

Standard L-functions for $U_{n,n}$

東北大学理学研究科修士 2 年 高野啓児 (Keiji Takano)

0 Introduction.

E/F を数体の 2 次拡大、 $G = U_{n,n}(E/F)$ をこれに対応して定義されるユニタリ群とする：

$$G(F) := \{ g \in GL_{2n}(E) \mid g J_n {}^t \bar{g} = J_n \}, \quad J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

$G(\mathbb{A})$ の尖点保型表現に対するスタンダード L-関数の解析接続を、[10] の方法を用いて調べることができる。その具体的な計算等について以下で紹介する。ちなみに、[10] では、 $G = Sp_n, O_{n,n}$ の場合が調べられているが、分岐素点での理論については言及されていないので、ここではそれについても述べるつもりである。

1 Notation. Definitions.

G の部分群について.

S : maximal F -split torus. $S(F) = \{ \text{diag}(s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}) \mid s_i \in F \}$

T : maximal torus. $T(F) = \{ \text{diag}(t_1, \dots, t_n, \bar{t}_1^{-1}, \dots, \bar{t}_n^{-1}) \mid t_i \in E \}$

$B = T \ltimes N$: Borel subgp. where,

$$N(F) = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t \bar{u}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & b \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} u \in GL_n(E), \text{ upper triangular} \\ \text{and } b \in \text{Mat}_n(E) \text{ s.t. } b = {}^t \bar{b} \end{array} \right\}$$

$P^{(r)} = M^{(r)} \ltimes U^{(r)}$ ($1 \leq r \leq n$): standard maximal parabolic subgp. where,

$$M^{(r)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} g & & 0 \\ & 1_{n-r} & \\ 0 & & {}^t \bar{g}^{-1} \\ & & & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & & \\ & A & B \\ & & 1_r \\ & C & D \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} g \in GL_r(E) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U_{n-r, n-r}(E/F) \end{array} \right\}$$

$$U^{(r)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_r & * & * & * \\ & 1_{n-r} & * & 0 \\ & & 1_r & 0 \\ 0 & & * & 1_{n-r} \end{pmatrix} \in N(F) \right\}$$

特に、 $P^{(n)}$ をたんに P で表わす。

F の素点 v での完備化を F_v と書き、その valuation ring を $\mathcal{O}_v$ 、residue order を q_v で表わす。また、 $E_v := E \otimes_F F_v$ とする。ここで、

(A) v split. : $E_v \simeq F_v \oplus F_v$ as F_v -algebra.

(B) v non-split. : E_v/F_v が体の 2 次拡大。

の二通りが考えられ、それぞれで $G(F_v) =: G_v$ は、

(A) $G_v \simeq GL_{2n}(F_v)$

(B) $G_v = U_{n,n}(E_v/F_v)$

となっている。

$H := U_{2n,2n}(E/F)$ とし、埋め込み $i: G \times G \hookrightarrow H$ を次のように定義する。まず $G(F)$ が skew-hermitian space (V, ϕ_V) の isometry group として実現されているとみて、 $W := V \oplus V$ とし、 W 上の sesquilinear form ϕ_W を

$$\phi_W((v_1, v_2), (v'_1, v'_2)) = \phi_V(v_1, v'_1) - \phi_V(v_2, v'_2)$$

で与えると、 (W, ϕ_W) もまた skew-hermitian space になる。これを $H(F)$ と同一視し、 $i(g_1, g_2) \in H(F)$ を W への作用が

$$(v_1, v_2) \cdot i(g_1, g_2) = (v_1 \cdot g_1, v_2 \cdot g_2)$$

となるものとして $G \times G \hookrightarrow H$ がきまる。

G に対して定義したのと同様の H の部分群を S_H, T_H, B_H, P_H etc. と書くことにする。

各素点 v で、 G_v 、および H_v の good maximal compact subgroup K_v および $(K_H)_v$ をそれぞれ取っておき、 $K := \prod_v K_v, K_H := \prod_v (K_H)_v$ とする。

G の L-group は ${}^L G = GL_{2n}(\mathbb{C}) \rtimes Gal(E/F)$ である。但しここで、 $Gal(E/F)$ の non-trivial element の $GL_{2n}(\mathbb{C})$ への作用は、

$$g \mapsto J_n {}^t g^{-1} J_n^{-1}$$

で与えられる。 ${}^L G$ の standard 表現とは、ここでは

$$r_{st} = Ind_{GL_{2n}(\mathbb{C})} {}^L G(\rho_{2n})$$

で定まる $4n$ -次元表現のことを意味する。ここで ρ_{2n} は $GL_{2n}(\mathbb{C})$ の自然な $2n$ -次元表現を表わしている。

$\pi = \otimes_v \pi_v$ を $G(\mathbb{A}) = \prod_v G_v$ の尖点保型表現とする。素点 v が不分岐であるとは、

- π_v が不分岐球表現で、
- v が non-split のときは E_v/F_v が不分岐拡大.

