

数学教育学(者)は我々(教科専門)に何を求めているか？

鹿児島大学教育学部 安井 孜 (Yasui tsutomu)
Faculty of Education, Kagoshima University

1 動機

動機-1 我々は、京都大学数理解析研究所における短期共同研究(2008年～)で『数学教師に必要な数学能力』と言う語を使い続けている。「数学能力」がどのような能力を意味するのであろうか。少なくとも、学校教育の教育現場に現れる数学及びその歴史的・社会的背景となる知識を持つことは要求されるであろうが、もちろん、それだけでとは思われない。教育現場、社会から求められている、大学で身につける数学能力とは何か、大学の教員は学生にどのような能力を身につけさせることができるのか。丹羽雅彦ら [21],[23], 及び、蟹江幸博ら [13] の提案があるが、それについて、この共同研究の間で、更に深い議論をする必要があるのではないか。

丹羽らは、教員養成系大学・学部の数学専門科目によって育成すべき資質・能力として、次のように2点、挙げている [21, p. 76], [23, p. 108].

- (1) 算数・数学を学校教育において教えることの意義を理解し、数学の本質を正しく認識して自信を持って数学を指導できる能力.
- (2) 抽象的思考に慣れ、論理的に正しい思考を展開し表現できる能力.

蟹江らは、教育を捉えるための観点として次の4種の観点を挙げ [13, p. 28],

- ・数学の学問的標準の観点
- ・一般領域における使用の観点
- ・教材化の観点
- ・外在的に数学を規定する原理の観点

「教師に必要な数学能力」を次のように規定している [13, p. 14, p. 29]:

数学を教育的観点から捉える事のできる能力である.

筆者は、丹羽らの「教えることの意義」を、「教育の目的と教育の予想される、または、期待される効果」と理解している。「数学の本質」は難しい。「数学とは何か」というタイトルの書籍も出版されているが、その本を読めば解るというものでもない。数学者は、教育・研究を通じてなんとなく、「これは数学の本質的な部分」というのを体得しているが、それを文章にするのは難しい。それでも、数学教師にとって「数学の本質を学ぶことの必要性」を、日本数学会発行、数学通信第6巻(2001)[7, p.

47, 1. 義務教育諸学校の教員が数学の本質を学ぶことの必要性]で、8点に渡り述べている。「数学の本質」について、多くの数学者がいろいろ発言している [39] が、視点を変えればどれも正しい。「教育的観点」も、蟹江らの提案を受けてからの議論をしておらず、深化させてはこなかった。

「数学能力」に関して、数学者の方では、この種の発言は当然少ないが、小平 (1983)[14, p.251(このままでは日本は危い)] は次のように述べている：

(大学生)の学力というのは、知識の量ではなく、自分でものを考える力。

これは、一般に大学生の学力について述べたものであり、数学教師志望の大学生に特化したものではない。

「教師の数学能力」に対して、数学教育学者の方では、栗村 (1998)[8, p. 227] が、教師の専門性として、次のように述べている：

教科特有の教科観や教育観と指導における場面即応の思考力、場面を読む力や判断する力、意思決定をする力。

また、鈴木 (2011)[33, p.169] は

数学教員に必要な最低限の力量—数学自体と子どもの認識発展に係る力

と述べている。では、具体的に何をすれば(させれば)数学能力、専門性、力量が学生の身に付くのか。研究の合間に考えて解決されるような問題ではない。数学教育学者らとの共同の作業が必要であろう。

動機—2 数学の教科専門担当と教科教育担当は、互いに近くに研究室を持ち、一緒に、同一の学生を対象に教員養成をしながら、互いに干渉し合わないことで、独立に教育をしていないか [4, I, 2 (5), II, 1, (2)]。数学教育学者は、彼らのサークルの中で、教師養成の、特に教科の内容に関して、我々に陰にいろいろと要求をしているのではないか。我々は、数学教育学をあまりに知らな過ぎるのではないか。

鈴木 (2011)[32, p. 262] はまた、

専門科目の数学にあっても、学校数学をカバーする内容を創出すべきである。

と教科専門担当者、即ち数学者、に要求し、小学校の教師向けの科目を具体的に挙げている。

遠山 (1981) [35, シリーズ 13, p. 65] も次のように言っている。

これまでは、大学では教育は真剣に問題にされなかった。そのなかでもとくに重要なのは、教育系大学における数学と数学教育の内容と方法を早急につくり上げることである。

本論の構成は次のとおりである。まず、動機—2に関連して、「数学教育学とはどのような学問か」を、文献から調べてみる。次に、「数学教育学者は我々に何を要求しているのか」、これも文献から調べてみる。

文献は第2次世界大戦後のものに限定する。これ以前には、このような問題に関し著作を残した、数学教育出身の数学教育学者が見つからなかったことがその理由である。もしかすると、調査漏れがあるかも知れないが。

