measure  $m^*$  と  $m^*$  に関する測度 0 のある集合をのぞいた  $\partial D$  の各点  $e^{i\theta}$  に対する  $K(e^{i\theta})$  上の regular Borel probability measure  $\sigma_{e^{i\theta}}$  が存在する。

次に  $m^*$  が実際 Lebesgue measure  $\frac{d\theta}{2\pi}$  であることを示すが、この部分以後が一変元的 (多変数の場合に単純に拡張できない) なところである。  $z$  の多項式  $p(z)$  を  $z$  と  $w$  の多項式で  $w$  の項がないものとみると

$$\begin{aligned} p(0) &= \int_{gr(K|\partial D)} p(z) dm \\ &= \int_{\partial D} \left( \int_{K(z)} p(z) d\sigma_z(w) \right) dm^*(z) \end{aligned}$$

となり、 $\sigma_z$  が各  $z$  に対して  $w$  を変数とする probability measure なの

$$= \int_{\partial D} p(z) dm^*(z)$$

となる。よって  $dm^*$  は 0 の  $\partial D$  上の representing measure

となるが、その一意性がいっているので  $dm^* = \frac{d\theta}{2\pi}$  であることがわかる。最後に、 $\sigma_z$  の定義されている各  $z \in \partial D$  ( $m^*$  に関して almost everywhere に定義されていたので結局  $\partial D$  上の Lebesgue measure  $\frac{d\theta}{2\pi}$  に関して almost everywhere に定義されていることになる) に対して

$$g_j(z) = \int_{K(z)} w_j d\sigma_z(w) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

により定義された  $g_1, \dots, g_n$  が求める  $H^\infty(D)$  の関数 (正確には  $H^\infty(D)$  の関数の boundary function) となるので、そのことを示す。まず  $K(\partial D)$  が compact であることにより、 $g_j(z) \in L^\infty(d\theta/2\pi)$  であることがすぐわかる。さらに  $K(z)$  ( $z \in \partial D$ ) が convex であることから  $g_j(z) \in K(z)$  であることもわかる。あとは  $g_j$  の解析性を示すだけでよい。

任意の自然数  $k$  に対して

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} z^k g_j(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{\partial D} z^k \left( \int_{K(e^{i\theta})} w_j d\sigma_{e^{i\theta}}(w) \right) dm^* \\ &= \int_{gr(K|\partial D)} z^k w_j dm \\ &= 0 \end{aligned}$$

が各  $j=1, 2, \dots, n$  に対して成立する。よって  $g_j \in H^\infty(D)$  である。

最後に  $\mathcal{R}$  が一般の場合 (compact bordered Riemann surface の場合) に定理を証明する。ここでは Forelli [31] の projection を用いる方法により  $\mathcal{R} = D$  の場合の結果に帰着させる方法をとる。Slodkowski [11] では finite connected domain 上の a.m.v. に対する selection theorem (補題 2.3 のような形の定理) を証明し、 $\mathcal{R}$  が Green 関数の存在するような Riemann surface に対する結果 (critical point に対する条件つきで) を、 $\mathcal{R} = D$  の場合を経由せずに、直接示している。しかし compact bordered Riemann surface 上の結果としては、以下の方が、critical point 上での  $f_1, \dots, f_n$  の条件がない分だけ良くなっている。

hyperbolic Riemann surface (universal covering が  $D$  にとれるような Riemann surface) では universal covering map  $\pi$  を用いて  $H^\infty(\mathcal{R})$  から  $H^\infty(D) \wedge$  の isometric isomorphism

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\pi} : H^\infty(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^\infty(D) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ f & \xrightarrow{\quad} & f \circ \pi \end{array}$$

が定義できて、

$$\widetilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R})) = \{f \in H^\infty(D) : f \circ \gamma = f \text{ for } \forall \gamma \in T\},$$

ここで  $T$  は covering transformation group である。よって  $H^\infty(\mathcal{R})$  の問題は  $H^\infty(D)$  の closed subalgebra に対する問題であるとみることができるわけである。特にここで考えてい