のときにいう。不分岐素点での局所スタンダード L-因子 $L(s, \pi_v, r_{st}) = L(s, \pi_v)$ は具体的に以下のように与えられる;

(A) v split $2n$ 個の F_v の quasi-characters $\mu_1^{(v)}, \dots, \mu_{2n}^{(v)}$ を取って、

$$\pi_v \hookrightarrow \text{Ind}_{B_v}^{G_v}(\mu_1^{(v)}, \dots, \mu_{2n}^{(v)})$$

となっているとき、

$$L(s, \pi_v) = \prod_{i=1}^{2n} L(s, \mu_i^{(v)}) L(s, \mu_i^{(v)-1})$$

(B) v non-split n 個の E_v の quasi-characters $\mu_1^{(v)}, \dots, \mu_n^{(v)}$ を取って、

$$\pi_v \hookrightarrow \text{Ind}_{B_v}^{G_v}(\mu_1^{(v)}, \dots, \mu_n^{(v)})$$

となっているとき、

$$L(s, \pi_v) = \prod_{i=1}^n L(s, \mu_i^{(v)}) L(s, \mu_i^{(v)-1})$$

ここで $L(s, \mu)$ は局所体の quasi-character に対する Tate の L-因子である。素点 v の split/non-split によらず $L(s, \pi_v)$ の q_v^{-s} についての degree は $4n$ になっていることに注意する。

S を尖点保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ の分岐素点の集合とする。このとき、これに対する standard L-関数 $L_S(s, \pi, r_{st}) = L(s, \pi)$ を、

$$L(s, \pi) = \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v)$$

で定義する。右辺の無限積が $\text{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束することは知られている。([1] など。)

2 Basic Identity.

$P_H(\mathbb{A})$ 上の complex character $\delta_s : P_H(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\delta_s := (\delta_{P_H(\mathbb{A})})^{s/2n}$ で定義する。但しここで、 $\delta_{P_H(\mathbb{A})}$ は $P_H(\mathbb{A})$ の topological module を表わす。 $\delta_s = \prod_v \delta_s^{(v)}$ ($\delta_s^{(v)}$ は $P_H(F_v)$ 上の complex character) のように書かれ、具体的に各 $\delta_s^{(v)}$ は、

$$(A) v \text{ split; } \delta_s^{(v)} \left(\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \right) = |\det(g_1)|_v^s |\det(g_2)|_v^{-s} \text{ for } g_1, g_2 \in GL_{2n}(F_v)$$

$$(B) v \text{ non-split; } \delta_s^{(v)} \left(\begin{pmatrix} g & * \\ 0 & {}_t\bar{g}^{-1} \end{pmatrix} \right) = |\det(g)|_{E_v}^s (= |\det(g) \overline{\det(g)}|_v^s) \text{ for } g \in GL_{2n}(E_v)$$

と与えられる。 $f_s \in \text{ind}_{P_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\delta_s)$ に対し、 $H(\mathbb{A})$ 上の Eisenstein 級数を、

$$E(h; f_s) := \sum_{\gamma \in P_H(F) \backslash H(F)} f_s(\gamma h)$$

で定義する。この右辺は $\text{Re}(s) \gg 0$ で広義一様に絶対収束し、 s について meromorphic に全平面に解析接続される。

$\pi = \otimes_v \pi_v$ を $G(\mathbb{A})$ の尖点保型表現とし、 $\tilde{\pi} = \otimes_v \tilde{\pi}_v$ をその反傾表現とする。 $\varphi = \otimes_v \varphi_v \in \pi$, $\tilde{\varphi} = \otimes_v \tilde{\varphi}_v \in \tilde{\pi}$, $f_s = \otimes_v f_s^{(v)} \in \text{ind}_{P_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\delta_s)$ のとき、

Theorem 1 (Piatetskii-Shapiro, Rallis)

$$\begin{aligned} & \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} E(i(g_1, g_2); f_s) \varphi(g_1) \tilde{\varphi}(g_2) dg_1 dg_2 \\ &= \prod_v \int_{G(F_v)} f_s^{(v)}(i(g_v, 1)) < \pi_v(g_v) \varphi_v, \tilde{\varphi}_v > dg_v \end{aligned}$$

