

反可積分極限と量子エノン写像のストークス幾何

首藤 啓

東京都立大学 大学院理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

池田 研介

立命館大学 理工学部
ahoo@mp0tw009.bkc.ritsumeai.ac.jp

1. 量子エノン写像

以下の多重積分を考える.

$$I(q_0, q_n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{n-1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q_0, q_1, \dots, q_n) \right]. \quad (1)$$

ここで, $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$ は,

$$S(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 - \sum_{j=1}^n V(q_j) \quad (2)$$

であり, $V(q_j)$ は,

$$V(q) = -\frac{q^3}{3} + cq \quad (3)$$

とする. ただし, q_0 および, $c \in \mathbf{R}$ はパラメータであり, $I(q_0, q_n)$ は q_n の関数とみる. $I(q_0, q_n)$ は, 物理的には, 作用関数 $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$ を母関数として時間発展則が与えられる離散写像の量子プロパゲータ, すなわち, 時刻 $t=0$ で位置 q_0 にあった状態が, 時刻 $t=n$ で位置 q_n に存在する確率振幅の経路積分表示とみることができる [1].

写像系の陽な時間発展方程式は, $\delta S = 0$ の条件から,

$$(q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1}) = q_i^2 - cq_i, \quad (4)$$

によって与えられるが, アフィン変換 $(y-x, y-1)$ を経て (4) は, 面積保存のエノン写像 $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}: \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n^2 - x_n + (1-c) \end{pmatrix} \quad (5)$$

に変換される. エノン写像は, 多項式自己同型写像の分類のうち, 自明でない力学系の標準形であることが知られており [2], 実エノン写像に関しては既に多くの研究がある. さらに近年, 複素力学系としての進展が著しい [3].

‘量子カオス’の問題においては、量子系の様々な特徴が、対応する古典カオスのいかなる性質の反映であるか？ということが議論される。そのことを調べていくには、古典 $\leftrightarrow$ 量子の翻訳言語が必要になってくる。例えば、カオスを示す系のプロトタイプとして知られる定負曲率面上での測地流の問題では、多様体上での閉測地線と、対応する Laplace-Beltrami 演算子のスペクトルとの間に、“セルバーグの跡公式”と呼ばれる双対関係が存在することが知られているが、これは、古典 $\leftrightarrow$ 量子の翻訳言語、という観点からもそのプロトタイプとみなすことができる [4]。また、通称、アーノルドの猫と呼ばれるトーラス上の群同型写像に対しても、同様の exact な跡公式を作ることができ、数論的な考察を加えて詳しい解析もなされている [5]。

定負曲率面上での測地流、アーノルドの猫などは、そのような跡公式を背景に厳密な議論が展開できる反面、古典と量子の対応関係が exact であるという点では特殊な例とも言える。当然のことながら、多くの系では一般に exact な跡公式は期待できない。特に、強いカオスを示す力学系に対しては、セルバーグの跡公式と良く似た構造をもつグッツウィラーの跡公式が量子・古典対応を調べる上での強力な武器となっているが [6]、半古典近似をその導出の過程で経るため、その数学的構造は曖昧な点が多い。ここでいう半古典近似とは、最低次の WKB 近似、我々の場合でいえば、写像 (4) に対する量子プロパゲータ $I(q_0, q_n)$ を鞍点法で評価し、得られた古典軌道のみをもってプロパゲータを近似する手続きのことである。しかしながら、本来カオスが顕在化する長時間極限、すなわち、ステップ数 $n \rightarrow \infty$ では、鞍点条件 $\delta S = 0$ を満足する鞍点 (=古典軌道) は指数関数的に増大し、鞍点法の適用条件である、各鞍点の独立性が破綻する恐れがある。また、トンネル現象といった指数関数的に小さな確率が問題になってくる純量子論的現象では、WKB 近似の有効性や、ここで問題にするストークス現象の問題は本質的に重要になってくる [1, 7]。このように、WKB exact でないカオス系の半古典論では、素朴 WKB 近似では扱うことのできない漸近展開の微妙な側面がカオスの存在と大きく抵触する可能性がある。逆に、カオス系の量子・古典対応の問題の核心はこの点にあるという捉え方もできる。量子エノン写像に対して exact WKB 解析を試みる動機は、まず考え得る限り簡単な状況で、この辺りのことを明確にしておく必要があるからである。