2 数学教育学とは

この節では、数学教育(学)の目的と目標、または数学教育の意義を、主として、数学教育学者はどのように考えているのか、戦後の資料から調べてみる。

2.1 数学教育学の特徴

数学教育の英語は Mathematics Education, 数学教育学の英語も Mathematics Education で統一されているようである¹。かつては、Pedagogy of Mathematics や Mathematical Education も使われているが、これらは30年くらい前から使われていないとのことである。数学教育のときは、Teaching Mathematics や Learning Mathematics を使うことが増えてきたらしい。

$$\text{数学教育学} = (\text{数学教育}) + (\text{学})$$

であって、

$$\text{数学教育学} \neq (\text{数学}) + (\text{教育学})$$

と強く主張されている。(塩野健之祐 [30], 平林 [10], 中原 [18])

学問としての数学教育学の対象は、当然、数学教育であり、その特徴は次のように表現される：

- (1) 実践の学(教育現場で使う)
- (2) 規範性をもつ(陶冶性より)
- (3) 科学的な実証性をもつ(学問として)。

平林一栄(1987)[10, p. 28]は、次のように主張する。

数学教育は、いふなれば実践学である。

中原は、著書(学位論文)[18, p. 28]と日本数学教育学会編の書籍[6, p. 4]の中で、学問としての性格(目的も含んでいる)を次のように述べている：

¹ 日本数学教育学会の英訳は Japan Society of Mathematical Education となっている

- (1) 数学教育を対象とする学問である.
- (2) 数学を通して人間形成を追求する学問である.
- (3) 規範性と実証性とを有する学問である.
- (4) 数学教育の理論と実践の総合的研究を行う学問である.
- (5) 数学教育の思想と方法の総合的研究を行う学問である.

2.2 数学教育の目的 (数学教育学者の視点)

数学教育の目的, 教育上の価値について, いろいろな人がいろいろな発言をしているが, 数学教育学者の間で, 次の3点は共通のようである. (和田 [38], 長崎 (2007) [17], 中原 (1995) [18], (2010) [19], ほか)

- (1) 実用性, (2) 陶冶性, (3) 文化性 (教養性).

論理的思考, 数学的处理は陶冶性に含まれる. 実用性, 陶冶性, 文化性のウェイトには個人差がある.

数学教育の目的に関する数学教育学者の見解を年代順に幾つか拾ってみる. 第1節で述べたように, 戦後, 国内で発表になったものに限定する.

塩野直道 (1946) [30] は数学の (教育的) 価値を, 次の3点に要約した.

- (1) 用具性に基づいて, 人間の生活, 社会生活を向上させる.
- (2) 現実の物質的精神的社会的の世界の真実を認識し新たな真実の世界を展開する.
- (3) 人間の論理・直観の働きを盛んにし, 真理感を満足せしめ, 人間精神を向上させる.

1 は実用的価値であり, 2 は文化的価値であり, 3 は精神的価値である.
[p. 95]

さらに, 数学教育の目的に関し, こう述べている.

天地自然および個人社会の物質的精神的生活の中に, 数量的・空間的な秩序を見いだし, 秩序を打樹て, 秩序ある思考, 行動をなし, 生命の発展を期する. [p. 110]

赤根也 (1979) [27] の場合:

1950年代以降, 算数・数学教育は, 「実用説」「教養説」「形式陶冶説」という三つの柱によって支えられることとなった. (p. 320)
(前の方で, 算数・数学教育の目標を考え)

体系的・論理的に思考を進めていく態度を身につけさせること。
 現象に対する数学的モデルをつくる能力を養うこと。
 数学の問題解決のために必要な、最小限度の知識・技能及び考え方・態度を身につけさせること。(p. 324)

和田義信(1980)[38, 第3巻]の場合：

- 第一に(中略), 教育というのは文化の継承…(p. 16)
- 第二番目には「役立つ」, 「有用性」(p. 17)
- 第三番目には, 感性面(筆者注：美しさのこと)であります(p. 19)

中島健三(1982)[20]の場合：

実用的な目的, 文化教養的な目的, 陶冶的な目的, 創造的实践の体得と観賞。

平岡忠(1992)[11]の場合：

実用的価値, 訓練的・陶冶的価値, 文化的・教養的価値, 精神的・情意的価値, 交信的・伝達的価値の5つ。

杉山 吉茂(1999)[31, p. 12]は「なぜ数学を教えるのか」に対し,

- ア 他の教科(学問)を学習するための基礎。
- イ より進んだ数学を学習するため。
- ウ 数学の学習を通して身につけることができる力(例えば, 自立心, 創造力)。
- エ 知的楽しみを与える。

中原忠男は, (2000)[19, p. 48]で,

算数・数学教育の目的は, 通常次の3つの視座²から, 構成され, 論じられる。

と述べた後, 指導要領の改訂に伴い, これからの算数・数学教育の目的として次の4点を挙げている。[19, p. 51]

- (1) 創造性の基礎を培う。
- (2) 自立性の育成。
- (3) 数理認識能力の育成。
- (4) 算数・数学という文化の享受。

(1)は指導要領に即したものと著者が認め, (3)は「人間形成につながり, (中略), 実用的目的とも関わる」と述べている。筆者は, この4点を, 従来の目的(実用性, 陶冶性, 文化性)を, 指導要領改訂に伴い, 再編成したもののように理解している。

² 3つの視座とは, 陶冶的目的, 実用的目的, 文化的目的のこと

この10年後、中原は共通な視点として次の3点を挙げている(2010)[6, p. 24]:

- (1) 人間形成的目的(または、陶冶的目的):算数・数学を通して人間を育てる.
- (2) 実用的目的:算数・数学を使えるようにする.
- (3) 文化的目的:算数・数学のよさを知らせる.