左辺の二重積分を $Z(f_s; \varphi, \tilde{\varphi})$, 右辺の各局所積分を $Z_v(f_s^{(v)}; \varphi_v, \tilde{\varphi}_v)$ と書くことにする。この段階では、 $Z_v(f_s^{(v)}; \varphi_v, \tilde{\varphi}_v)$ の収束や、右辺の無限積の収束などはもちろん分かっていない。 $\text{Re}(s) \gg 0$ で $E(h; f_s)$ を級数の形に書いて、 $Z(f_s; \varphi, \tilde{\varphi})$ を形式的に変形して右辺が得られるだけである。(詳しくは [10] を参照。)

以下で [5] の “L-function machine” の各 step を辿る。(関数等式と関連したところについては触れない。)

3 Eisenstein 級数の解析的性質.

$\phi_s = \otimes_v \phi_s^{(v)} \in \text{ind}_{P_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\delta_s)$ は $\phi_s \equiv 1$ on K_H となる 唯一つの元とし、 ϕ_s が生成する $\text{ind}_{P_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\delta_s)$ の部分許容 $H(\mathbb{A})$ -加群を $\mathcal{I}(s) = \otimes_v \mathcal{I}_v(s)$ で表わす。 $f_s \in \mathcal{I}(s)$ のときは、[10] に倣って $E(h; f_s)$ の解析的性質を詳しく調べることができる。

$$\chi_s = (\delta_s|_{T_H(\mathbb{A})}) \times (\delta_{B_H(\mathbb{A})})^{-1/2}$$

として、 $f_s \in \text{Ind}_{B_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(\chi_s)$ と考えることができ、[10] と全く同様にして、

$$\text{const. term of } E(h; f_s) = \sum_{w \in \Omega_H} I_w(f_s)$$

但し、 Ω_H は、その元がつぎの (*) によって特徴づけられるような、 H の (relative) Weyl 群 W_H の部分集合である：

(*) ... $\{1, \dots, 2n\}$ の置換 i で、ある番号 k で

$$i_1 < \dots < i_k, i_{k+1} > \dots > i_{2n}$$

を満たすものを取って、 $w^{-1} \in W_H$ の $X^*(S_H)$ の作用が

$$w^{-1} \cdot \chi_l = \begin{cases} \chi_{i_l} & (\text{if } l \leq k) \\ -\chi_{i_l} & (\text{if } l \geq k+1) \end{cases}$$

で与えられる。

また、 $I_w(f_s)$ は $w \in W_H$ の定める intertwining operator で、各 $w \in W_H$ に対して $(N_H)_w^- = \prod_{\alpha > 0, w \cdot \alpha < 0} (N_H)_\alpha$ とするときに、

$$I_w(f_s)(h) = \int_{(N_H)_w^-(A)} f_s(wnh) dn$$

で定義されるものである。

以下特に、 $f_s = \rho(h)\phi_s; h \in H(A_f)$ [resp. $f_s = \rho(X)\phi_s; X \in \mathfrak{h}_\infty$] の場合を考えればよく、このときは各 $w \in \Omega_H$ に対応する $I_w(f_s)(h)$ の極は Gindikin-karperevich の product formula によって調べられる。

Proposition 2 $\text{Ind}_{B_H(A)}^{H(A)}(w^{-1} \cdot \chi_s)$ の、 K_H 上で恒等的に 1 になっている元を $\phi_{w^{-1}, s}$ と書くことにすると、

$$I_w(\rho(h)f_s) = c_w(s)\rho(h)f_s$$

但しここで、 $c_w(s)$ は s についての有理型関数で、 $w \in \Omega_H$ が (*) の条件のように特徴づけられているときには、

$$\begin{aligned} c_w(s) = & \prod_{l=k+1}^{2n} \frac{\zeta_F(2s-4n+2l-1)}{\zeta_F(2s-4n+2l)} \prod_{l=k+1}^{2n-1} \frac{\zeta_E(2s-4n+2)}{\zeta_E(2s-2n+l)} \\ & \times \prod_{1 \leq l \leq k < m \leq 2n, i_m > i_l} \frac{\zeta_E(2s-4n+l+m-1)}{\zeta_E(2s-4n+l+m)} \end{aligned}$$

ここで ζ_F, ζ_E は体 F, E の Dedekind ゼータを表わしている。対応する local version の $c_w^{(v)}(s)$ を与える公式については、(一般的な形で)[3],[6] を参照。

分母、分子の cancelling で実際はもうすこし簡単な形に書ける。

Ω_H の longest element w_0 は、(*) の特徴づけでいうと、 $k=0, i_l=2n-l+1$ の場合にあたる。

Lemma 3

$$c_{w_0}(s) = \prod_{l=1}^{2n} \frac{\zeta_F(2s-2l+1)}{\zeta_F(2s-2l+2)} \prod_{l=1}^n \frac{\zeta_E(2s-4n+2l)}{\zeta_E(2s-2l+1)}$$