2. 馬蹄型条件と反可積分極限

通常、写像の時間発展は、(4) のように、時刻 $i+1$ の状態を時刻 i と $i-1$ の状態によって陽な形であらわされる。これは、作用関数 $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$ に対する変分条件 $\delta S = 0$ から得られるが、陽な時間発展 (4) は、 $\delta S = 0$ の条件とまったく同等ではない点には注意する必要がある。エノン写像の場合にこのことを見るには、変数変換 $q'_i = \epsilon q_i$ によって作用 (2) を書き換えれば良い。新しいパラメータ $\epsilon = 1/\sqrt{c}$ を導入し、作用を $\hat{S} = \epsilon^3 S$ で定義し直すと、

$$\hat{S} = \epsilon \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} (q'_{j+1} - q'_j)^2 \right\} - \sum_{j=1}^n \left(-\frac{q_j'^3}{3} + q'_j \right) \quad (6)$$

となる。 $\epsilon \neq 0$ である限り、変分条件 $\delta \hat{S} = 0$ と時間発展則 (4) とは同値であるが、 $\epsilon = 0$ では、時刻 $i+1$ の状態を時刻 i 、及び $i-1$ の状態で陽な形であらわすことができない。しかし、新

しい作用 $\hat{S}$ 中の ϵ 依存性は解析的であるから, $\epsilon = 0$ のとき, 条件 $\delta S = 0$ から得られる系の‘軌道’ $q_i \in \{-1, +1\}$ ($i \in \mathbb{Z}$) は, $\epsilon \neq 0$ での力学系の状態空間と何らかの意味でつながっていることが期待できる. いまの場合, $\epsilon = 0$ は, もともとのパラメータで言うと, $c = \pm\infty$ に対応し, 理想的に馬蹄力学条件が成り立つ極限である. このように, 作用の変分ゼロという, 陰な表現によって力学系を定義し, 陽な時間発展を与えることのできない特異極限を反可積分極限 (anti-integrable limit) という [8].

ハミルトン系の場合, 一般に, 可積分極限で存在していたトーラスが, 摂動の下でも残り続けることを証明することができる (KAM の定理). しかし, 摂動と同時に発生が予想されるカオス軌道は, 可積分極限にそもそもカオス軌道が存在しないため, 可積分系からの接続を考える限りその存在を主張することができない. ところが, 反可積分極限ではその反対に, ベルヌーイシフトに対応する $q_i = -1, +1$ の状態がその極限として存在しているため, 反可積分極限を基点とした接続によって, ベルヌーイシフトと同相な軌道, すなわち, カオス軌道の存在を主張することができる [8]. $q_i = -1, +1$ の状態が $\epsilon \neq 0$ の状態にも接続されることを示すには, 陰な条件 $\delta S = 0$ が, $\epsilon \neq 0$ で陰関数定理によって解ける条件を見るだけでよく, 力学系の軌道中にカオス軌道が存在することを言うのは, 近可積分系での摂動論に比較して遥かに容易である.

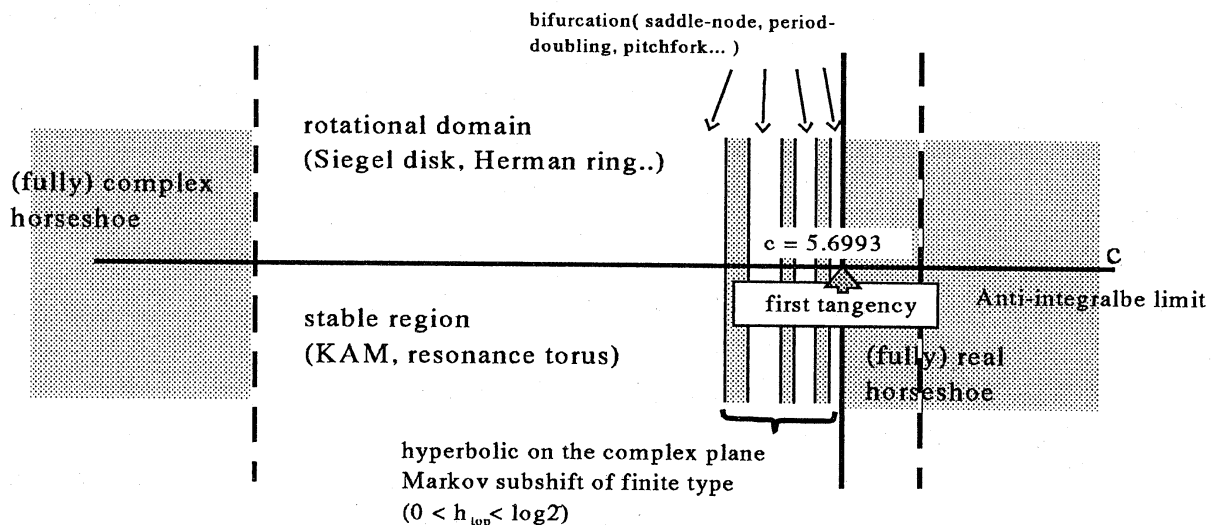


図1 Hénon 写像の非線形パラメータ c 上での様子.