長崎栄三(2007)[17]は、算数教育の目的とその価値について、こう述べている:

算数教育の目的は、最近では、主として、人間形成的目的、実用的目的、文化的目的の3つ。(pp. 13-14)

教育的価値は、(中略)、陶冶性、実用性、文化性の3つに分類する。(pp. 23-26)

2.3 数学教育の目的(数学者の視点)

初等・中等レベルにおける算数・数学教育の目的に関する、数学者の発言は、当然、少ない。4件の文献を紹介する。それによると、数学教育学者の発想とは大きく異なる。

遠山啓は(1973)[36, p. 104]で、こう言っている:

(初等(算数)教育の目的として)概念づくりの仕事が重要である³。

竹内啓(1976)[34]は、数学教育の「現代化」の導入と、それに対するその後の変化への対応を非難し(p. 206)、「数学教育の目的」に基づいて議論することを提唱し、その「数学教育の目的」を次のように述べている:

数学教育の目的には、大きく分けて、それ自身の価値を考えると、他の目的のために「役に立つ」ということの二面がある。(p. 207)

数学教育学者は、前半の目的を「文化的目的」と言うかもしれない。著者自身も「文化的価値を持つ」(p. 210)と述べている。後半の「役に立つ」も、単なる実用性のことではない。「現実のいろいろな現象を理解するための前提となる思考の枠組みを与えるもの」として、

数学教育そのものの目的は、(中略)、実は『数学的な問題の捉え方、考え方』というものがどういうものであるかを理解させる点にある。(p. 211)

と述べる。数学教育学者は、この部分を「陶冶的目的」と呼ぶかもしれない。著者は、更に、近年使われる用語を用いれば、数学リテラシーの必要性を訴えている:

³ 上野健爾は、それが楽な仕事ではないと言い、続けて、「小学校で学んでいる数学を概念的に説明するのは実は一番難しい。それにも関わらず、どうしても小学校で教えなければいけない部分がある」と述べている[37]。

「文科」に属する多くの分野(中略)を専攻する人々にとって、(中略)、数学のいわば「素養」を持つことは必要不可欠(中略)。(p. 218)

小平邦彦(1976)[14, p. 303, “不可解な日本の数学教育”, 通産ジャーナル, 1976年4月]によると,

数学の初等教育の目的は、(中略)、数学的思考力、数学的感性を養うことにある。

藤田宏は、(1996)[9, 第2節 新世紀を目指す数学的知性]で、次のように述べている：

中等教育，とくに，高校教育では，数学教育の目的は，生徒の数学的知性の涵養であり，実践的な目標は，生徒の個性・進路に適したバランスで，数学的リテラシー（ML）の育成と数学的思考力（MT）の強化をはかること。

2.4 数学教育学の分野

以下に見るように，数学教育学の領域・分野は学会ごとに異なる．しかも，学会内でも安定していない[6, 第1章 §1 数学教育学論，3. 数学教育学の学的体系化]．ここで，学会とは，日本数学教育学会，数学教育学会，全国数学教育学会を指す．ここでは，数学教育学者の領域に関する主張をいくつか紹介する．

日本数学教育学会シソーラス案キーワード(1990)[18]によると

1. 教育制度，教育行政・財政，教師教育
2. 算数・数学教育総論
3. 目標
4. 内容
5. 指導法
6. 評価
7. 固有名詞(検索上の便宜を図るため)

中原(1995)は，[18, p. 8]で，数学教育の研究領域を次の10領域に分けることを提案している：

1. 本質，目的，目標に関わる領域
2. 指導内容に関わる領域
3. 指導方法に関わる領域
4. 評価，学力に関わる領域
5. 認知，理解，思考に関わる領域
6. カリキュラムに関わる領域
7. 授業領域，授業研究に関わる領域
8. 問題解決に関わる領域
9. 数学教育史に関わる領域
10. 数学教育学，数学論に関わる領域

横地清は，(2008)[42, p. 21]で「数学教育学」の分野を大きく3つに分けている：

- A. 中心分野（教育課程，教育内容，授業論，評価論）
- B. 基礎分野（数学，認知論）

C. 素養分野 (教育史, 文化史, 数学史, 国際的数学教育学)

筆者の予想する数学教育学の主要な分野 (ただし, 数学は算数を含む.) :

数学科指導法, 数学教育内容論, 数学教育課程論, 数学教育認知論,
数学科評価論, 数学教育学論, 数学教育史.

この中で, 数学者が関わることができるのは, まず, 教育内容, つぎに教育課程であろう.

「数学教育内容 (論)」というのは, 教員養成系大学・学部において授業する教科教育科目の中で扱う数学の総称で, ある大学 (多分, 広島大学) が教員養成系学部改変の際, 代数学, 幾何学等をまとめて, 「内容学」と当時の文部省に申請したのが始まりと聞いている. 従って, この用語は, 比較的新しく, 数学者の間で認知されているとは未だ言えない状態にある. 他学部の数学教員にはこの用語をほとんど知られていない.