この $c_{w_0}(s)$ の分母にあるゼータすべての積を $d_H(s)$ と書く：

$$d_H(s) := \prod_{l=1}^{2n} \zeta_F(2s - 2l + 2) \prod_{l=1}^n \zeta_E(2s - 2l + 1)$$

$r \in \{1, \dots, 2n\}$ に対し、

$$M(r) := \{m \in \mathbb{Z}; k < m \leq 2n, i_m < i_r\}$$

とし、 $\mu(r) = \min(M(r))$ とおく。(ここで、 $r \geq i_{2n}$ であれば $M(r) \neq \phi$ であることに注意。)

$d_H(s)$ は、すべての $w \in \Omega_H$ に対する $c_w(s)$ の分母のゼータをすべて払ってくれる；

Proposition 4 $k \leq n$ ならば、

$$\begin{aligned} d_H(s)c_w(s) &= \prod_{l=1}^{2n-k} \zeta_F(2s - 2l + 1) \prod_{l=1}^k \zeta_E(2s - 4n + 2k) \prod_{l=k+1}^{n + [\frac{i_{2n}+1}{2}] - 1} \zeta_E(2s - 4n + 2k) \\ &\quad \times \prod_{l=1}^{n - [\frac{i_{2n}}{2}]} \zeta_E(2s - 2l + 1) \prod_{l=i_{2n}}^k \zeta_E(2s - 4n + l + \mu_l - 1) \end{aligned}$$

また $k > n$ ならば、

$$\begin{aligned} d_H(s)c_w(s) &= \prod_{l=1}^{2n-k} \zeta_F(2s - 2l + 1) \prod_{l=1}^k \zeta_E(2s - 4n + 2k) \\ &\quad \times \prod_{l=2n-k+1}^n \zeta_E(2s - 2l + 1) \prod_{l=1}^{2n-k} \zeta_E(2s - 2n - 2l + l - i_{2n-l+1}) \end{aligned}$$

ここで、 $[\cdot]$ は Gauss 記号を表わす。

結局これらにより、

Theorem 5 $f_s \in \mathcal{I}(s)$ ならば、

$$d_H(s) \times E(f_s; h)$$

の極は有限個。もっといって、その極は

$$s = \frac{m}{2} : m = 0, 1, \dots, 4n$$

のなかにしかなく、関数等式

$$d_H(s)E(f_s; h) = d_H(2n - s)E(f_{2n-s}; h)$$

が成り立つ。

4 局所ゼータ積分の解析接続.

以下、各局所積分の解析接続について考える。次を証明することが目標である。

Theorem 6 各素点 v で、 $G(F_v)$ の既約許容表現 π_v を取り、 ω_v をその *matrix element* とする。また $f_s^{(v)} \in \mathcal{I}_v(s)$ とする。このとき、

$$\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)}; \omega_v) := \int_{G(F_v)} f_s^{(v)}(i(g_v, 1)) \omega_v(g_v) dg_v$$

は $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し、全平面の有理型関数に解析接続される。

特に、 v が *non-arch.* のときは、 $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)}; \omega_v)$ は q_v^{-s} の有理関数になり、 v が *arch.* のときは、 $((\text{polynomial of } s)) \times ((\text{gamma functions}))$ の形となる。

証明のアウトラインを以下に記す。ごく大雑把にいうと、(v の *arch./non-arch.* , *split / non-split* にかかわらず) $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)}; \omega_v)$ は最終的に次の形の二重積分に帰着される： ω' は GL_m の *matrix element*, $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \in \mathcal{S}(\operatorname{Mat}_m)$ として (但し *arch.place* では *polynomial type* ([7] or [4]) として)、

$$\int_{GL_m} \int_{GL_m} \Phi^{(1)}(z_1) \Phi^{(2)}(z_2) |\det(z_1)|^s |\det(z_2)|^s \omega_v(z_1^{-1} z_2) dz_1 dz_2$$

この二重積分が、Godement-Jacquet のゼータ積分の積の線型和に書かれることがすぐにわかる。実際、次の補題を用いればよい；

Lemma 7 K_v の *elementary idempotent* β_v をとり、 $V_{\pi_v}(\beta_v) := \{\int_K \beta_v(k) \pi_v(k) \varphi_v dk; \varphi_v \in \pi_v\}$ とする。(これは有限次元。) $V_{\pi_v}(\beta_v)$ の *basis* $\{\varphi_{\beta_v}^{(1)}, \dots, \varphi_{\beta_v}^{(N)}\}$ をとり、その *dual basis* を $\{\varphi_{\beta_v}^{(1)*}, \dots, \varphi_{\beta_v}^{(N)*}\}$ とする。このとき、任意の $\varphi_v \in \pi_v, \tilde{\varphi}_v \in \tilde{\pi}_v$ に対し、

$$\int_{K_v} \beta_v(k) \langle \pi_v(g_1 k g_2) \varphi_v, \tilde{\varphi}_v \rangle dk = \sum_l \langle \pi_v(g_2) \varphi_v, \varphi_{\beta_v}^{(l)*} \rangle \langle \pi_v(g_1) \varphi_{\beta_v}^{(l)}, \tilde{\varphi}_v \rangle$$