エノン写像の場合, 各要素が複素数値をとる両側無限列 $(\dots, q_{-1}, q_0, q_1, q_2, \dots)$ からそれぞれ自身への写像で, 変分条件 $\delta S = 0$ から得られる状態を形式的に不動点にもつ演算子を構成し, 縮小写像定理によってその写像の不動点が存在するための条件を求めることによって, 系が $\{-1, +1\}$ の記号列から成るベルヌーイシフトと共役になるパラメータ領域の十分条件

を決めることができる [9]. 特に, $c \rightarrow +\infty$ の極限で, エノン写像はいわゆる馬蹄力学系になっており, 正および負方向の時間発展とともに有界に留まるような不変集合はすべて実面上にのっている. 実面上の周期軌道はすべてサドル型であり双曲的であることから, 系は構造安定性をもつ. その結果, パラメータ c の変動に対して, 系のトポロジカルな性質は不変に保たれる. 一方, $c \rightarrow -\infty$ の極限は, $\{-i, +i\}$ の記号列に共役な複素馬蹄力学系が実現される.

以上のように, エノン写像が最も単純になるのは, $|c| \gg 1$ の反可積分極限近傍であるが, それ以外の c の各領域を含めてエノン写像のおおよその様子を示すと図 1 のようになる. 馬蹄条件, あるいは双曲性条件が崩れ, 回転領域が現れ始めるとトポロジカルな側面に問題を絞っても系の記述は著しく困難になる. このようなことから, WKB exact でないカオス系の半古典論を調べるに当たって, まず手をつけるべきは, 反可積分極限とその近傍ということになる. パイコネ変換, 区分線形写像, ビリヤード系など, トポロジカルな性質が同様に単純になる力学系は他にも知られているが, それらの写像については, 作用が解析関数とならないためここでの目的には適さない.

3. 実馬蹄条件下での陪特性微分方程式の解曲線

以下では, 実馬蹄条件が成り立っているパラメータ領域での積分 $I(q_0, q_n)$ (量子プロパゲータ) に対するストークス現象を考える. 多重積分のストークス現象の大きな特徴は, 高階の微分方程式の場合と同様, ストークス線の交差が発生することである [10]. ストークス線の交差が発生した場合の exact WKB 解析からの基礎付けは, Aoki, Kawai & Takei によって与えられている [11].

(1) で与えられる多重積分 $I(q_0, q_n)$ は, その積分の満たす微分方程式が存在することから, 微分方程式の処方箋に沿ってストークス幾何を議論することができる [7]. すなわち, もともとの微分方程式のボレル変換の陪特性微分方程式の解曲線の自己交差点として新しい転回点 (New turning point) を定義し, そこから伸びるストークス線を従来のストークス線と同様な定義によって与え, 双方を併せてストークスグラフをつくる.

いま, (4) の時間発展則を与えるための 2 つの初期条件 (q_0, q_1) のうち q_0 の方は, パラメータとして固定するため, 終状態 q_n は q_1 の関数とみなすことができる. $n = 3$ の場合, この $q_n = q_n(q_1)$ は, $I(q_0, q_n)$ の満たす微分方程式のボレル変換に対する陪特性微分方程式の解になっており [12], この事実是一般の n に対しても同様に成り立っていることが予想される (証明要). このことを取りあえず認めると, 多重積分 $I(q_0, q_n)$ のストークスグラフは以下で定義される.

- 転回点: q_n 面上で,

$$S(q_0, q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}, q_n^T) = S(q_0, q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}, q_n^T) \quad (7)$$

を満たす点 q_n^T を転回点といい, 従来の転回点と新しい展開点とは,

$$\begin{aligned} (q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}) &= (q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}) \implies q_n^T \text{ は通常の展開点} \\ (q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}) &\neq (q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}) \implies q_n^T \text{ は新しい展開点} \end{aligned}$$

によって区別される. ここで, $(q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)})$ は, q_0 と q_n を与えたときの離散写像 (4) の解である. また,

- ストークス線: q_n 面上, 転回点 q_n^T から伸びる

$$\text{Im } S(q_0, q_1^{(i)}, \dots, q_{n-1}^{(i)}, q_n^T) = \text{Im } S(q_0, q_1^{(j)}, \dots, q_{n-1}^{(j)}, q_n^T) \quad (8)$$

を満たす曲線がストークス線になる. 通常の意味での転回点から伸びるストークス線は従来のストークス線であり, 新しい転回点から伸びるストークス線が新しいストークス線に対応する.