数学教育学は存在するか 上述の分野は, 研究内容に基づく分野である. 研究の分野と研究発表会向けの分野とは異なるとはいえ, 数学教育学会における過去1年間の発表 (合計 132 件) を見ると, 発表した大学教員は 62 人で, うち 8 人は複数の分科会 (方法論と認知論など) で発表している. このことは, 資料には偏りがあるが, 数学教育の研究者自身の研究分野の分化が発展途上にあることを示唆している.

中原 (2010)[6, p. 5] は, 日本数学教育学会と全国数学教育学会との間に領域の相違があることを理由に,

数学教育学の学的体系化は未だ不十分である.

と述べ, 藤田宏 (2011)[9, p. 255] も,

中等教育およびそれ以降の教育については, 本質的な部分において発展途上である.

と述べている. さらに, 岩崎 (2007)[12, p. 32] は次のように述べている:

数学者の言動を鵜呑みにしたり, 心理学者の見解を皮相に解釈したりする限りでは, 数学教育の失地は回復できない⁴.

それぞれの学会において, 数学教育に関する論文は毎年, 多数発表され, 領域を構成する必要に迫られているのは事実である. 数学教育に特化した学位を取得する数学教育学者も増えてきた. 従って,

数学教育学は存在する.

しかし, 数学教育学が成人に成りきったとは, 数学教育学界において認知されてい

⁴ ここで, 数学者とは, 文脈から, デュドネを始めとする「現代化」に積極的な数学者のことで, 心理学者とは「教育の過程」の著者ブルーナー [2] のことらしい.

るとは思えない。数学教育に長く関わっている数学者、関沢正躬 (2000)[28, p. 38] も次のような述べている：

けっきょく、今日まで数学教育の望ましい体系はできあがっていない

教育内容数学に関しては次の第3節で、数学教育学者からの隠れた要求を紹介する。

2.5 数学教育学における教育内容

以下では、「数学界における数学」、「数学教育学における数学」、「数学教育内容における数学」を使い分ける。

「数学界における数学」の分野と、「数学教育学における数学」の分野は異なる。前者は、理論体系を重視する現代数学であり、我々が通常数学と呼ぶものである。後者は、教科教育に深く関連する数学の分野である。例えば、ユークリッド幾何は、数学界ではもはや存在しないか、または、基礎論か数学史に属し、数学教育学では図形(幾何)に属する。ユークリッド幾何は、理学部で単独にとり上げられることはないと思われるのに対して、教育学部では重要な科目である[22, p. 104]。数学教育学における数学の分野とは「数学教育内容の構成の背景となる数学」と、横地[42, p. 41]は規定し、例として、論理学、整数論、群論、空間幾何学等を挙げている。科目名だけを取り上げれば、理学部の数学の科目と同じであるが、数学教育学とは、扱いも向きも違う。

「数学教育内容における数学」は、小学校・中学校・高等学校で扱う(指導する)数学(学校数学と呼ばれている)及びその周辺の意味で使う。数学教育学における数学の授業は教科専門の数学者が担当している。数学教育内容における数学の担当が、教科専門か教科教育かは、大学により様々である。

数学教育学における数学の科目とその内容に関し、数学教育学(者)からの要求がある。例えば、鈴木(2011)[33]は、数学教育学の数学の分野に対する要求である(1節、動機-2を、具体的な科目については3. 1節を参照)。横地(2008)[42, p. 41, 右下~p. 42, 左上, p. 74, 右]の科目群は、狭義には、小・中学校の教師となる学生のための、数学教育学の数学の分野である⁵(3. 1節を参照)。

数学教育学の数学の分野とその内容に関する要求は、我々、教科専門への直接的な要求であり、数学教育内容の数学とその内容、教育課程に関する課題の指摘は、間接的な要求と判断すべきであろう。

⁵ 横地はここで、「数学」の内容として」と述べているが、内容は科目の意味で使っている。

3 数学教育学(者)は我々(教科専門)に何を求めているか

雑誌「世界」(1984)[3, 6月号]の大学教授4人による覆面座談会「学生の生態, 教師の正体」の中, 99頁において, (文系と思われる)教授Aは次のように発言している:

学生が求めているものと全く違う講義が行なわれてしまう. その最たるものが教育学部です. 教育学部の数学の授業をご覧になればいいですよ. 教育学部へ行けば, 子供たちにどうしたならば数学をわかりやすく教えることができるだろうか, というようなことを教えてくれると思うでしょう. とんでもないですよ.

覆面なので, 本音が, 従って, 偏見も誤解も, 露骨に現われているが, これが1980年代の他学部の大学教授の, 教育学部の授業に対する平均的な理解と思う. この状況が現在は変わったとの根拠は持ち合わせない.

一方, 現在, 教育学部に入学して来る, 教員志望の学生の中にこのような誤解が蔓延していると実感している. 鹿児島大学でデータを取ったところ, 教員免許取得に必要な科目の単位は取るが, その後は, 2つ目の免許取得に走る(多数)か, 教員採用試験の準備に走る(少数). 鹿児島県が複数免許の取得を奨励し, 教員募集案内にもそのことが記載されているし, 学部も複数免許の取得を奨励している. 大学が, 学ぶところから, 資格を得るところ, 職業訓練するところへと, 学生の意識の変化を感じている.