例えば

$$\int_{K_v} \beta_v(k) \Phi^{(1)}(k z_1) dk = \Phi^{(1)}(z_1)$$

となるように *elementary idempotent* β_v を取ってやって、これを代入すればよい。

split case では、直接に上の二重積分に帰着できる。まず $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ において、 $S := \mathcal{S}(\operatorname{Mat}_{2n \times 4n})(F_v)$ から $\operatorname{ind}_{(P_H)_v}^{H_v}(\delta_s^{(v)})$ への H_v -intertwining map $\Phi_v \mapsto F_{\Phi_v}(\cdot, s)$ を

$$F_{\Phi_v}(h, s) = |\det(h)|_v^s \int_{GL_{2n}(F_v)} \Phi_v((0, z)h) |\det(z)|_v^{2s} d^\times z$$

で定める。 Φ_v として non-arch. では $Mat_{2n \times 4n}(\mathcal{O}_v)$ の特性関数を、arch. では

$$\Phi_v(z) = \begin{cases} \exp(-\pi \operatorname{tr}(z \cdot {}^t z)) & (\text{if } v \text{ real}) \\ \exp(-2\pi \operatorname{tr}(z \cdot {}^t \bar{z})) & (\text{if } v \text{ complex}) \end{cases}$$

をとることにより、 $\mathcal{I}_v(s)$ が S の image にはいっていることがわかる。あとは、 $f_s^{(v)}(i(g, 1)) = F_{\Phi_v}(i(g, 1), s)$ を $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)}; \omega_v)$ に代入すればよい。

non-split case では、状況は複雑になる。non-arch. のときは、部分表現定理を用いて、適当な r ($1 \leq r \leq n$) と、 $GL_r(E_v)$ の許容表現 τ_v 、さらに $U_{n-r, n-r}(E_v/F_v)$ の supercuspidal 表現 τ'_v を取って、 $\pi_v \hookrightarrow \operatorname{Ind}_{P_v^{(r)}}^{H_v}(\tau_v \otimes \tau'_v)$ とできることがわかる。これによって matrix element のところを書き換えて、岩澤分解 $G_v = P_v^{(r)} K_v$ を用いて $\mathcal{Z}_v(f_s^{(v)}; \omega_v)$ は次の形になる；

$$\int_{K_v} \int_{K_v} \left\{ \int_{U_v^{(r)}} \int_{M_v^{(r)}} f_s^{(v)}(i(um, 1)i(k_1, k_2)) \right. \\ \left. \times \delta_{P_v^{(r)}}(m)^{-1/2} dudm \right\} dk_1 dk_2 < (\tau_v \otimes \tau'_v)(m) \varphi_v(k_1), \varphi_v(k_2) >$$

K_v 上での積分は有限和を作るだけであり、問題は結局、

$$\int_{U_v^{(r)}} \int_{GL_r(E_v)} \int_{U_{n-r, n-r}(E_v/F_v)} f_s^{(v)}(i(um_1 m_2, 1)) \\ \times \omega_1(m_1) \omega_2(m_2) \delta_{P_v^{(r)}}(m_1 m_2)^{-1/2} dudm_1 dm_2$$

に帰着される。 (ω_1, ω_2) はそれぞれ τ_v, τ'_v の matrix element.)

Lemma 8 $w_r \in W_H$ を、 $X^*(S_H)$ への作用が

$$w_r^{-1} : \begin{cases} \chi_1 \mapsto \chi_1 & \chi_{n+1} \mapsto -\chi_{2r} \\ \vdots & \vdots \\ \chi_r \mapsto \chi_r & \chi_{n+r} \mapsto -\chi_{r+1} \\ \chi_{r+1} \mapsto \chi_{2r+1} & \chi_{n+r+1} \mapsto \chi_{n+r+1} \\ \vdots & \vdots \\ \chi_n \mapsto \chi_{n+r} & \chi_{2n} \mapsto \chi_{2n} \end{cases}$$

できまっているものとする、

$$i(U^{(r)} \times 1) = \prod_{\alpha < 0 \& w_r^{-1} \cdot \alpha > 0} (N_H)_\alpha$$