るような問題は次のような projection の存在さえ示されれば、 $\mathcal{R} = D$  の場合に帰着できる。

$$P: H^\infty(D) \longrightarrow \tilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R}))$$

$$\text{s.t. } P(fg) = fP(g) \text{ for } \forall f \in \tilde{\pi}(H^\infty(\mathcal{R})), \forall g \in H^\infty(D)$$

実際上のような  $P$  が存在するとする。  $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\mathcal{R})$  が

$$|g(z)| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(z)| \quad \forall z \in \mathcal{R}$$

をみたすとする。この時  $g \circ \pi, f_1 \circ \pi, \dots, f_n \circ \pi \in H^\infty(D)$  であり当然

$$|g \circ \pi(w)| \leq \sum_{j=1}^n |f_j \circ \pi(w)| \quad \forall w \in D$$

をみたしているのので、 $\mathcal{R} = D$  の場合の結果から、 $H^\infty(D)$  の関数  $g_1, \dots, g_n$  で

$$(g \circ \pi)^{2+\varepsilon} = (f_1 \circ \pi)g_1 + \dots + (f_n \circ \pi)g_n$$

をみたすものが存在する。ここで両辺に上の  $P$  をほどこすと

$$(g \circ \pi)^{2+\varepsilon} = (f_1 \circ \pi)P(g_1) + \dots + (f_n \circ \pi)P(g_n)$$

となり、 $\tilde{\pi}^{-1}(P(g_1)), \dots, \tilde{\pi}^{-1}(P(g_n)) \in H^\infty(\mathcal{R})$  が求める関数である。実際

$$g^{2+\varepsilon} = f_1(\tilde{\pi}^{-1}(P(g_1))) + \dots + f_n(\tilde{\pi}^{-1}(P(g_n)))$$

となる。

そこで  $P$  をさがしてみよう。まづ  $\mathcal{R}$  が annulus

$\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$  の場合は簡単である。それは、covering transformation group が cyclic group  $\{z^k : k=1,2,\dots\}$  であるからで、実際、 $h \in H^\infty(D)$  に対して

$$P(h) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} h \circ z^s$$

と定義すればよいことがわかる。しかしこのような"平均"をとるという考え方では一般の plane domain あるいは Riemann surface の場合はうまくない。それは、一般の covering transformation group は 2 generators 以上の free group を含んでいるから amenable group になっていない、つまり"平均"がとれないからである。Forelli [31] は compact bordered Riemann surface の場合は conditional expectation を用いて  $P$  をつくる方法を示した。

$T$  を  $\mathcal{R}$  の transformation group とすると  $T$  の各要素は  $D$  の Möbius transformation であって、たかだか  $\partial D$  上の transformation group が与えられる。それを  $\partial T$  と書くことにする。 $L^\infty(d\theta/2\pi)$  の元で  $\partial T$  不変なもの全体を  $L^\infty/\partial T$  と書き、 $H^\infty/\partial T$  も同様に定義する。すると

$$\mathcal{N}(H^\infty(\mathcal{R})) \text{ の boundary functions} = H^\infty/\partial T$$

となる。このとき projection

$$P: H^\infty \longrightarrow H^\infty/\partial T$$

$$\text{s.t. } P(fg) = f P(g) \text{ for } \forall f \in H^\infty/\partial T, \forall g \in H^\infty$$

をみつければよい。ここで  $H^\infty$  は  $H^\infty(D)$  の boundary function 全体を表す。

$\Sigma$  :  $\partial D$  の Lebesgue measurable set 全体の作る  $\sigma$ -field

$\Sigma/\partial T$  :  $\partial T$  不変な  $\Sigma$  の元全体の作る  $\sigma$ -field

とする。このとき  $\forall f \in H^\infty$  に対して

$$\int_X E f \frac{d\theta}{2\pi} = \int_X f \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{for } \forall X \in \Sigma/\partial T$$