2001年秋, 通称「在り方懇」の報告[4]は, 教科専門の教員は「教員養成という目的に関心が薄い」(I, 2(5))とか, 「他の学部と同じような専門性を志向するのではなく」(II, 1(5))とか, 陰に陽に批判し, いくつかの提案(要求)を我々にした. 例えば,

モデル的な教員養成カリキュラムの作成 (II, 1(2))

教科専門科目の教育目的は他学部とは違う, 教員養成の立場から独自のもの (II, 1(3))

教科専門科目担当教員は, (中略)教員養成の目的に沿って教科専門の立場から取り組むこと (II, 1(5))

これに対して, 教員養成系大学・学部数学教官懇談会は, (案)の段階で, 1部は評価し, 別の1部には反論した[7, p. 48].

「在り方懇」と同様な要求が, 教科教育を担当する数学教育学者からもなされていることが予想されるが, では, 教科専門(数学者)にはいかなる教育が求められているのか.

以下に示すように, 教科専門への要求は, 教育現場で直接役立つ数学(数学教育内容における数学)の授業だけではなく, 数学教育学における数学の分野だけでもない. 要求は多様である. 問題なのは, 授業内容が, 教育現場の数学の背景になって

いるか(教科学力の形成, 知識の提供-獲得), 教師の最低限の力量を養成するものになっているか, 教師になった後も, 自己研鑽でき, 知識の獲得, 活用, 評価する能力(生成学力), を養成するものになっているか, などである.

3.1 数学教育学における数学(教科専門科目)に関する要請

まず, いくつかの要求を紹介する. 次に, 鈴木 [32] のアイディアに基づき, 指導要領を根拠として, 中等教育において要求されていると筆者が判断した教科専門科目を列挙する⁶.

赤根也 (1979)[27] の要請:

数と空間 算術, 代数学およびユークリッド幾何学は, 数学的なあらゆる知識・技能および考え方・態度の母胎だといってよい. (中略) まず, これらの分野の基礎的・基本的部分をあたえることから始めなければならない. (p. 324)

「最小限」どのような数学的知識・技能, および考え方・態度が必要かを考えることもまた重要な課題である. (中略) 現在, わが国では, 算数・数学教育の内容として, 算術, 初等代数, ユークリッド幾何, 微積分, 線形代数および確率・統計が考えられているが, それで十分かどうか. (p. 325)

横地の要請:

教育内容の数学的裏付けは, つぎに述べるような理由(略)から, ぜひとも必要である. (1981)[40, p. 108]

小・中学校の数学の先生には「数学」の内容として, 論理学, 整数論, 群論, 空間幾何学, 地球の幾何学, 曲面論, グラフ理論, 確率論, 推計統計学, 解析学, 微分方程式等が予想される. (2008)[42, p. 41, p. 74](筆者注: 74頁では, なぜか, 解析学が入っていない. 校正ミスか?)

鈴木の要請 (2011)[32]:

(小専科目の)教科専門としての数学: 少なくとも, 集合論, 幾何学基礎論, 数の体系, 記号論理がほしい (p. 262).

専門科目の数学にあっても, 学校数学をカバーする内容を創出すべきである (p. 262)

上で, 鈴木は小学校教員のための教科専門科目を具体的に挙げた. そこで, 筆者は, 中等教育に指導要領に定められる幾何をカバーする幾何系の教科専門科目を調べた見た.

⁶ 大学教員, 特に教科専門, の視点による, 教科専門科目の分析は, 第1班 [22], [23] により継続的になされていて, 彼らによる標準的モデルカリキュラムが準備されている.

1. 中学校. 指導要領, B 図形, に現れる幾何をカバーする科目群:

ユークリッドの平面幾何及び空間幾何, 簡単な空間幾何, 射影幾何学(投影図), 論理学, 集合論,

これを補強する科目群:

幾何学基礎論, 群論(変換群), ギリシャ数学(または思想)史, 線形代数学, 非ユークリッド幾何学, 解析学(面積・体積の概念).

2. 高等学校. 指導要領の「図形」を含む内容に現れる幾何をカバーする科目群:

集合と論理, ユークリッド幾何, 解析幾何学, 線形代数学, 解析学(三角関数), 関数論(複素平面), ギリシャ数学(または思想)史.

これを補強する科目群:

群論, 非ユークリッド幾何学, 微積分(面積・体積), 古典微分幾何学(曲線論・曲面論), トポロジー, 射影幾何学(投影図), ベクトル解析, グラフ理論, 離散数学.

こうしてみると, 中学校教員免許を取得すれば自動的に高校教員免許の取得が可能になる現行の単位制度(教科専門単位数 20)では, 特に教員養成大学・学部の高校数学教師希望学生には, ハードルが低いと言わざるを得ない. 中学校の幾何全体をカバーするだけの時間は, 大学にはない. 浅く広く全体をカバーするか, 狭く深い内容を授業し, 残りは独学でカバーできる学力をつけさせるか. 大学教員は, それぞれで工夫しているが, ここは, 我々(教科専門)の力量が問われる問題である.

問題は, 教科専門科目と単位数だけではない.