これと §.3 の intertwining operator の議論を使って、以下 $f_s^{(v)} \in \mathcal{I}_v(s)$ が $f_s^{(v)} = \rho_v(h_0) \phi_s^{(v)}$ の形であると仮定すれば、

$$\int_{U_v^{(r)}} f_s^{(v)}(i(u, 1)h) du = c_{w_r}^{(v)}(s) \times \phi_{w_r^{-1} \cdot s}(w_r^{-1} h h_0)$$

さらにこの $\phi_{w_r^{-1} \cdot s}$ が、次のように積分表示できる；

Lemma 9 $1 \leq k \leq 2n$ で、 $\Phi_v^{(k)}$ を $Mat_{k \times 4n}(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数とし、

$$F_v^{(k)}(h; s) := \int_{GL_k(E_v)} \Phi_v^{(k)} \left(\overbrace{(0, \dots, 0)}^{2n} | z, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-k} \cdot h \right) |det(z)|_{E_v}^s d^\times z$$

とする。すると

$$\phi_{w_r^{-1}, s}(h) = \xi_v(s) \times F_v^{(r)}(h; s_1) F_v^{(2r)}(h; s_2) F_v^{(n+r)}(h; s_3) F_v^{(2n)}(h; s_4)$$

$$(s_1 = 2s - 3n + 2r, s_2 = -s + 3n - r, s_3 = -r, s_4 = s)$$

ここで $\xi_v(s)$ は E_v の local zeta の積で書かれる s についてのある関数。

$h = w_r^{-1} \cdot i(m_1 m_2, 1)$ を代入して変数変換などを繰り返せば、本節のはじめに考えた二重積分と、 ω_2 に関する積分とに分解できる。 τ_v' の supercuspidality から後者の絶対収束は明らか。(local unitary group の center は anisotropic. したがって ω_2 の台はコンパクト.) よって non-split case でも定理は証明できる。

arch.non-split では π_v を主系列表現として実現できるので、次節で述べる不分岐の計算とほぼ同様に扱うことができる。

5 Explicit computations at unramified places.

不分岐素点 v で、 $\omega_v^{(0)}$ を π_v に対応する zonal spherical function として、また $d_H^{(v)}(s)$ を §.3 で定義した normalizing factor $d_H(s)$ の v -th factor とするときに、

$$d_H^{(v)}(s) \times \mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)}; \omega_v^0)$$

がだいたい $L(s, \pi_v)$ に一致することを示す。(だいたい、というのは Dedekind zeta の local factor ぶんのずれがでてくるので。) split place では容易なので、以下 non-split の場合だけ計算を述べる。

$\pi_v \hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ と仮定。 $0 \neq \varphi_v^0 \in \pi_v$ を spherical vector (i.e., K_v -fixed.), $\tilde{\varphi}_v^0 \in \tilde{\pi}_v$ をやはり spherical vector で、

$$\langle \varphi_v^0, \tilde{\varphi}_v^0 \rangle = 1$$

となるように取る。

$$\tau_v := Ind_{B_v \cap M_v}^{M_v}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

とすると、 $\pi_v \hookrightarrow Ind_{P_v}^{G_v}(\tau_v)$ と考えることができ、 $\varphi_v^0, \tilde{\varphi}_v^0$ をそれぞれ $Ind_{P_v}^{G_v}(\tau_v), Ind_{P_v}^{G_v}(\tilde{\tau}_v)$ の元とみて、

$$\omega_v^0(g) = \int_{K_v} \langle \varphi_v^0(kg), \tilde{\varphi}_v^0(k) \rangle_{\tau_v} dk$$

と書き直すことができる。ここから、

$$\mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)}; \omega_v^0) = \int_{G_v} \int_{K_v} \phi_s^{(v)}(i(g, 1)) < \varphi_v^0(kg), \tilde{\varphi}_v^0(k) >_{\tau_v} dk dg$$

変数変換などによって、

$$= \int_{G_v} \phi_s^{(v)}(i(g, 1)) < \varphi_v^0(g), \tilde{\varphi}_v^0(1) >_{\tau_v} dk dg$$

つぎに岩澤分解 $G_v = U_v M_v K_v$, $dg = \delta_{P_v}(m)^{-1} du dm dk$ により、

$$= \int_{U_v} \int_{M_v} \phi_s^{(v)}(i(um, 1)) < \tau_v(m) \varphi_v^0(1), \tilde{\varphi}_v^0(1) >_{\tau_v} \delta_{P_v}(m)^{-1/2} du dm$$

Lemma 8 を用いて、($r = n$ の場合にあたる。)

$$c_{w_n}^{(v)}(s) \times \int_{M_v} \phi_{w_n^{-1} \cdot s}^{(v)}(w_n^{-1} i(m, 1)) < \tau_v(m) \varphi_v^0(1), \tilde{\varphi}_v^0(1) >_{\tau_v} \delta_{P_v}(m) dm$$