陪特性微分方程式の解が, 写像 (4) の解になっている事実を用いると, その解曲線を容易に描くことができる. 陪特性微分方程式の時間 t には初期条件 q_1 が対応するので, 初期条件 q_1 を動かしつつ, 終状態 q_n の動く様子を追跡すればそれがそのまま陪特性微分方程式の解曲線となる. 図 2 に, $n = 5$ に対する, 実馬蹄条件が満たされているパラメータ領域での, 馬蹄力学系によって引き伸ばし折れたみを受けた Lagrange 多様体と, 対応する陪特性微分方程式の解曲線 (q_n - S 面に射影したもの) を示す. ストークスグラフに現れる転回点は, Lagrange 多様体上での折れ曲がり点に対応し, 陪特性微分方程式の解曲線上ではカusp型転回点となってあらわれる. また, 陪特性微分方程式の解曲線上の自己交差点が, ストークスグラフ上の新しい転回点に対応している.

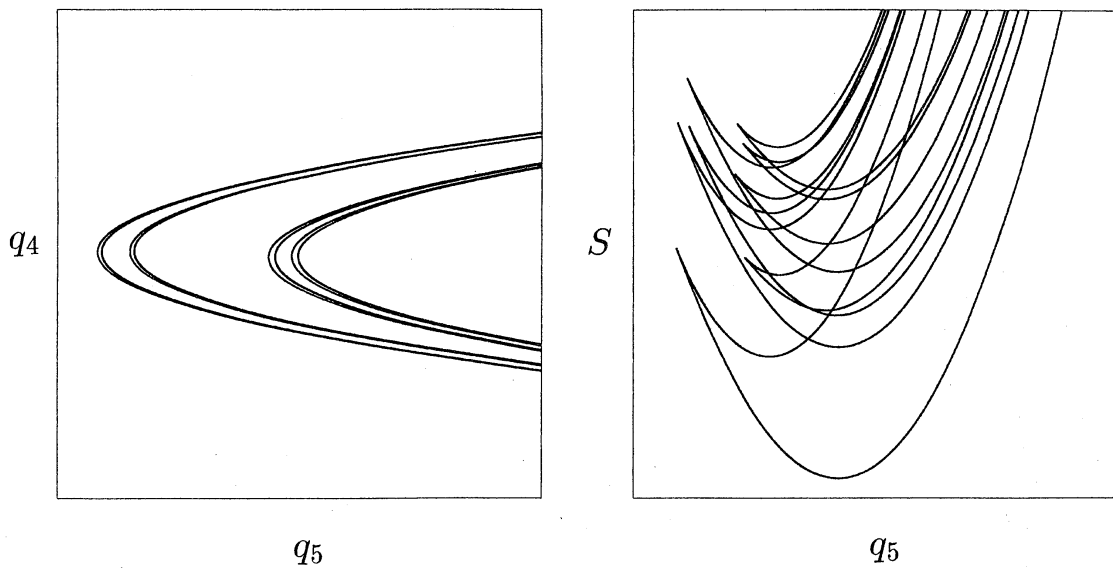


図 2 (a) $q_0 = 0$ を初期値面にとった Lagrange 多様体 ($n = 5$). (b) 対応する陪特性微分方程式の解曲線. いずれの場合も, 図の外側でつながっており, 全体として一本の曲線になっている.

先に触れたように, 実馬蹄領域ではエノン写像は構造安定性をもち, Lagrange 多様体のトポロジーは, $c \gg 1$ では不変に保たれる. c を変えた場合の陪特性微分方程式の解曲線を描く

と、カスプ型転回点と自己交差点の現れ方から決まる曲線のトポロジーは、実馬蹄領域で力学系が構造安定なパラメータ領域では変わらず、この事実から、解曲線に対する構造安定性が予想される。

4. ストークス幾何

実馬蹄条件が成り立っている場合には、たとえ力学系 (4) を $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ に拡張したとしても、ジュリア集合 J がすべて $\mathbb{R}^2$ 上に乗っているため、力学系として非自明な性質は実面上の力学がすべて担っている。このことより、実馬蹄条件下においては、実面上の力学の記述さえできれば、古典写像の世界はすべて理解できたことになる。