3.2 教育内容の数学における問題点

教科専門担当者の多くは, 意識して学校数学の背景となる数学の授業をしてきたと思う. しかし, 自分の講義が具体的にどのように学校数学の内容と関わっているのかについては,それほど深くは考えてこなかったと予想される. たとえ日頃から深く考えていても, それを生かす機会が少なかった. その理由である. 数学教育内容における数学は数学教育学者の担当とみなされており, 従来, 教育内容における数学に関わることを求められた数学者は少なく, 関わる機会が少なかった.

この分野における問題点は, 教科教育担当者の中で解決しようとしても, 数学者の関わる余地が大きく, 数学教育学者だけでは難しいと思われる [4, II, 1(3)]. そこで, この問題は数学者への間接的な要求とみなし, 以下に, どのような問題が指摘されてきたか, いくつか記す.

塩野 (1946)[30] は戦後すぐ次のように述べている:

教育は下から伸ばすゆき方でなくてはならない。そこに学的体系とは違った教育的体系が考えられる根拠がある。(p. 131)

発生的体系そのままでは教育的体系とするわけにはゆかないのである。生活体系：数学教育では論理的な発展段階も考えられなくてはならない。(p. 132)

かような教育的研究は今後に残された問題であると信ずる。(p. 133)

小平(1968)[14, p. 283](New math 批判, 科学 1968 年 10 月号)の場合⁷：

数学の教育も数学の歴史的発展の順序に従って行なわれるべきであろう。(中略) 論理的に基本的な概念であることと、子供にとって初等的な概念であることとは別なことである。

遠山の発言を(1981)[36]から拾ってみる：

算数は、ごく少数の単純な原理を教えればいい。[36, シリーズ 4, p. 20] 場合によっては、数学的理論は犠牲にしてもいい。[36, シリーズ 6, p. 84]

教育系大学における数学と数学教育の内容と方法を早急につくり上げることである[36, シリーズ 13, p. 65]。

幾何に関しては、依然として、課題が多いようである[6, 第 3 章 教材論, §5 図形概念(川寄), §13 ベクトル・行列・離散数学・数学史等(今岡)]。例えば、阿部が下で指摘する「定義と性質の混同」は現在の中学校の教科書でも起こっている。

阿部(1979)[27]における記述によれば、

図形指導の系統 最近特に、小・中・高校の教育の一貫性が強調されている。(p. 226)

小学校の場合、(中略) 定義と性質が混同されたり、いくつかの性質がばらばらに認められ、統一的にはとらえにくい傾向がある。(p. 232)

いくつかのアプローチを採用するとき、その接ぎ目をどのように処理するかが、大きな課題である。(p. 227)

平林(1987)[10, p. 49]の場合：

ユークリッドの幾何とヘロンの幾何の、学校教育に向けての融合。

岩崎(2007)[12, p. 41]は次のように問題点を指摘する：

「小学校から高校までの数学教育の一貫性がうち立てられる」カリキュラムの開発は不可避となるが、そこは自ずから初等レベルの数学と中等レベルのそれとの接続が、問題として内包される。

川寄(2010)[6, p. 109]の問題提示：

⁷ 塩野とは考え方が少し違うが

図形概念にかんする数学的考察, 心理学的考察, 哲学的考察を図形指導に還元する.

学校数学を統合的に捉えた図形指導を実現するためのカリキュラムの構築する.

数学教育学者の上記のような我々に対する直接・間接の要請は, 彼らが彼らの学会等で報告しても, 彼らの著書に記述しても, 我々に届くことはほとんど期待できない. 逆に, 数学者が積極的に, 数学教育学者の意見を求めることも, 期待できない状態であった. これが問題であったのではないか. 状況は変わりつつある. 教師志望の学生の数学能力は, 今や, 教科専門, 教科教育共通の問題になっている.

3.3 数学者, 数学教育学者ともに求められるもの

教育に対する取り組みに関し, 古くからいわれる批判がある. 例えば, 次の横地(1981)[40, 第II部 第1章 教師と数学の遊離]の批判はその代表格であろう. あれから30年経た今日でも, この批判は少なからず当たっているだろう. 批判の一部は教科専門に対するものになっている.

ここに, 1981年[40]と2008年[42]に現れる横地の批判を記す:

とりわけ教育学部, 教員養成大学の数学の教育について, その問題点を述べるとつぎのようである.

- (1) 将来教師となる学生に役だつ数学を教えるといった配慮が欠ける.
- (2) 学生一人ひとりに力をつけるという努力がなされていない.
- (3) 大学の教師は, 自分自身の専門の研究の方を重視して, 大学での教育の方を軽視する傾向がある.
- (4) 大学の教師は, 小・中学校の数学教育と教師を軽蔑して, 数学の優越性におぼれる傾向がある.
- (5) 大学の数学についての数学教育の研究は, 小・中学校の数学教育の研究に比べて, はるかに遅れている.