$\phi_{w_n^{-1} \cdot s}^{(v)}(h)$ の積分表示が、次式で与えられる；

$$\phi_{w_n^{-1} \cdot s}^{(v)}(h) = \xi_1(s_1) \xi_2(s_2) F_1(h; s_1) F_2(h; s_2)$$

但し、 $s_1 = 2s - n$, $s_2 = -s + n$ で、また

$$F_1(h; s_1) = \int_{GL_n(E_v)} \Phi_0^{(1)}((0, 0|z_1, 0)h) |det(z_1)|_{E_v}^{s_1} d^\times z_1$$

$$F_2(h; s_2) = \int_{GL_{2n}(E_v)} \Phi_0^{(2)}((0|z_2)h) |det(Z_2)|_{E_v}^{s_2} d^\times z_2$$

($\Phi_0^{(1)}, \Phi_0^{(2)}$ はそれぞれ $Mat_{n \times 4n}(\mathcal{O}_{E_v}), Mat_{2n \times 4n}(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数.) さらに、

$$\xi_1(s_1) = \prod_{k=1}^n \zeta_{E_v}(s_1 - k + 1), \quad \xi_2(s_2) = \prod_{k=1}^{2n} \zeta_{E_v}(s_2 - k + 1)$$

$w_n \in (K_H)_v$ にも注意して、

$$\phi_{w_n^{-1} \cdot s}^{(v)}(w_n^{-1} i(m, 1)) = \phi_{w_n^{-1} \cdot s}^{(v)}(w_n^{-1} i(m, 1) w_n)$$

$m = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t \bar{g}^{-1} \end{pmatrix} : g \in GL_n(E_v)$ と書けば、これは

$$\begin{aligned} &= \xi_1(s_1) \xi_2(s_2) \int_{GL_n(E_v)} \Phi_0^{(1)} \left((z_1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1_n & {}^t \bar{g}^{-1} \cdot j_n - j_n \\ 0 & j_n {}^t \bar{g}^{-1} \cdot j_n \end{pmatrix} \right) |det(z_1)|_{E_v}^{s_1} d^\times z_1 \\ &\quad \times \int_{GL_{2n}(E_v)} \left(0, z_2 \cdot \begin{pmatrix} 1_n & {}^t \bar{g}^{-1} \cdot j_n - j_n \\ 0 & j_n {}^t \bar{g}^{-1} \cdot j_n \end{pmatrix} \right) |det(z_2)|_{E_v}^{s_2} d^\times z_2 \end{aligned}$$

($\Phi_0^{(1)}$ は $(2n+1)$ -列から $4n$ -列までの、 $(n \times 2n)$ -行列に制限している) と計算され、さらに変数変換などによって、

$$= \xi_1(s_1) \cdot |\det(g)|_{E_v}^{s_2} \int_{GL_n(E_v)} \Phi_0(z|z \cdot {}^t\bar{g}^{-1}) |\det(z)|_{E_v}^{s_1} d^\times z$$

となる。(Φ_0 は $Mat_{n \times 2n}(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数。)

以上により、 $\delta_{P_v}(m) = |\det(g)|_{E_v}^n$ と合わせて、

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_v(\phi_s^{(0)}; \omega_v^0) &= c_{w_n}^{(v)}(s) \xi_1(s_1)^{-1} \\ &\times \int_{GL_n(E_v)} \int_{GL_n(E_v)} \Phi'_0(z) \Phi'_0(z \cdot {}^t\bar{g}^{-1}) |\det(z)|_{E_v}^{2s-n} |\det(g)|_{E_v}^{-s+n/2} \omega_{\tau_v}^0(g) d^\times z dg \\ &= c_{w_n}^{(v)}(s) \xi_1(2s-n)^{-1} \cdot Z(\Phi'_0; s-n/2, \omega'_{\tau_v}) Z(\Phi'_0; s-n/2, \tilde{\omega}'_{\tau_v}) \end{aligned}$$

ここでの Φ'_0 は $Mat_n(\mathcal{O}_{E_v})$ の特性関数、 $Z(\)$ は Godement-Jacquet のゼータ積分、 ω_{τ_v} は不分岐表現 $\tau_v (= Ind_{B_v \cap M_v}^{M_v}(\mu_1, \dots, \mu_n))$ からきまる zonal spherical function on $M_v (= GL_n(E_v))$ 、 ω'_{τ_v} は $g \mapsto \tau({}^t\bar{g}^{-1})$ (やはり不分岐表現になる) からきまる zonal spherical function を表わしている。