となる  $E f \in L^\infty/\partial T$  が存在するが、一般には  $E f$  は解析性をもたない。しかし  $\mathcal{R}$  が compact bordered Riemann surface のときは、その  $T$  の構造により ( $T$  の commutator subgroup  $T'$  に対して  $T/T'$  の generator の最小個数があまり大きくなることを理用する。plane domain のときは穴の個数 - 1) ある  $\phi \in H^\infty$  が存在し

$$P(f) = E(\phi f) \quad \forall f \in H^\infty$$

により  $P$  を定義すると、この  $P$  が求める projection になることを示した。

# a.m.v 関係の参考文献

1. Z. Slodkowski and W. Zalazko . On joint spectra of commuting family of operators, Studia 1974 L (1974) 127 - 148
2. Z. Slodkowski : An infinite family of joint spectra, Studia LXI (1977) 239 - 255
3. ——— : On subharmonicity of capacity of the spectrum, Proc. A. M. S. 81(1981) 243 - 249
4. ——— : Analytic set valued functions and spectra, Math. Ann. 25(1981) 363 - 386.
5. ——— : A criterion for subharmonicity of a function of the spectrum, Studia LXXV (1982) 37 - 48
6. ——— : Analytic multifunctions , q-plurisubharmonic functions and uniform algebra, Cont. Math. 32(1984) 243 - 258
7. ——— : Polynomial hulls with convex sections and interpolating spaces, Proc. A. M. S. 96(1986) 255 - 260
8. ——— : Operator with closed range in spaces of analytic vector-valued functions, J. Funct. Anal. 69(1986) 155 - 177
9. ——— : Analytic perturbation of the Taylor spectrum, Trans. A. M. S. 297(1986) 319 - 336
10. ——— : Analytic set valued selection and its application to the corona theorem topolynomial hulls and joint spectra, Trans. A. M. S. 294(1986) 367 - 377
11. ——— : On bounded analytic functions in finitely connected domains Trans. A. M. S. 300(1987) 721 - 736
12. Ransford, Open mapping, inversion and implicit function theorems for analytic multivalued functions, Proc. London Math. 49(1984) 537 - 562
13. ——— : On range of an analytic multivalued function, Pac. J. 123(1986) 421 - 439

14. ——— : Interpolation and extrapolation of analytic multivalued functions, Proc. London Math. 50(1985) 480 - 504
15. B. Berndtson and T.J. Ransford, Analytic multi functions -equations and a proof of the corona theorem, Pac. J. 124(1986) 57 - 72
16. H. Alexander and J. Wermer, Polynomial hulls with convex fibers, Math. Ann. 27(1985) 99 - 109
- 17, 18. ——— : On the aproximation of singularity se s, Pac. J. 104(1983) 263 - 268;  $\mathbb{U}$ , Michigan J. Math. 32(1985) 227 - 235
19. B. Aupetit, Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras, Advance 44(1982)18 - 60
20. ——— : Geometry of pseudoconvex open sets and distribution of values of analytiv multivalued functions, Contemporary Math. 32(1984) 15 - 34
21. B. Aupetit and J. Zemánek : On zeros of analytic multivalued functios, Acta Sci. Math. 46(1983) 311 - 316
22. B. Aupetit and J. Wermer, Capacity and uniform algebra, J. Funct. Anal. 28(1978) 386 - 400
23. J. Wermer, The hull of a curve in  $C^n$ , Ann. Math. 68(1958) 550 - 561
24. E. Vesentini, On subharmonicity of the spectral radius, Boll. un. Mat. Ital. 4(1968) 427 - 429
25. E.C. Tarabusi, An elementary proof of Slodkowski's theorem, Proc. A. M. S. 99(1987) 783 - 784
26. R.F. Basener, Several dimensional property of the spectrum of a uniform algebra, Pac, J. 74(1978) 2977 - 306
27. J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6(1970) 172 - 191
28. ——— : The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125(1970) 1 - 38

29. M. Schechter, On the spectra of operators of tensor product, J. Funct. Anal.  
4(1969) 95 - 99
30. Z. Słodkowski, Uniform algebra and analytic multi functions, Atti Acc. Lincei  
Rend. fis. S. V , vol. LXXV, (1983) 9 - 1

### その他の文献

31. F. Forelli, Bounded holomorphic functions and projections, Illinois J. Math.  
10(1966)
32. R.M. Range, Holomorphic functions and integral representations in several  
complex variables, Graduate Texts in Math., 108 Springer-Verlag