数学教育を理解し尊敬する, 大学の数学の教師が乏しい. またそのような教師と, 小・中学校の教師の間の研究の交流が欠けている. [40, pp. 106-107]

現在の教育系大学は, 数学教育学を何も教えていない. (中略) 指導法を教えるだけで, 教育学を教えていない. [42, p. 76]

遠山(1981)も横地と同様の批判をしている[35, シリーズ13, pp. 65-66]:

これまでは、大学では教育は真剣に問題にされなかった。(中略)数学の講義が教育とはまるで関係のない形でされている一方で、数学教育は指導要領の解説に終始するというようなバラバラの形で行なわれている。その二つを緊密に結びつけることと、数学教育の理論的体系をつくって、少なくとも大学の講義として成り立つようなところまで完成することが望まれる。

國本(2001)[15, p. 131]は、教員養成の研究状況について、「研究発表数が少ない。」と、数学教科教育学者を批判している。

鈴木(2011)[32, p. 262]は数学教科専門を批判している。

数学を学ばば自ずと実践に生かされるであろうとする大学教員の意識を根底から改め、...

この傾向は世界的なもののようなのである。[1, p. 121]は次のように述べている：

There is a seductive plausibility to the “trickle down” philosophy underlying most current programs for the mathematical preparation of high school mathematics teachers—the idea that coursework in a standard mathematics major develops the reasoning skills necessary to teach high school mathematics well.

続けて、「この直観的に妥当な命題は、教師の有効性に関する研究で支持されていない。」と述べている。

3.4 学生、現職教員への要求

学生への要求は、結局、学生を指導する大学教員への批判である。したがって、数学者、数学教育学者ともに、指導上、留意する必要がある。批判の中心は次の2点である。

1. 数学的素養の欠如、
2. 指導法の上に終始する傾向。

この2点については、我々、教科専門担当の数学者も深く憂慮していた。数学の軽視、数学的素養の欠如が、教師の数学能力、指導力の欠如に直結しているのではないかという危機感、我々が、4年前から数理解析研究所で、共同研究を始める契機となったのは、将に、この危機感であった。学生とて、数学教師を目指すのに、数学を軽視して良いとは思っていないが、「数学の素養」より「採用されること」という短期的利益の方が優位に立つ。教師として採用する側から、教壇に立つときはすでに一人前のプロの教師であることを要求され、教員採用試験では大学レベルの数学が出題されることがほとんどない状況においては、学生も指導法に走らざるを得ない。

一方で、極少数とは思いますが、教科の内容を軽視する学校教育系及び、教科教育担当の教員の存在⁸、教育現場において指導主事と同じような指導・助言をすることが社会(教育現場)への貢献と誤解している大学教員の存在⁹も無視できない。学生はまだ大学教員を信頼し尊敬しているのだから。

上記の2点の批判に対する責任は、教科専門担当者数学者よりも、むしろ教科教育担当の数学教育学者の方が重いと筆者は思う。

以下に、学生、現職教員への要求の例を紹介する。数学教育学者が批判しているのは興味深い。

和田義信(1960)[38, 第2巻, 第2章, 第3節, 4. 現代数学教育の動向, p. 166]:

どこの国でも議論しているのは、まず教師の教養ということであります。(中略)。数学に対する教養を身につけるようにすることが必要ではないかということが緊急の課題。

横地(1981)[40], (2001)[41], (2008)[42]:

学校で教える数学の内容だけを、詳しく知っておれば、それで事足りると思っている。教師は、決められた、教科書の内容だけをよく理解しようとし、その指導法のみで終始する傾向が強い。[40, p. 106]

(ICM9の)参加者についても、学校現場の数学教育に直結する分野への関心が高く、学校現場の数学教育の支えとなる専門分野への関心が乏しい。[41, p. 20]

現在の教育系大学は、数学教育学を何も教えていない。(中略)指導法を教えるだけで、教育学を教えていない。[42, p. 76]

平林一栄(1987)[10, p.28]:

(数学)教師には相当な数学的教養とともに、十分な教育学的素養も必要であろう。

鈴木(2011)[33, p. 161]:

数学教員に必要な最低限の力量が養成されないままに教壇に立っている。(中略)。さらに気掛かりな点は、現在の小・中学校の教員の意識から、“教育とは何か”、“授業とは本来、どのような営みであるのか”という根源的な問いが急速に失われ始めていることである。

終わりに

佐藤学(2009)[26, p. 80]は、「学力は結局、教師の力に相関しています。」と述べている。

⁸ これは筆者の体験である。

⁹ これも筆者の体験である。

上野健爾 (2010)[37, p. 47] の次の言葉は、学生にも聞かせたい：

現場の先生たちに問われていることは、いかに自分の数学のセンスを磨いて、数学の力をつけることです。

我々、大学教員の課題は、結局は、学生に教師としての数学の学力(教科学力)をつけること、卒業後も必要に応じ、自助努力により数学の学力(生成学力)をつけることができる能力をつけることと思う。それにより、指導要領が如何に変わろうとも、社会の状況が如何に変わろうとも、基礎が確立しておれば、柔軟に対応できる能力を身につけえることができると期待できる。これは、数学者のみ、または、数学教育学者のみでは不可能であり、両者者の協力は不可欠であろう。しかし、現在の大学をとりまく状況は、それほどの余裕を両者に与えられるのか、現状ではそれは疑問に思う。