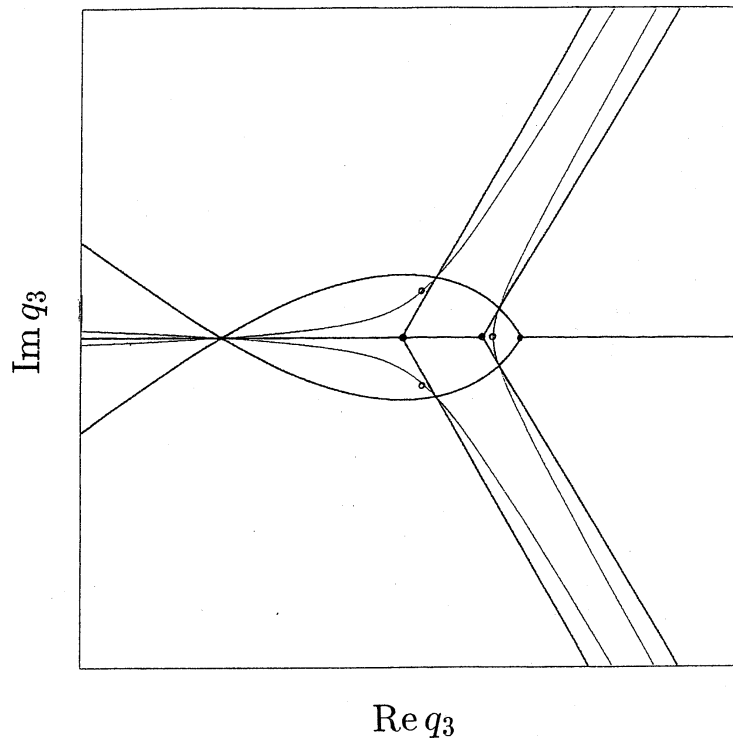


図3 積分 $I(q_0, q_n)$ (ただし, $n = 3, c = 10, q_0 = 0$) のストークスグラフ. 交差点の周りの一価性条件から決めた, WKB 解の接続の有無 (ストークス現象を起こすか起こさないか) は図示していない. 太線は通常のストークス線, 細線は新しいストークス線. 黒丸は通常の転回点, 白丸は新しい転回点. $\text{Im} q_3 = 0$ 上のストークス線は縮退している.

ところが、図3に示すようにストークス幾何を問題にする際には、それでは不十分なことがわかる。 $c \gg 1$ では、従来の転回点はすべて実面上に存在するが、新しい転回点に関しては、総計3つの転回点 ($n = 3$ の場合) のうち、1つは実面上にあるが、残りの2つは虚面上に存在する。この例でも、すべてのストークス線の交差点上で一価性条件が満足するように

WKB 解接続の有無を決めることによって、 q_3 面全体でのストークス幾何を一意的に決定することができる [12]. そのためには当然のことながら、虚面に存在する新しい転回点と、そこから伸びる新しいストークス線を考慮に入れる必要がある. このように、たとえ 実馬蹄条件下でも、ストークス幾何を考える際には、虚面の情報を必要としている、という事実は非常に興味深い.

時間ステップを大きくした場合のストークスグラフの様子をまとめたのが図 4, 5 である. 図は、実寸のストークスグラフではなく、数値的に得られたものをグラフのトポロジーを保ったまま変形したものである (実寸のストークスグラフは、中心付近と周辺付近のそれぞれの構造の間に 10^{10} ほどのスケールの差があるため、実寸では 1 枚の図に表すことができない). また、図に描かれているものは、すべて従来の意味でのストークス線のみであり、新しい転回点、新しいストークス線は煩雑になるため省略してある. 各ステップのストークスグラフは、陪特性微分方程式の解曲線同様、力学系が構造安定性な領域では、グラフ的なトポロジーも不変に保たれる.

各ステップに対して、グラフを特徴づけるのは以下の諸点である.

1. $q_n \sim 0$ を挟んで左側には、 2^{n-2} 個転回点が存在するが、これらは、図 3 の Langangian 多様体上の左側の屈折点に対応する.
2. 以上の転回点からは、それぞれ $\pm\pi/3$ 方向と π 方向にストークス線が伸びる. これらの転回点、ストークス線は、ステップ数に応じてその数が指数関数的に増大するが、グラフのトポロジーは数が増える以外で全く変わらない.
3. $q_n \sim 0$ を挟んで右側にある転回点は、Langangian 多様体の右側の屈折点 (図 3 には外側にはみ出して見えていない) に対応し、その $\text{Re } q_n$ 上での位置は、ステップ数 n と共に、最初は指数関数的に、次第に超指数関数的に $q_n \sim 0$ 近傍から遠ざかる.
4. それらの転回点 (計 $2^{n-1} - 1$ 個) から発するストークス線は、転回点近傍では局所的に $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ 方向に伸びるが、 $2\pi/3, 4\pi/3$ 方向にのびた 2 本のストークス線はさらに先の $\text{Re } q_n$ 軸上で互いに交差する.

$n = 3$ では、 $\text{Re } q_n$ 軸上で交差した 2 本のストークス線は、それぞれ $2\pi/3, 4\pi/3$ 方向に漸近する (図 4 (b)). $n = 4$ では、最も外側の転回点から伸びるストークス線は、 $\text{Re } q_n < 0$ で交差した後、 $\text{Re } q_n > 0$ の領域で再び交差する (その際には、3 本のストークス線が一点で交差する). その後、 $|q_4| \rightarrow \infty$ で、 $2\pi/3, 4\pi/3$ 方向に漸近していく (図 5 (a)). また、 $n = 5$ では、最も外側のストークス線は、基点となる転回点のまわりを 2 周してから $2\pi/3, 4\pi/3$ 方向に漸近する (図 5 (b)).