[4] での具体的計算から結局、 $\pi_v \hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} d_H^{(v)}(s) \mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)}; \omega_v^0) &= d_H^{(v)}(s) c_{w_n}^{(v)}(s) \xi_1(s_1)^{-1} \prod_{k=1}^n L(s-n+\frac{1}{2}, \mu_k) L(s-n+\frac{1}{2}, \mu_k^{-1}) \\ &= d_H^{(v)}(s) c_{w_n}^{(v)}(s) \xi_1(s_1)^{-1} L(s-n+\frac{1}{2}, \pi_v) \end{aligned}$$

split unramified place ではより容易な計算から、 $\pi_v \hookrightarrow Ind_{B_v}^{G_v}(\mu_1, \dots, \mu_{2n})$ と仮定すると、

$$d_H^{(v)}(s) \mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)}; \omega_v^0) = d_H^{(v)}(s) \xi(s)^{-1} L(s-n+\frac{1}{2})$$

$$(\xi(s) = \prod_{k=1}^{2n} \zeta_{F_v}(2s-k+1))$$

となることがわかる。ところで split/non-split ともに出てくる “おつり” の部分を $b_v(s)$ と書くことにする。これを計算すると、

split case

$$d_H^{(v)}(s) = \prod_{k=1}^{2n} \zeta_{F_v}(2s-2k+2) \prod_{k=1}^n \zeta_{F_v}(2s-2k+1)^2$$

なので、

$$\begin{aligned} b_v(s) &= d_H^{(v)}(s) \xi(s)^{-1} \\ &= \dots = \prod_{k=1}^n \zeta_{F_v}(2s-2k+1) \zeta_{F_v}(2s-2n-2k+2) \end{aligned}$$

non-split case

$$c_{w_n}^{(v)}(s) = \prod_{k=1}^n \frac{\zeta_{F_v}(2s-2k+1)}{\zeta_{F_v}(2s-2k+2)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta_{E_v}(2s-2k)}{\zeta_{E_v}(2s-k)}$$

となり、よって、

$$\begin{aligned} b_v(s) &= d_H^{(v)}(s) c_{w_n}^{(v)}(s) \xi_1(s_1)^{-1} \\ &= \dots = \prod_{k=1}^n \zeta_{F_v}(2s-2k+1) \zeta_{F_v}(2s-2n-2k+2) \end{aligned}$$

つまりどちらの場合でも、“おつり” $b_v(s)$ は global zeta の積

$$b(s) = \prod_{k=1}^n \zeta_F(2s-2k+1) \zeta_F(2s-2n-2k+2)$$

の v -th factor として揃った形になる。まとめると、

Theorem 10

$$d_H^{(v)}(s) \mathcal{Z}_v(\phi_s^{(v)}; \omega_v^0) = b_v(s) L(s - n + \frac{1}{2}, \pi_v)$$

但しここで、 $b(s) = \prod_{k=1}^n \zeta_F(2s-2k+1) \zeta_F(2s-2n-2k+2)$ 、 $b_v(s)$ はその v -th local factor としている。

最後に、§.3 の Prop.4 と較べて、 $b(s)$ の各因子は、normalized Eisenstein series $d_H(s)E(f_s; h)$ の constant term に必ず現われることがわかり、(各 $c_w(s)$; $w \in W_H$ を $b(s)$ が割り切る) したがって $L(s, \pi)$ の possible poles をみるときにこのおつりは邪魔にはならないことに注意しておく。

参考文献

- [1] A.Borel, Automorphic L-functions, Proc.Symp.Pure Math.vol.33(2) pp.27-61. Amer.Math.Soc.1979.
- [2] P.Cartier, Representations of p-adic groups:A survey, Proc.Symp.Pure Math.vol.33(1) Amer.Math.Soc.1979.
- [3] W.Casselman, The unramified principal series of p-adic groups.1, Comp.Math. vol.40. 1980. pp.387-406.
- [4] R.Godement and H.Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Lect.Notes in Math.vol.260 Springer-Verlag. New-York.1972.

- [5] S.Gelbart and F.Shahidi, Analytic Properties of Automorphic L-functions, Academic Press. 1988.
- [6] S.Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press.1985.
- [7] H.Jacquet, Principal L-functions of linear groups, Proc.Symp.Pure Math.Vol.33(2) pp.63-86. Amer.Math.Soc.1979.
- [8] R.P.Langlands, Euler Products Yale Univ., 1967.
- [9] I.Piatetskii-Shapiro and S.Rallis, ϵ -factors of representations of classical groups, Proc.Nat.Acad.Sci.USA.,vol.83, 1986. pp.4589-4593.
- [10] I.Piatetskii-Shapiro and S.Rallis, L-functions for Classical Groups, Lect.Notes in Math.vol.1254 Springer-Verlag.New-York.1987.