参考文献

- [1] The mathematical Education of Teachers, CBMS Issues in Mathematics Education Vol. 11, AMS in cooperation with MAA, 2001.
- [2] Bruner, H., The process of Education, Cambridge, MA. Harvard Univ. Pres. 1960.
- [3] 座談会 学生の生態・教師の正体, 世界, 1984年, 6月号, 91-106, 岩波書店.
- [4] 文部科学省, 今後の国立の教員養成系大学学部の在り方について(報告), 2001年.
- [5] 日本数学教育学会編, Year Book 第2巻, 日本の算数・数学教育, 1996年.
- [6] 日本数学教育学会編, 数学教育ハンドブック, 東洋館出版社, 2010年.
- [7] 教員養成系大学・学部数学教官懇談会, 「国立の教員養成系大学・学部の在り方に関する懇談会」のまとめ(概要)(案)に対する意見書, 数学通信 第6巻 第1号 (2001), 46-48.
- [8] 栗村真之, 算数・数学教育における教師の専門性に関する研究, 全国数学教育学会誌 算数教育学研究, 第4巻 (1998年), 219-229.
- [9] 藤田宏, 生徒・学生・教師・教授の元気と本気を引き出す数学教育を, 2011年度数学教育学会秋季例会発表論文集 (2011), 252 - 257.
- [10] 平林一栄, 数学教育の活動主義的展開, 東洋館出版社, 1987年.
- [11] 平岡忠, 算数科の価値, 小学校算数科教育研究, 建帛社, 1992年.

- [12] 岩崎秀樹, 数学教育学の成立と展望, ミネルヴァ書房, 2007 年.
- [13] 蟹江幸博, 佐波学, 数学教師に必要な数学能力とは何か—戦前における数学教師養成の一断面—, 数理解析研究所考究録 1711(2010), 12–48.
- [14] 小平邦彦, 怠け数学者の記, 岩波書店, 1986 年.
- [15] 國本景亀, 教員養成の研究状況と今後の課題, 日本数学教育学会第 34 回数学教育論文発表会課題別研究部会, (2001), 131 – 134.
- [16] R. クーラント, H. ロビンス著, 森口繁一訳, 数学とは何か (原書第 2 版), 岩波書店, 2001 年.
- [17] 長崎栄三・滝井章編, 何のための算数教育か, 東洋館出版社, 2007 年.
- [18] 中原忠男, 算数・数学教育における構成的アプローチの研究, 聖文社, 1995 年.
- [19] 中原忠男, 算数・数学教育の目的・目標, 日本数学教育学会誌, 第 82 巻, 第 7 – 8 号 (2000), 48 – 51.
- [20] 中島健三, 算数・数学教育と数学的思考方—その進展のための考察—, 金子書房, 1982 年.
- [21] 丹羽雅彦, 松岡隆, 教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想, 数理解析研究所考究録 1657(2009), 74–82.
- [22] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川寄謙一郎, 伊藤仁一, 「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果とその考察, 数理解析研究所考究録 1711(2010), 89–105.
- [23] 丹羽雅彦, 松岡 隆, 川寄 謙一郎, 大竹 博巳, 伊藤 仁一, 中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想, 数理解析研究所考究録 1711(2010), 106–129.
- [24] 小倉金之助著作集 1 – 8, 勁草書房, 1973 – 75 年.
- [25] 佐藤英二, 近代日本の数学教育, 東京大学出版会, 2006 年.
- [26] 佐藤学, 教育の現在, そして未来に向けて, 現代思想 2009 年 4 月号, 72–81, 青土社.
- [27] 赤摂也編, 教育学講座 11, 算数・数学教育の理論と構造, 学研, 1979 年.
- [28] 関沢正躬, 算数があぶない, 岩波ブックレット 513, 岩波書店, 2000 年.

- [29] 塩野健之祐, 数学教育研究の性格と領域に関する考察—数学教育学の構想—, 日本数学教育学会誌数学教育学論究 XIV(1967), 1-9.
- [30] 塩野直道, 数学教育論, 啓林館, 1946 年 (1970 年復刊) .
- [31] 杉山吉茂ほか編, 数学科教育, —中学・高校—, 学文社, 1999 年,
- [32] 鈴木正彦, 教員養成系大学・学部における数学教育の在り方について, 2011 年度数学教育学会春季年発表論文集, 261 — 263.
- [33] 鈴木正彦, 教員養成系大学・学部における数学教育の在り方について (II), 2011 年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 169 — 171.
- [34] 竹内啓, 数学教育の目的は何か, 中央公論, 1976 年 5 月号, 206-219, 中央公論社.
- [35] 遠山啓, 数学教育論シリーズ 0~13, 太郎次郎社.
- [36] 遠山啓, 文化としての数学, 大月書店, 1973 年.
- [37] 上野健爾, 高校で何を教えるか~これを楽しむのに如かず~, 日本数学教育学会誌 第 92 巻, 第 1 号 (2010), 40 — 47.
- [38] 和田義信, 著作・講演集 (全 8 巻), 東洋館出版社, 1997 年.
- [39] 安井孜, 初等・中等教育において算数・数学を学ばせる意味および社会的, 生活的状況の事例の研究, 数理解析研究所考究録 1657(2009), 141-156.
- [40] 横地清, 数学教育学序説, 下, ぎょうせい, 1981 年.
- [41] 横地清, 数学教育学の形成について, 数学教育学会誌第 42 巻 (2001), 17 — 25.
- [42] 横地清, 横地清の語る数学教育, 数学教育学会, 課題スタディグループ, 2008 年.