以上の観察から、結局、これらのストークスグラフを特徴づけるものは、右側屈折点から伸びる ($2\pi/3, 4\pi/3$ 方向の) ストークス線が、それぞれ何回 $\text{Re } q_n$ 軸を交差するか? ということになる. 当初の目的である、馬蹄条件下にあるエノン写像の exact WKB 解析を成功させるには、一般の n に対するストークスグラフのトポロジーを知る必要があるが、 $n = 5$ までを見

る限りは残念ながら単純な規則を見いだすことはできない。(計算精度の限界のため、今のところこれ以上は計算不能).

因みに、反可積分極限, すなわち $\epsilon = 0$ では, (1) の多重積分は Airy 積分の直積になる. $n = 3$ (2 重積分) の場合の直積 Airy 関数の鞍点のリーマン面 (鞍点の adjacency) は, 多重積分の超漸近展開の応用例のひとつとして Howls によって調べられている [13]. 図 4, 5 上で, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとると, $\text{Re } q_n$ 軸上でのストークス線の交差点がすべて $\text{Re } q_n = \infty$ or $-\infty$ に発散する. しかし, ストークス幾何上では $\epsilon \rightarrow 0$ の極限は特異的な極限であり, 直積 Airy 関数では実馬蹄条件下でのストークスグラフを捉えることはできない.

定性的な考察であるが, 下地にある写像の構造が単純であるにも関わらず, 一般の n に対する $I(q_0, q_n)$ のストークスグラフに対して, 簡単なルールが見えてこない理由は, もともとの積分 $I(q_0, q_n)$ が時間領域のプロパゲータであることが考えられる. 図 3 に示した Langange 多様体は, ある初期条件 $q_0 = \text{const}$ 面を時間発展したものであるが, 引き伸ばされ折れた畳まれた構造は, 十分時間が経過した後, 必ずしも一定の構造に収束するものではなく, 右側の屈曲点 (図からは遥かにはみ出している) は, 時間と共に超指数関数的に遠ざかる. 実効的に引き伸ばし折れた畳みが起こる有界領域から十分離れた領域の運動を決めるのは, ポテンシャルで言えば, その最も次数の高い q_i^3 の項であり, ダイナミクスはその最高次の項のみに支配される. 最終的な挙動は十分遠方での逃散率のみが問題になり, 有界領域の力学は反映されなくなる.

時間に対して正・負双方向を対等に扱うには, 力学系の不変集合に注目するのが自然である. いまの場合, 作用 $S(q_0, q_1, \dots, q_n)$ を,

$$S(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \quad (9)$$

と定義し直し ((2) の定義との違いは, $V(q_j)$ の項が $j = 0$ から始まっている点), 積分 $I(q_0, q_n)$ に対し, その跡:

$$\text{Tr}(I) = \int I(q_0, q_0) dq_0 \quad (10)$$

をつくると, エネルギー領域の半古典論に移行することができる (例えば, 写像系の跡公式など). この $\text{Tr}(I)$ に鞍点条件を課すと, 鞍点解として周期軌道が得られる. 周期軌道は力学系の不変集合であり, 時間に対して正・負両方向に対して対等である. この場合, large parameter として非線形性をあらわす c をとるのがひとつの選択として考えられる. 鞍点条件を満たす周期軌道を c をパラメータとして表し, 複素 c 面上でのストークス幾何を調べるわけである. このように large parameter をとった場合, 例えば, 複素 c 面上で周期軌道が縮退すると (力学系としてみれば, 周期軌道が分岐を起こす瞬間に対応する), 縮退した作用の値自身は等しくなるので, 先の定義に従えば, その点が複素 c 面上での (通常の意味での) 転回点を与える. 例えば, 分岐がサドル・ノード型で起こり 局所的に quadratic なものであれば, その転回点は局所的に Airy 型になる. このことから, 複素 q_n 面上で行ったのと全く同様の議論を複素 c 面上のストークス幾何で展開することも可能になるものと思われる. 時間領域のストークス幾何と相補的な情報として今後検討の余地があろう.

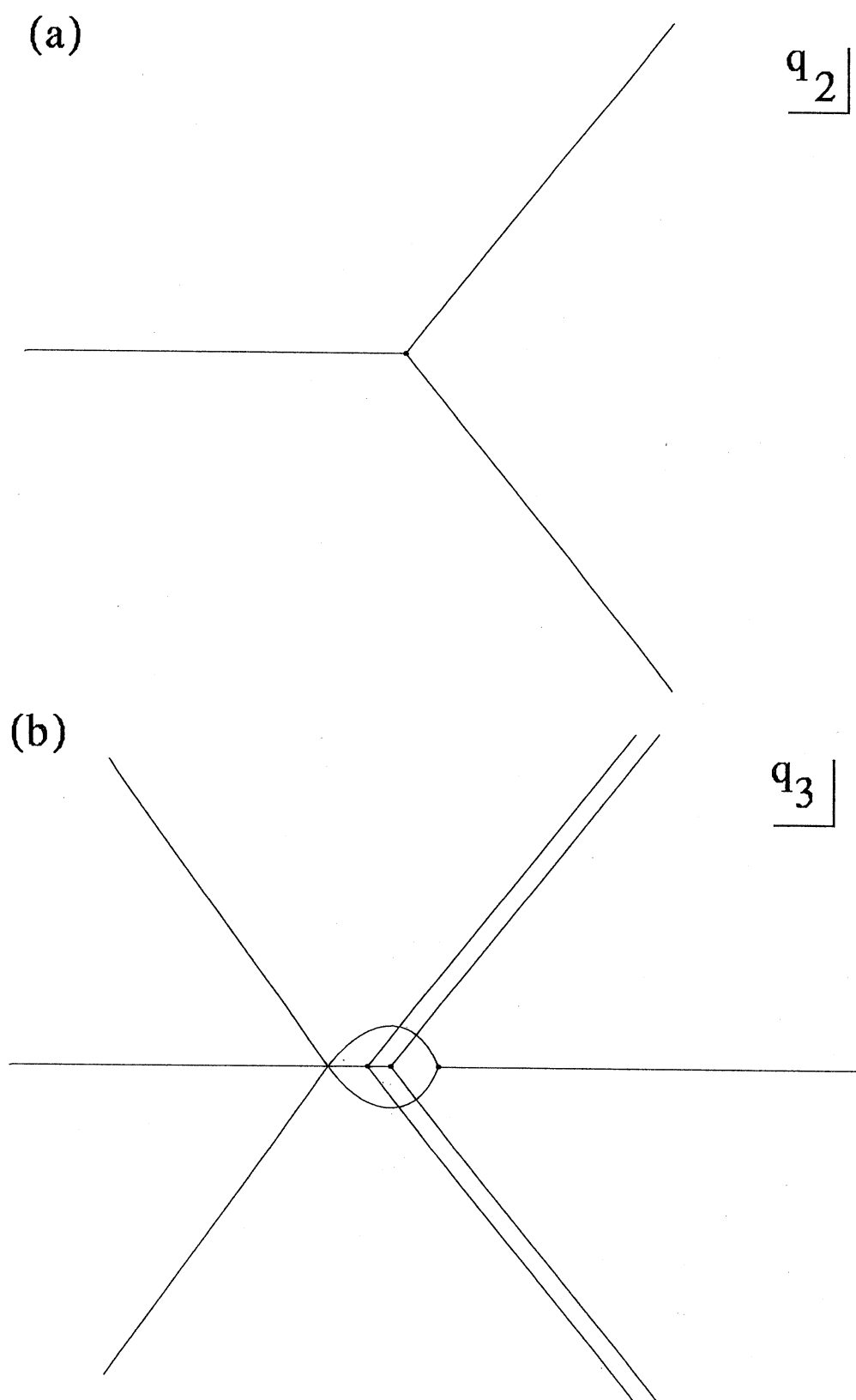


図4 馬蹄力学系条件下でのストークスグラフ. ただし, 新しいストークス線は図が煩雑になるため省いてある. パラメータの値は $q_0 = 0, c = 10$. (a) $n = 2$, (b) $n = 3$.

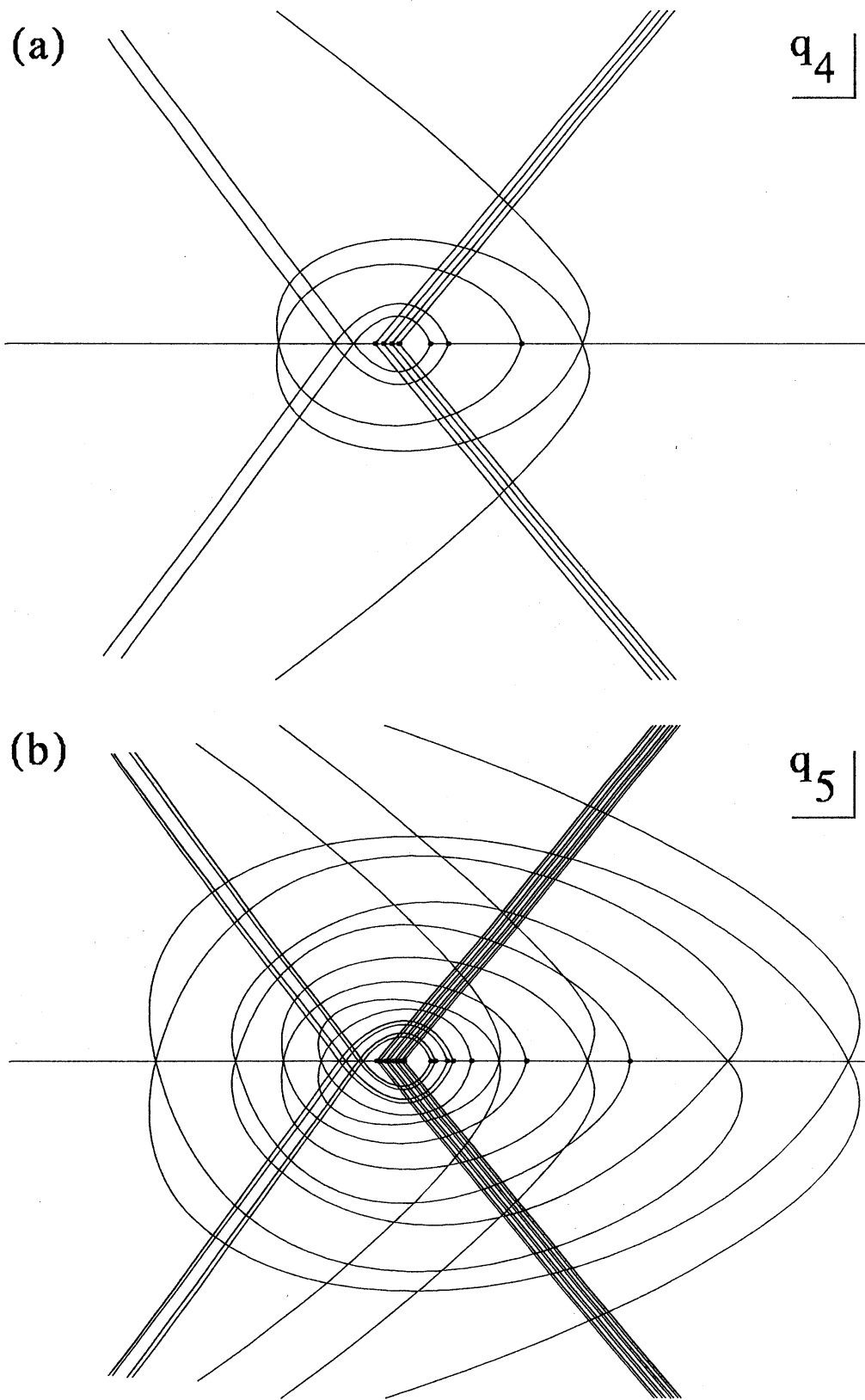


図 5 馬蹄力学系条件下でのストークスグラフ. ただし, 新しいストークス線は図が煩雑になるため省いてある. パラメータの値は $q_0 = 0$, $c = 10$. (a) $n = 4$, (b) $n = 5$.

参考文献

- [1] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **74**(1995)682; *ibid* **76**(1996)4151; Physica D**115**(1998)234; Prog. Theor. Phys. Suppl. to appear(2000).
- [2] S. Friedland and J. Milnor, Ergod. Theor. Dyn. Sys. **9**(1989)67.
- [3] E. Bedford and J. Smillie, Invent. Math. **103**(1991)69; J. Amer. Math. Soc. **4**(1991)657; Math. Ann. **294**(1992)395; E. Bedford M. Lyubich and J. Smillie, Invent. Math. **112**(1993)77; 石井 豊, 数理解析研講究録 **1042**(1998)193; S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda, “*Holomorphic Dynamics*” (Cambridge University Press, 1999).
- [4] N. Balazs and A. Voros, Phys. Rep. **143**(1986)109.
- [5] J.P. Keating, Nonlinearity **4**(1991)277; **4**(1991)309.
- [6] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [7] 首藤啓, 池田研介, 日本物理学会誌 **54**(1999)716; 物性研究 **71**(1999)581; **71**(1999)806; **73**(2000)647.
- [8] S. Aubry and G. Abramovici, Physica D **43** (1990) 199; S. Aubry, Physica D **86**(1995)284.
- [9] D. Sterling and J.D. Meiss, Phys. Lett. A **241**(1998)241; D. Sterling H.R. Dullin and J.D. Meiss, Physica D, **134**(1999)153.
- [10] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts, J. Math. Phys., **23**(1982)988.
- [11] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in *Méthodes résurgentes, Analyse algébrique des perturbations singulières*, L. Boutet de Monvel ed.(1994)69; Asian J. Math. **2**(1998)625; in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and non-linear*, J. Howls, T. Kawai and Y. Takei ed (2000)11.
- [12] 首藤啓, 池田研介, 数理解析研究所講究録 **1133**(2000)56.
- [13] C.J. Howls, Proc. R. Soc. Lond. A, **453**(1997)2271.